

周期観測による入力規制方式の解析

日本電信電話公社 武蔵野電気通信研究所 川島 幸之助

(Konosuke Kawashima)

1. まえがき

待ち行列システムにおいて、系の状態に応じて入力を規制するモデル（到着過程の制御⁽¹⁾）を解析する。系の状態の観測時点は、従来の解析では、呼の到着・退去時点とされることが多かった⁽²⁾。本論文では、観測は周期的に行われ、その間隔は、呼の到着・退去とは独立な一般分布に従うとする。

本論文で解析するモデルは次のとおりである。複数処理装置と有限容量待ち室からなる系に2種類のポアソン呼が加わっている。これらの保留時間は同一の指数分布に従う。ケンドールの記号を援用すれば、 $M_1+M_2/M/S/K$ と記される。系の状態は、ある時間間隔（周期）ごとに観測され、次の観測時点までの制御状態が決定される。なお、2種類のポアソン呼（ポアソン流）のうち、片方を全面的に規制したり、規制しなかったりする。また、規制・規制解除は、系内呼数と、

規制・規制解除のための閾値との比較により、それぞれ行われる。いわゆるヒステリシス制御をとるものとする。

本モデルは、たとえば、通信網において定期的に回線使用状況を観測し、呼のう回を規制する方式の一モデル化である。

本モデルに関しては、既に福田⁽³⁾により解析されているが、ここでは、ポアソン呼と、到着間隔が一般分布の呼の2呼種が加わるモデル⁽⁴⁾の一応用として解析する。すなわち、到着間隔が一般分布の呼を、実体のない観測呼とする。そのほか、観測間隔が単位分布の入力規制モデルが、Yaroshevskiy⁽⁵⁾により扱われている。しかし、制御方式が異なり、かつ、安定性しか論じていない。

2. モデルの説明

モデルの概念図を図1に示す。処理装置または回線数を S 、待ち室の大きさを m とする。ここで、 $S \geq 1$ 、 $m < \infty$ である。この系に2種類のポアソン呼が加わる。それぞれ、呼[1]、呼[2]と呼ぶ。呼[i]の到着率を λ_i とする。 $(i=1, 2)$ 。保留時間

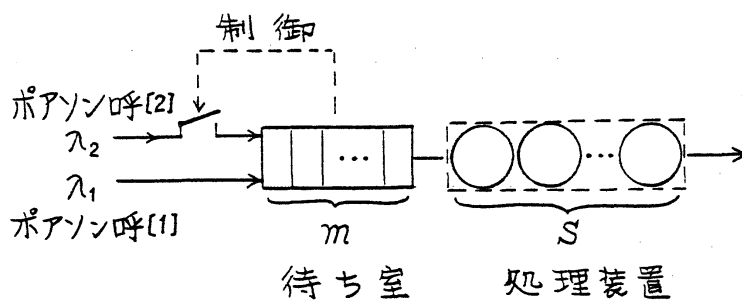


図1 モデル概念図

は、呼[1], [2]ともに平均 $1/\mu$ の指数分布に従うとする。処理は先着順に行われ、呼種による区別はない。待ち室が満員の時に到着した呼は呼損となり、系から去るとする。ここで $K = m + S$ とする。 K は系の許容呼数である。

上記のモデルにおいて、呼[2]が制御される。すなわち、周期ごとに系内呼数を観測し、あらかじめ設定された閾値との比較により、呼[2]の系への受入れを制御する。制御方法の概念図（一定間隔観測の場合）を図2に示す。

入力制御方法を次に述べる。 r 回目の観測時点をと t_r とし、観測時点での系内呼数を x_r とする。ここでの系内呼数に、呼[1], [2]の区別はない。入力制御（規制、解除）は観測時点に

