数理解析研究所講究録
490巻 1983年 149-165

大規模な閉鎖形マルコフ的待ち行列網の構造の複雑度と構造安定性との関連性

東北大学大学院 趙 国 鉉(Kuk Hyun CHO)
東北大学工学部 菰田 保夫(Yasuo Komota)
星子 幸男(Yukio Hoshiko)

1 まえがき

待ち行列理論の分野では，1950年代後半からJackson等により待ち行列網(QNと略記)の研究が進められいたが(1)~(3)，1970年代より，計算機システム等の性能評価にQN理論が適用され幾多の興味深い成果が報告されている(4)~(7)。

更に，近年では，大形計算機システムの性能評価やパケット交換網の解析における種々の問題(遅延解析，フロー制御，ルティーング，パケット交換機のバッファ共用方式等(4)~(8))へのQN理論的アプローチが活発に展開されている。このような状況に伴い，QN理論の進歩も著しく，BCMP形QNやその拡張形等のより一般的なモデルの研究へと発展している(4)。

一方，本論文の主題である構造安定性やロバストネスとはシステム制御理論ではよく知られた概念で，直観的には次の

ように定義できる[9]。"構造安定性やロバストネスとは，システムの数学的モデルに含まれるパラメータに摂動を施しても，システムのある定性的性能や機能が保持されることを意味する"。このような問題は計算機システムやパケット交換網の最適化あるいは種々のパラメータの推定誤差や変動に対して信頼性の高い設計を行う際にも，重要な課題になると考えられる。このような観点から，著者等は，最も基本的なQNである開放形及び閉鎖網マルコフ的QN（OMQN, CMQN）[1]-[3]の経路行列，到着率及びサービス率ベクトルの摂動に対する構造安定性について詳論した[10],[11]。

Ashby, May等はRCS（Randomly connected system）の観点から研究を行い，ランダムに構成した動的線形系 $\dot{X}(t)=AX(t)$ の構造の複雑度（係数行列Aの結合度）と漸近安定性との相関を論じ，"ランダムに構成した系の結合度が増加する程，系が漸近安定である確率は減少する。又，安定系から不安定系への遷移は，系の次元が大きい程急激である"こと等を明らかにした[12]-[15]。

そこで，本論文では，文献(11)の知見に基づき，大規模なCMQNを対象としその安定性として構造安定性を導入し，ランダムに構成したCMQNの構造の複雑さと構造安定性との統計的関連性をモンテカルロ計算機実験を用いて明確にする。

2　CMQNの構造安定性

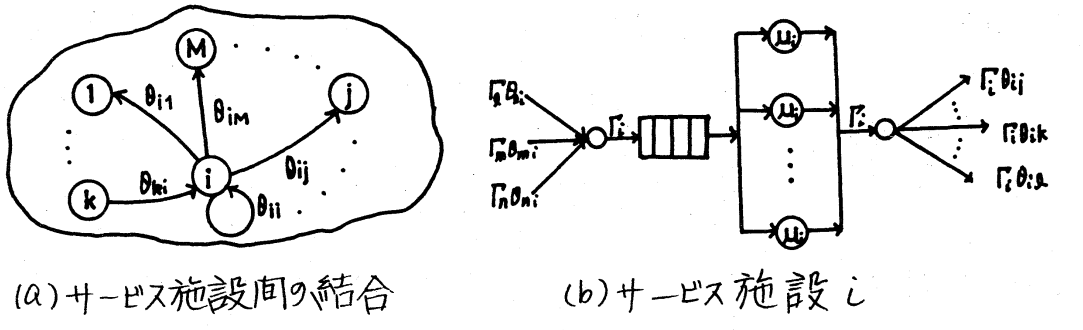
2-1　CMQNと基本概念

図1はGordon & Newellが提案したCMQNの概略図である。このCMQNは，有限個の・/M/n_i のサービス施設がマルコフ的に結合したものである。閉鎖網であるので客は施設間を無限に巡回し，その推移がマルコフ連鎖で確率的に規定される網内客数は常に一定な閉鎖形のQNである[3]。

CMQN：$\mathcal{N}_c$は，形式的に次の5項組で定義される.

$$\mathcal{N}_c=\langle \mathbb{M},\ \mathbb{N},\ \boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Theta},\ K\rangle$$

(1)$\mathbb{M}=\{1,2,\cdots,M\}$：サービス施設の有限集合；(2)$\mathbb{N}=\{n_1,n_2,\cdots,n_M\}$：各サービス施設$i(\in\mathbb{M})$の窓口数$n_i$のベクトル；(3)$\boldsymbol{\mu}=\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_M\}$：平均サービス率ベクトルで施設$i$の$n_i$個の同一な窓口は平均サービス率$\mu_i(>0)$の指数分布で処理する；(4)$\boldsymbol{\Theta}=\{\theta_{ij}\}$：M×M確率行列で，網内の各サービス施設間の推移を規定する状態空間$\mathbb{M}$上のマルコフ連鎖を表わす；(5)網内客数は常に一定であり，これをKで表わす.



(a)サービス施設間の結合　　(b)サービス施設 i

図1. CMQN：$\mathcal{N}_c$の構造

各サービス施設でのサービス規律は，仕事保存量（Work-Conserving）の任意のサービス規律であると仮定する[5]。

CMQN：$\mathcal{N}_c$では，施設iへ到着する客は網内の各施設から到着する客のみを考えれば良い。Γ_iを網内の各施設からiへ到着する客の平均総到着率とし，そのベクトルを

$$\mathbb{\Gamma}=(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_M), \quad (\Gamma_i \geq 0,\ i \in \mathbb{M})$$

を平均総到着率ベクトルと呼ぶ。

従って，定常状態では，次式が成立しなければならない[3]。

$$\mathbb{\Gamma} = \mathbb{\Gamma}\,\mathbb{\Theta} \qquad (1)$$

換言すれば，$\mathbb{\Gamma}$は，経路行列$\mathbb{\Theta}$の左固有ベクトルである。

以下，$\mathbb{\Theta}$の左固有ベクトル$\mathbb{\Gamma}$が乗数を除いて一意に定まるための条件について述べる。

【定義1】[9] CMQN：$\mathcal{N}_c$の経路行列$\mathbb{\Theta}$の遷移グラフが唯一の非周期的な強連結部分グラフをもつとき，$\mathbb{\Theta}$はSIA（Stochastic, Indecomposable and Aperiodic）と呼ぶ。▌

【命題1】[11] 経路行列$\mathbb{\Theta}$がSIAであるとは，適当なM×M置換行列$\mathbb{P}$を用いて，次の形に変換できることと等価である。

$$\mathbb{P}^{-1}\mathbb{\Theta}\,\mathbb{P} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbb{\Theta}_E & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{\Theta}_{TE} & \mathbb{\Theta}_T \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\,|\mathbb{M}_E| \\ \}\,|\mathbb{M}_T|, \end{array} \quad (|\mathbb{M}_E|+|\mathbb{M}_T|=|\mathbb{M}|=M) \qquad (2)$$

$\mathbb{\Theta}_E$：状態空間$\mathbb{M}_E(\subset\mathbb{M})$上の既約で非周期的なマルコフ連鎖の推移行列；$\mathbb{\Theta}_T$：状態空間$\mathbb{M}_T(=\mathbb{M}-\mathbb{M}_E)$上の過渡的マルコフ連鎖の

推移行列；$\mathbb{H}_{TE}$ = $|\mathbb{M}_T| \times |\mathbb{M}_E|$ 準確率行列；$\mathbb{P}^{-1}$：$\mathbb{P}$ の逆行列。∎

(注) $|\mathbb{M}|$ で有限集合 $\mathbb{M}$ の要素数を表わす。

【命題2】(11) 経路行列 $\mathbb{H}$ の左固有ベクトル $\mathbb{\Gamma}$ が乗数を除いて一意に定まるための必要十分条件は，$\mathbb{H}$ がSIAなることである。このとき，一般性を失わずに $\mathbb{H}$ が式(2)の標準形で書けると仮定すると，$\mathbb{\Gamma}$ は

$$\mathbb{\Gamma} = C\alpha = C(\alpha_E, \mathbb{O}) \tag{3}$$

で与えられる。但し，C は任意の正数で，$\alpha = (\alpha_E, \mathbb{O})$，$\alpha_E$ はそれぞれの $\mathbb{H}$，$\mathbb{H}_E$ の一意な不動点確率ベクトル（$\alpha = \alpha\mathbb{H}$，$\alpha_E = \alpha_E \mathbb{H}_E$）である。∎