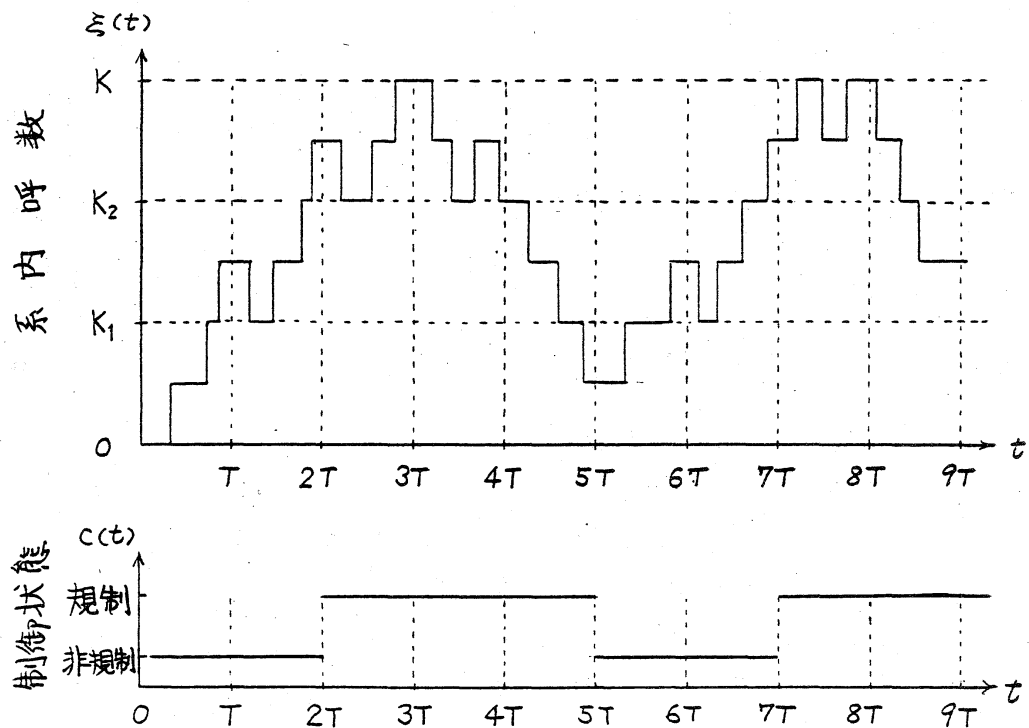


図2 系内呼数の推移と制御方法（観測間隔分布：単位分布）

決定され、その制御状態は次の観測時点まで持続される。ここで、制御状態は、非規制・規制の2状態である。

入力規制: $\xi_r > K_2$ ならば $t_r \leq t < t_{r+1}$ の間、呼[2]は規制され、呼損となる。すなわち、系への到着率は λ_1 となる。なお、 K_2 は系内呼数に関する閾値である。

規制解除: $\xi_{r-1} \geq K_1$ かつ $\xi_r < K_1$ ならば、 $t \geq t_r$ では呼[2]の受付が再開される。すなわち、系への到着率は $\lambda_1 + \lambda_2$ となる。なお、 K_1 は系内呼数に関する閾値で、 $K_1 < K_2 < K$ とする。

この制御方法では、規制と解除のための閾値、それぞれ K_2 、 K_1 に差を設ける。いわゆるヒステリシス制御とする。これは、規制と解除をいたずらに繰返すのを防ぐために効果があると考えられる。

3. 解析

系の状態を、系内呼数と制御状態によって表わす。任意時点における系内呼数を $\xi(t)$ 、制御状態を $C(t)$ とする。呼[2]が非規制中のとき $C(t) = 0$ 、規制中のとき $C(t) = 1$ とする。系の状態 $\xi(t)$ を次のように決める。

$$\xi(t) = (K+1)C(t) + \xi(t) \quad (1)$$

これにより、系の状態が1次元で表わせる。

確率過程 $\{\xi(t)\}$ は部分マルコフ過程となり、観測時点列

$\{t_r\}$ は再生点となる。再生点間、すなわち、観測間隔の分布関数を $F(x)$ 、平均を T とする。

観測時点において、系の状態が、章2で述べた入力規制方法により変化し得る。再生点（観測時点）での系の状態の推移を表わす行列（再生行列）を $\{\theta_{ij}\}$ とすれば、 θ_{ij} は次のようになる。

$$\begin{aligned} \theta_{ij} = 1; & \quad (0 \leq i \leq K_2, j = i), (K_2 + 1 \leq i \leq K, j = K + 1 + i), \\ & \quad (K + 1 \leq i \leq K + K_1, j = i - K - 1), \\ & \quad (K + 1 + K_1 \leq i \leq 2K + 1, j = i) \end{aligned} \quad (2)$$