2-2　エルゴード性と定常分布

本節では，次のような記法を用いる。

$\mathbb{Z}_+$ で非負整数の集合，$\mathbb{Z}_+^M$ で M 個の $\mathbb{Z}_+$ の直積集合を表わす。又，時刻 $t(\geq 0)$ でのサービス施設 i での客数を $k_i(t)(\in \mathbb{Z}_+)$ で，時刻 t での N_C の状態ベクトルを $\mathbb{k}(t) \triangleq (k_1(t), k_2(t), \cdots, k_M(t))(\in \mathbb{Z}_+^M)$ で表わす。

$$P_{k_1 k_2 \cdots k_M}(t) \triangleq P_r\{\mathbb{k}(t) = (k_1, k_2, \cdots, k_M)\} \tag{4}$$

ところが，閉鎖網の仮定により次式が成立する。

$$\sum_{i=1}^{M} k_i(t) = K, \quad (t \geq 0) \tag{5}$$

ここで，$\mathbb{A}(K) \triangleq \{\mathbb{k} \in \mathbb{Z}_+^M \mid \sum_{i=1}^{M} k_i = K\} \subset \mathbb{Z}_+^M$ とおくと，$\mathbb{A}(K)$ の要素は，

$$|\mathbb{A}(K)| = {}_{K+M-1}C_{M-1} \tag{6}$$

確率過程 $\{\mathbb{k}(t) \mid t \geq 0\}$ は，有限状態空間 $\mathbb{A}(K)$ 上のマルコフ過

程を成す(3)。

【定義2】 CMQN：$\mathcal{N}_C$がエルゴード的であるとは，マルコフ過程$\{\mathbb{k}(t)|t\geq 0\}$の定常分布$\{P(k_1,k_2,\cdots,k_M)\}=\lim_{t\to\infty}P_{k_1k_2\cdots k_M}(t)$が初期分布$\{P_{k_1k_2\cdots k_M}(0)\}$とは独立に一意に定まることである。▌

命題2を用い，式(3)の任意の正数Cを$C=1$と選ぶことにより，Gordon & Newellの定理(3)の一般化である次の定理が得られる(11)。

【定理1】 CMQN：$\mathcal{N}_C$がエルゴード的であるための必要十分条件は，経路行列ΘがSIAなることである。このとき，$\mathcal{N}_C$の定常分布は，各$\mathbb{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_M)\in\mathbb{A}(K)$に対して

$$P(k_1,k_2,\cdots,k_M)=\Big[\prod_{i=1}^{M}x_i^{k_i}/\beta_i(k_i)\Big]/G(K) \tag{7}$$

で与えられる。ここで，

$$\beta_i(k)\triangleq\begin{cases}k! & (0\leq k\leq n_i)\\ n_i!\,n_i^{k-n_i} & (k\geq n_i)\end{cases} \tag{8}$$

$$G(K)\triangleq\sum_{\mathbb{k}\in\mathbb{A}(K)}\Big\{\prod_{i=1}^{M}x_i^{k_i}/\beta_i(k_i)\Big\} \tag{9}$$

$$x_i\triangleq\begin{cases}\alpha_i/\mu_i & (i\in\mathbb{M}_E)\\ 0 & (i\in\mathbb{M}_T)\end{cases} \tag{10}$$

α_iは，Θの一意な不動点確率ベクトル$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_E,\mathbb{0})$の第$i$成分$(1\leq i\leq M)$である。▌

2-3　構造安定性

CMQN：$\mathcal{N}_C=\langle\mathbb{M},\mathbb{N},\boldsymbol{\mu},\Theta,K\rangle$において，$\mathbb{M}$，$\mathbb{N}$，Kを固定した場合，$\mathcal{N}_C$の確率的な振舞は$\boldsymbol{\mu}$，$\Theta$を与えれば完全に規

定される。そこで，μ，Θをわずかに変化された$\bar{N}_c=\langle \mathbb{M}, \mathbb{N}, \bar{\mu}, \bar{\Theta}, K\rangle$なるCMQNを考える。このとき，"両者の確率的な振舞はほぼ同一であろか，あるいは大幅に異なるのであろうかという疑問が生じる。以下では，この問題，即ち，N_cの構造安定性に関して文献(11)で得られた結果を要約する。

以下，次のような記法を用いる。

$\mathbb{R}_+$で正実数の集合を，$\mathbb{R}_+^M$でM個の$\mathbb{R}_+$の直積集合を，$\mathcal{M}(M;S)$でM×M確率行列全体の成す集合を表わす。又，ベクトル及び行列のノルムをそれぞれ次のように定義する。

$$\|\mu\|_v \triangleq \sum_i |\mu_i|, \qquad \|\Theta\|_m \triangleq \max_i \sum_j |\theta_{ij}|$$

更に，$\mathbb{R}_+^M$の有界な部分集合を次のように定義する。

$$\mathcal{L}_\mu(L) \triangleq \{\mu \in \mathbb{R}_+^M \mid \|\mu\|_v \le L < \infty\}$$

次に，固定した$\mathbb{M}$，$\mathbb{N}$，K上で定義され有界な平均サービス率ベクトルをもつCMQN全体の成す集合を

$$N_c^*(\mathbb{M}, \mathbb{N}, K) \triangleq \underset{\mu}{\mathcal{L}_\mu(L)} \times \underset{\Theta}{\mathcal{M}(M;S)} \tag{11}$$

で表わす。更に，$(N_c^*(\mathbb{M}, \mathbb{N}, K), d_c)$を距離空間にするために，次の距離関数$d_c$を導入する。任意の$N_c$，$\bar{N}_c \in N_c^*(\mathbb{M}, \mathbb{N}, K)$に対し

$$d_c(N_c, \bar{N}_c) \triangleq \max\{\|\mu-\bar{\mu}\|_v, \|\Theta-\bar{\Theta}\|_m\} \tag{12}$$

以上の準備の下で，N_cのエルゴード安定性と終局安定性の概念を導入する。

【定義3】(i) N_cはエルゴード安定である $\rightleftarrows$ $\exists\varepsilon>0$, $d_c(N_c,$

$\bar{\mathcal{N}}_c$) $< \varepsilon$ なる任意の $\bar{\mathcal{N}}_c$ はエルゴード的である。

(ii) $\mathcal{N}_c$ は終局安定である $\rightleftarrows$ (1) $\mathcal{N}_c$ はエルゴード安定であり，かつ (2) $\forall\delta>0$, $\exists\varepsilon(\delta)>0$, $\mathcal{N}_c$ の定常分布 $\mathcal{P}_\infty=\{P(\mathbb{k})\mid \mathbb{k}\in\mathbb{A}(K)\}$ と $d_c(\mathcal{N}_c,\bar{\mathcal{N}}_c)<\varepsilon(\delta)$ なる任意の $\bar{\mathcal{N}}_c$ の定常分布 $\bar{\mathcal{P}}_\infty=\{\bar{P}(\mathbb{k})\mid \mathbb{k}\in\mathbb{A}(K)\}$ とが次の不等式を満足する。

$$\|\mathcal{P}_\infty-\bar{\mathcal{P}}_\infty\| \triangleq \max_{\mathbb{k}\in\mathbb{A}(K)}\{|P(\mathbb{k})-\bar{P}(\mathbb{k})|\}<\delta\ 。\blacksquare \qquad (13)$$

定義3の下で，安定性に関して次の定理が成立する。

【定理2】[11] CMQN : $\mathcal{N}_c$ にて次の各条件は互いに等価である。

(1) 経路行列 Θ は SIA である。

(2) $\mathcal{N}_c$ はエルゴード的である。

(3) $\mathcal{N}_c$ はエルゴード安定である。

(4) $\mathcal{N}_c$ は終局安定である。$\blacksquare$

かくして，$\mathcal{N}_c$ のエルゴード安定性と終局安定性とは等価な概念であることが判明したので，以下では，単に $\mathcal{N}_c$ の"構造安定性"と呼ぶ。尚，定理2は，$\mathcal{N}_c$ の構造安定性に対する必要十分条件は，$\mathcal{N}_c$ がエルゴード的，つまり，経路行列 Θ がSIAなることであるという事を主張している。

次に，Θ がSIAであるか否かの判定法について考察する。

【定義4】[9] 経路行列 Θ が Scrambling であるとは，任意の状態の対 (i_1,i_2) $(i_1,i_2\in\mathbb{M},\ i_1\neq i_2)$ に対してある状態 $j\,(\in\mathbb{M})$ が存在して，$\theta_{i_1j}>0$, $\theta_{i_2j}>0$ が成立することである。$\blacksquare$

【命題3】[9] $M\times M$ 確率行列 $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ に対し次の事項が成立する：

(i) $\mathbb{P}$: Scrambling $\rightleftarrows \mathbb{P}\mathbb{P}^T > \mathbb{O}$.

(ii) $\mathbb{P}$: Scrambling $\to \mathbb{P}\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\mathbb{P}$ 共に Scrambling.

(iii) $\mathbb{P}$: SIA $\rightleftarrows \exists k \leq M(M-1)/2$, $\mathbb{P}^k$: Scrambling.