$\theta_{ij} = 0$; 上記以外の i, j の組合せ。

ただし、 $0 \leq i \leq 2K + 1, 0 \leq j \leq 2K + 1$ 。

再生点間のマルコフ過程は、有限容量待ち室の $M/M/S/K$ モデルとなる。再生点間の推移確率を求めるには、 $M/M/S/K$ モデルの過渡解が必要となる。単一処理装置 ($S=1$) の場合には、過渡解が陽に与えられている。⁽⁶⁾ しかし、複数処理装置 ($S \geq 2$) の場合は、その過渡解は形式的に陽に与えられている⁽⁶⁾ が、具体的に数値を得るためには、固有値を数値的に決定しなければならない。⁽⁷⁾

観測時点直前の系の状態、すなわち再生点前連鎖に着目すると、その推移確率 γ_{ij} は次のようになる。式(2)に注意して、まず $0 \leq j \leq K$ に対して

$$r_{ij} = \int_0^{\infty} P_{ij}(x; \lambda_1 + \lambda_2) dF(x) ; 0 \leq i \leq K_2 \quad (3)$$

$$r_{ij} = \int_0^{\infty} P_{i-k-1, j}(x; \lambda_1 + \lambda_2) dF(x) ; K+1 \leq i \leq K+K_1$$

となる。ここで、 $P_{ij}(x; \lambda)$ は到着率が λ のときの M/M/S/K モデルの過渡解、すなわち、任意時点の系内呼数が i で、時間 x 後に系内呼数が j となる確率である。

次に、 $K+1 \leq j \leq 2K+1$ に対して

$$r_{ij} = \int_0^{\infty} P_{i, j-k-1}(x; \lambda_1) dF(x) ; K_2+1 \leq i \leq K \quad (4)$$

$$r_{ij} = \int_0^{\infty} P_{i-k-1, j-k-1}(x; \lambda_1) dF(x) ; K+1+K_1 \leq i \leq 2K+1$$

となる。なお、M/M/S/K モデルの過渡解は次式である。⁽⁶⁾

$$P_{ij}(x; \lambda) = P_j + \sum_{k=1}^K C_k(i, j) e^{\gamma_k x} \quad (5)$$

ここで、 P_j は平衡状態における状態確率、 γ_k は生成作用素の固有値、 $C_k(i, j)$ は λ, μ, γ_k を含む式である。なお、当然、 P_j, γ_k も到着率 λ に依存する。

到着率 λ が $\lambda_1 + \lambda_2$ のとき、すなわち非規制状態のときの $P_j, C_k(i, j), \gamma_k$ はそのまま使い、 λ が λ_1 のとき、すなわち規制状態のときの $P_j, C_k(i, j), \gamma_k$ は ' をつけて、それぞれ $P'_j, C'_k(i, j), \gamma'_k$ と記すことにする。

$\Phi(s)$ を観測間隔分布 $F(x)$ のラプラス・ステルチェス変換とすると、 r_{ij} は次のようになる。まず、 $0 \leq j \leq K$ に対して

$$r_{ij} = P_j + \sum_{k=1}^K C_k(i, j) \Phi(-\gamma_k) ; 0 \leq i \leq K_2 \quad (6)$$

$$r_{ij} = P_j + \sum_{k=1}^K C_k(i-k-1, j) \Phi(-\gamma_k) ; K+1 \leq i \leq K+K_1$$

次に, $K+1 \leq j \leq 2K+1$ に対して

$$r_{ij} = P'_{j-k-1} + \sum_{k=1}^K C'_k(i, j-k-1) \Phi(-\gamma'_k); K_2+1 \leq i \leq K \quad (7)$$

$$r_{ij} = P'_{j-k-1} + \sum_{k=1}^K C'_k(i-k-1, j-k-1) \Phi(-\gamma'_k); K+1+K_1 \leq i \leq 2K+1$$

となる.

とくに, 観測間隔が一定値 T のとき

$$\Phi(\Delta) = e^{-\delta T} \quad (8)$$

である. 式(6), (7)に式(8)を代入すれば r_{ij} が決まる.