但し，$\mathbb{P}^T$ は $\mathbb{P}$ の転置行列，$\mathbb{O}$ は零行列を表わす。▌

定理2と命題3により次の系が成立する。

【系】CMQN：$\mathcal{N}_c$ が構造安定であるか否かは，有限回の手順で判定可能である。▌

3　CMQNの結合度と構造安定性との相関

本章では，CMQN：$\mathcal{N}_c$ の構造の複雑さと構造安定性との相関関係を考察するために，$\mathcal{N}_c$ の構造の複雑度の測度として，経路行列 Θ の結合度なる概念を導入し，構造安定確率 PS，構造安定度 DS，構造安定指数 IS を定義する。

更に，一定の結合度 C をもつ $\mathcal{N}_c$ をランダムに構成し，PS，DS，IS と結合度 C や次元 M との統計的関連性を明らかにする。

3-1　CMQNのランダムな構成

CMQN：$\mathcal{N}_c$ の結合度をその経路行列 Θ（$M\times M$ 確率行列）の正要素の割合，即ち，

$$C \triangleq |\{(i,j)\,|\,\theta_{ij}>0\}|/M^2 \qquad (14)$$

で定義する。Θ の定義から許容できる結合度 C の範囲は次のようになる。

$$M^{-1} \leq C \leq 1 \tag{15}$$

次に，一定の結合度Cをもつ経路行列Θをランダムに構成する方法について述べる。

【手順1】区間[0,1]上の一様乱数$q_{ij}(1 \leq i, j \leq M)$を発生させ，$\Theta$の各要素$\theta_{ij}$を

$$\theta_{ij} \triangleq \begin{cases} 0 & \text{if } q_{ij} > C \\ r_{ij} \in UD[V,W] & \text{if } q_{ij} \leq C \end{cases}$$

とする。ここで，UD[V,W]は，区間[V,W]上の一様分布（但し，0＜V＜W）であり，各r_{ij}はこの一様分布からの実現値である。更に，Θの各行の行和が1になるように正規化を行う。▌

手順1でランダムに構成した経路行列Θをもつ$\mathcal{N}_c = \langle \mathbb{M}, \mathbb{N}, \mathbb{U}, \Theta, K \rangle$の構造安定性の成否を判定する手順を示す。

【手順2：安定判別】定理2と命題3により

$$\mathcal{N}_c = \begin{cases} \text{構造安定} & \text{if } \Theta^k(\Theta^k)^T > \mathbb{O} \\ \text{構造不安定} & \text{if } \Theta^k(\Theta^k)^T \not> \mathbb{O} \end{cases}$$

となる。但し，$k=M(M-1)/2$，MはΘの次元。▌

3-2 構造安定性の評価基準

A）構造安定確率PS：手順1の方法で一定の結合度Cをもつ$\mathcal{N}_c$をランダムにT個構成し，手順2の安定判別法でそのうちL(M,C,V,W)個が構造安定であることが判明したとする。

このとき，結合度CなるN_Cの構造安定確率を

$$PS \equiv PS(M,C,V,W) \triangleq L(M,C,V,W)/T \tag{16}$$

で定義する。

B) 構造安定度DS：次に，N_Cの構造安定性がどの程度の大きさの摂動まで許容できるかという構造安定の度合として，構造安定度なる概念を導入する。文献(11)で述べたように，N_Cの経路行列ΘがSIAなるとき，かつそのときに限り，$\hat{\varepsilon}(\Theta)=m(\Theta)\triangleq\min_{i,j}\{\theta_{ij}|\theta_{ij}>0\}$未満の任意の摂動に対して，$N_C$は構造安定であることが示せる。$\hat{\varepsilon}(\Theta)$は，必ずしも摂動の上限を与えるものではないが，許容できる摂動の大きさを評価する場合，一つの尺度になり得ることに注意されたい。そこで，$\hat{\varepsilon}(\Theta)=m(\Theta)\,(0<m(\Theta)\leq 1)$を$N_C$の構造安定度として採用する。更に，結合度$C$の$N_C$をランダムにT個構成し，各$N_C$の経路行列$\Theta_k$($1\leq k\leq T$)の正の最小要素値を$m(\Theta_k)$とする。このとき，$N_C$の平均的な構造安定度DSを，次式で定義する。

$$DS \equiv DS(M,C,V,W) \triangleq \sum_{k=1}^{T} m(\Theta_k)/T \tag{17}$$

しかしながら，式(17)のDSは，各Θ_k($1\leq k\leq T$)がすべてSIAでない限り，構造安定度としての実質的な意味はなく，単に，ランダムに構成したT個の経路行列の正の最小要素値の平均値を与えているにすぎない。従って，以下で定義する構造安定指数なる評価基準が必要となる。

C) 構造安定指数IS：N_cの構造安定性を総合的に評価するための基準として，構造安定指数ISを次式で定義する.

$$IS \equiv IS(M, C, V, W) \triangleq PS(M, C, V, W) \times DS(M, C, V, W) \quad (18)$$

尚，式(16)－(18)より次の不等式が成立する。

$$\begin{cases} 0 \leq PS \leq 1 \\ 0 < DS \leq 1 \\ 0 \leq IS \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

3-3　実験結果と考察

上記の各評価基準は，経路行列$\mathbb{H}$の次元M，結合度C，及び一様分布UD[V, W]のパラメータV, Wに依存している。そこで，本節では，PS，DS，ISのパラメータM，C，V，Wに対する依存性を，モンテカルロ計算機実験によって調べ，その結果の考察を行う。尚，使用計算機はFACOM 230－38Sであり，試行回数$T=10^3$である。

A) PS－C特性：N_cの構造安定確率PSと結合度Cとの関係を，M，V，Wをパラメータとして図2に示した。その結果，次のような事実が判明した。

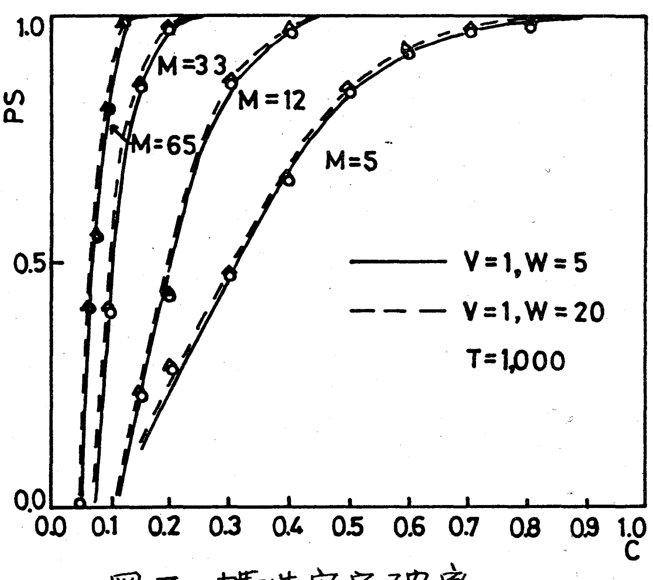


図2．構造安定確率

(i)PSはCの増加に伴って増加する。即ち，PSとCとは正の相関関係にある。

(ii)Mが大きい程，Cの増加に伴う構造不安定から構造安定への遷移は急激である。この事実からMが十分大きい場合(M>100)には，確率1で構造不安定から安定へ遷移が生じるような臨界的な結合度C_cの存在が予想される。