観測時点直前の系の状態が j である確率を π_j^* とする. すなわち $\pi_j^* = \text{Prob}\{\zeta(t_r^-) = j\}$ とすれば, π_j^* は次の連立方程式より一意的に決定される.

$$\pi_j^* = \sum_{k=0}^{2K+1} \pi_k^* r_{kj} \quad ; \quad 0 \leq j \leq 2K+1 \quad (9)$$

$$\sum_{k=0}^{2K+1} \pi_k^* = 1 \quad (\text{規格化条件})$$

式(9)の第一式中の任意の一つを第二式で置き換える. この連立方程式は陽には解けないので, 通常の数値解法により数値的に解くことにする.

次に観測時点間の状態確率を解析する. 観測時点直前の状態確率の解析には, 系内呼数と制御状態を総合して, 状態を1次元に並べた. しかし, 以後の解析では, 考えやすさのため, 2次元の状態を考える. すなわち, 系内呼数 i と制御状態 j の対 (i, j) で状態を表わす. ここで, $0 \leq i \leq K$, $j = 0$ または 1 である. $j = 0, 1$ はそれぞれ非規制, 規制状態を

表わす。観測時点直前の状態確率を π_k^* から π_{ij} におき直す。
 (k) と (i, j) の対応は次式でなされる。

$$\begin{aligned} j &= [k / (K+1)] \\ i &= k - (K+1)j \end{aligned} \quad (10)$$

ただし, $[x]$ は x を越えない最大の整数を表わす。

任意時点における平衡状態確率を q_{ij} とする。簡単のため、
 次の記号を導入する。

$$\lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (11)$$

$$\delta_{ij} = 1 \quad (i=j), \quad = 0 \quad (i \neq j), \quad \text{クロネッカーの} \delta \quad (12)$$

$$\bar{\delta}_{ij} = 1 - \delta_{ij}$$

部分マルコフ過程における率保存原理^{(8), (9)}より, 次の状態
 方程式が成立つ。 j の範囲は $j=0, 1$ である。

$$\begin{aligned} &\{\lambda_j + \min(i, S)\mu\} q_{ij} + \delta_{j1} \pi_{i1} / T \\ &= \bar{\delta}_{i0} \lambda_j q_{i-1, j} + \min(i+1, S)\mu q_{i+1, j} + \delta_{j0} \pi_{i1} / T \\ & \quad 0 \leq i \leq K_1 - 1 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\{\lambda_j + \min(i, S)\mu\} q_{ij} = \lambda_j q_{i-1, j} + \min(i+1, S)\mu q_{i+1, j} \\ & \quad K_1 \leq i \leq K_2 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &\{\bar{\delta}_{iK} \lambda_j + \min(i, S)\mu\} q_{ij} + \delta_{j0} \pi_{i0} / T \\ &= \lambda_j q_{i-1, j} + \min(i+1, S)\mu q_{i+1, j} + \delta_{j1} \pi_{i0} / T \\ & \quad K_2 + 1 \leq i \leq K \end{aligned} \quad (15)$$

この状態方程式の解を求めるにあたり, 次の記号を導入する。

$$a_0 = \lambda_0 / \mu, \quad a_1 = \lambda_1 / \mu, \quad b = 1 / (\mu T) \quad (16)$$

まず, $j=0$ (非規制状態) について考える. 式(13), (14), (15)を変形して, それぞれ次の漸化式が得られる.

$$q_{i0} = \{a_0 q_{i-1,0} - b \sum_{k=0}^{i-1} \pi_{k1}\} / \min(i, S); \quad 1 \leq i \leq K_1 \quad (17)$$

$$q_{i0} = \{a_0 q_{i-1,0} + \min(K_1, S) q_{K_1,0} - a_0 q_{K_1-1,0}\} / \min(i, S) \\ K_1+1 \leq i \leq K_2+1 \quad (18)$$

$$q_{i0} = \{a_0 q_{i-1,0} + \min(K_2+1, S) q_{K_2+1,0} - a_0 q_{K_2,0} \\ + b \sum_{k=K_2+1}^{i-1} \pi_{k0}\} / \min(i, S); \quad K_2+2 \leq i \leq K \quad (19)$$

同様に, $j=1$ (規制状態) に対して次の漸化式が得られる.