(iii)PSのCに対する依存性は，当然ながら，パラメータV，Wにはほとんど影響されない。

B) DS－C特性：構造安定度DSと結合度Cとの関係をM，C，V，Wをパラメータとして図3に示した。

(i)DSはCの増加に伴って単調に減少する。即ち，DSとCとは負の相関関係にある。

(ii)V，Wを固定した場合，任意の結合度Cに対してMが大きい程DSは減少する。

(iii)M，Cを固定した場合，一様分布UD[V, W]の分散$\sigma^2=(W-V)^2/12$が大きい程DSは減少する。

C) IS－C特性：構造安定指数ISと結合度Cとの関係を，M，V，Wをパ

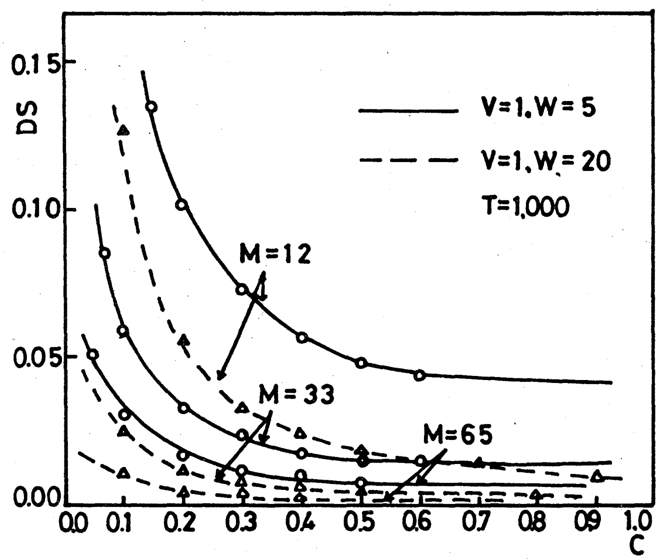


図3　構造安定指数

ラメータとし図4に示した。

(i) ISを最大にする最適な結合度 $C_0 \equiv C(M, V, W)$ が存在する。V，Wを固定した場合，C_0 及びISの最大値 $IS_{max} \triangleq IS(M, C_0, V, W)$ は，共にMの増加に伴って減少する傾向がある。

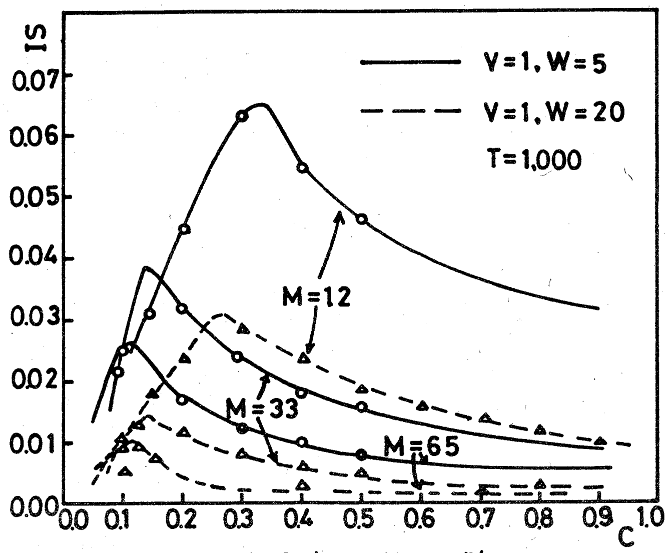


図4 構造安定指数

(ii) 最適結合度 C_0 のMに対する依存性は，パラメータV，Wの影響をほとんど受けない。

(iii) 各Mに対して，IS_{max} は一様分布UD[V, W]の分散が大きい程減少する傾向にある。

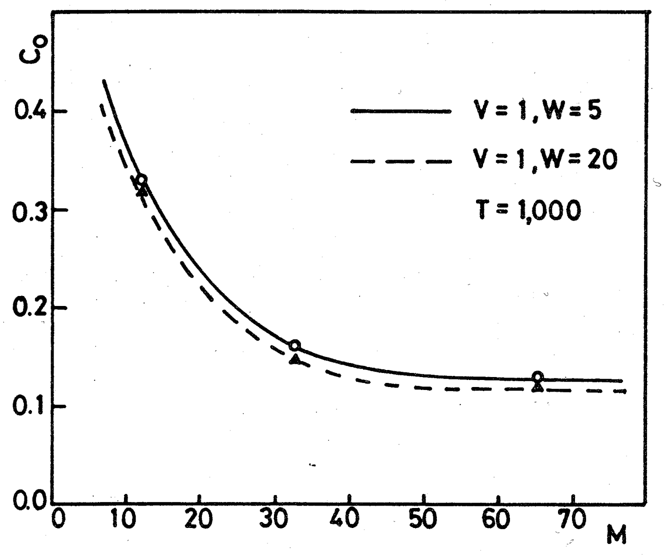


図5 最適結合度

尚，C_0－M特性，IS_{max}－M特性をV，Wをパラメータとして，それぞれ図5，図6に示した。この特性から，上述の項目(i)～(iii)がより明白に理解できる。

4　おわりに

以上，RCSの観点から[12)-15)]，CMΘN：N_c の構造の複雑度と構造

安定性との関連性について考察した。即ち，Ncの複雑度の測度として経路行列Hの結合度Cを導入し，構造安定確率PS，構造安定度DS，構造安定指数ISとC及びHの次元Mとの相関関係を調べた。

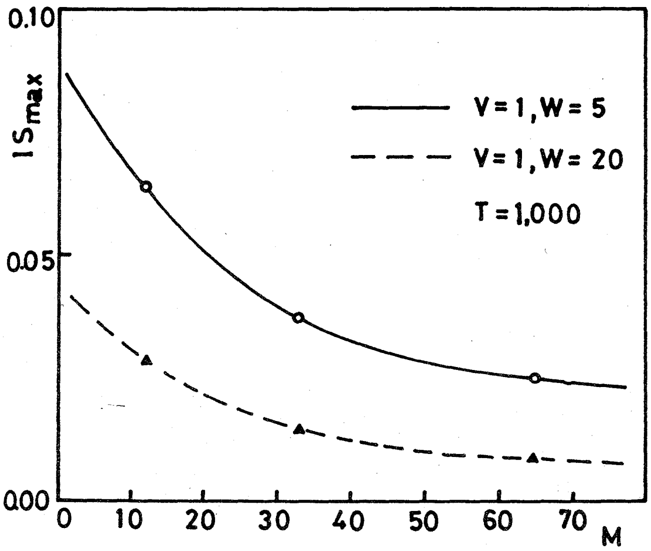


図6 最大構造安定指数

その結果，下記のような注目すべき事項が判明した。

(i) RCS $\dot{X}=AX$ の場合とは逆に，PSとCとは正の相関関係にある。これは，Hがより密に結合したNc程，PSの観点からは望しいことを意味する。更に，十分に大きいMの場合(≫100)には，確率1で構造不安定系から安定系への遷移が生じるような臨界的結合度C_cの存在が予想される。

(ii) 総合的な評価基準ISを最大化する最適結合度C_0が存在し，このC_0及び$IS_{max}=IS(C_0)$は，共にMの増加に伴って単調減少する。これは，Hが純粋にランダムに結合したNcにおいては，前者は，Ncの大規模化に伴い結合しているサービス施設数の割合が減少した方がISの観点からは望しいことを，後者は，Ncの単なる大規模化はISの観点からは望しくないことを意味する。

尚，実験結果の信頼性を高めるために，Mが充分大きい場合(>100)とか，パラメータV，Wの種々の組合せに対して計算機実験を広範に行い，更に，上記の相関関係を成立させる本質的な原因を究明するために，理論的考察を加える必要がある。又，RCS $\dot{X}=AX$では，"純粋にランダムな結合構造よりもループ構造や階層構造等の組織化された構造の方が系をより漸近安定化する"と報告されている(14)(15)。現実のシステムは何らかの組織化された構造をもつのが普通であるから，N_cに対してもこのような観点から考察を加えることは，今後の興味深い課題である。

参考文献

(1) Jackson, J. R.: "Networks of Waiting Lines", OR. 5, PP. 518-521 (1957).

(2) ___________: "Jobshop-like Queueing Systems", Manage. Sci., 10, PP. 131-142 (1963).

(3) Gordon, W. J. and Newell, G. F.: "Closed Queueing Systems with Exponential Servers", OR. 15, PP. 254-265 (1967).

(4) 橋田，川島："待ち行列ネットワークモデルによる計算機システムの性能評価"，情報処理，21, PP 743-750 (昭55-07)。

(5) Kleinrock, L.: "Queueing Systems; Vol. II. Computer Applications", John Wiley & Sons (1976).

(7) Chandy, K.M. and Reiser, M. : "Computer Performance", North-Holland (1977)

(8) 後藤, 菰田, 星子 : "バッファ共用方式によるパケット交換機の輻輳制御", 信学技報, SE79-123 (昭55-03)。

(9) Komota, Y. and Kimura, M. : "A Characterization of the Class of Structually Stable Probabilistic Automata ; Part I/II", Int. J. Systems, Sci., 9, PP. 369-394/PP. 395-424 (1978)。

(10) 後藤, 菰田, 星子 : "マルコフ的待ち行列網の構造安定性 ; I. 開放網の場合", 信学技報, SE79-75 (昭54-09)。

(11) 菰田, 星子 : "マルコフ的待ち行列網の構造安定性 ; II. 閉鎖網の場合", 信学技報, SE79-96 (昭54-12)。

(12) Gardoner, M.R. and Ashby, W. R. : "Connectance of Large Dynamic (Cybernetic) Systems ; Critical Value of Stability", Nature, 228, PP. 784 (1970)

(13) May, R. M. : "Stability and Complexity in Model Ecosystems", Primston University Press (1973)。

(14) McMurtie, R. E : "Determinants of Stability of Large Randomly Connected Systems", J. Theor., Biol., 50, PP. 1-11 (1975)。

(15) 森下, 平田, 倉田 : "線形システムの大規模化および組織化と安定性との関係", 電学論, 55, C-44, PP345-351 (昭55-10)。