$$q_{i1} = \{a_1 q_{i-1,1} + b \sum_{k=0}^{i-1} \pi_{k1}\} / \min(i, S); \quad 1 \leq i \leq K_1 \quad (20)$$

$$q_{i1} = \{a_1 q_{i-1,1} + \min(K_1, S) q_{K_1,1} - a_1 q_{K_1-1,1}\} / \min(i, S) \\ K_1+1 \leq i \leq K_2+1 \quad (21)$$

$$q_{i1} = \{a_1 q_{i-1,1} + \min(K_2+1, S) q_{K_2+1,1} - a_1 q_{K_2,0} \\ - b \sum_{k=K_2+1}^{i-1} \pi_{k0}\} / \min(i, S); \quad K_2+2 \leq i \leq K \quad (22)$$

式(13)~(15)の状態方程式よりわかるように, 状態確率 $\{q_{i0}\}$ と $\{q_{i1}\}$ の間の関係式は, これらには含まれていない. すなわち, $\{q_{i0}\}$ と $\{q_{i1}\}$ は独立に解くことができる. ところで, 系が規制中の状態にある率, 規制率 P_I は, 観測時点の状態確率より次式で得られる.

$$P_I = \sum_{i=0}^K \pi_{i1} \quad (23)$$

観測時点間では、系の制御状態に変化はなく、観測間隔は互いに独立であるから

$$\sum_{i=0}^K q_{i1} = P_I \quad (24)$$

である。また、非規制中の状態に関して次式が成立つ。

$$\sum_{i=0}^K q_{i0} = \sum_{i=0}^K \pi_{i0} = 1 - P_I \quad (25)$$

まず、状態確率 $\{q_{i0}\}$ を、漸化的に求める。式(17)~(19)より、 $\{q_{i0}\}$ は q_{00} をもとにして表わすことができる。すなわち、

$$q_{i0} = d_i q_{00} + C_i \quad ; \quad 0 \leq i \leq K \quad (26)$$

と置くことができる。ここで、 C_i 、 d_i は π_{ij} 等によって表わせる。式(26)を、式(17)~(19)に代入することにより、 C_i 、 d_i に関する漸化式が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 0 \\ d_0 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} C_i &= \{a_0 C_{i-1} - b \sum_{k=0}^{i-1} \pi_{k1}\} / \min(i, S) \\ d_i &= a_0 d_{i-1} / \min(i, S) \end{aligned} \right\} \quad 1 \leq i \leq K_1 \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} C_i &= \{a_0 (C_{i-1} - C_{K_1-1}) + \min(K_1, S) C_{K_1}\} / \min(i, S) \\ d_i &= \{a_0 (d_{i-1} - d_{K_1-1}) + \min(K_1, S) d_{K_1}\} / \min(i, S) \end{aligned} \right\}$$

$$K_1 + 1 \leq i \leq K_2 + 1 \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} C_i &= \{a_0 (C_{i-1} - C_{K_2}) + \min(K_2 + 1, S) C_{K_2 + 1} + b \sum_{k=0}^{i-1} \pi_{k0}\} / \min(i, S) \\ d_i &= \{a_0 (d_{i-1} - d_{K_2}) + \min(K_2 + 1, S) d_{K_2 + 1}\} / \min(i, S) \end{aligned} \right\}$$

$$K_2 + 2 \leq i \leq K \quad (30)$$

式 (26) より

$$\sum_{i=0}^K q_{i0} = q_{00} \sum_{i=0}^K d_i + \sum_{i=0}^K C_i$$

であるから, q_{00} が次式により求められる.

$$q_{00} = \{ \sum_{i=0}^K \pi_{i0} - \sum_{i=0}^K C_i \} / \sum_{i=0}^K d_i \quad (31)$$

これによって, $\{q_{i0}\}; 0 \leq i \leq K$ がすべて定められる.

状態確率 $\{q_{i1}\}$ も, 全く同様にして得られる. すなわち,

$$q_{i1} = d'_i q_{01} + C'_i \quad ; \quad 0 \leq i \leq K \quad (32)$$

とおくと, q_{01} は次式で求められる.

$$q_{01} = \{ \sum_{i=0}^K \pi_{i1} - \sum_{i=0}^K C'_i \} / \sum_{i=0}^K d'_i \quad (33)$$

ここで, C'_i, d'_i は式 (27) ~ (30) とほとんど"同様にして求められる. 次に変更点のみ記す. a_0 は a_1 に置き換える. 式 (28) の第一式の Σ の項は + とする. 式 (30) の第一式の Σ の項は - とする. これによって, $\{q_{i1}\}; 0 \leq i \leq K$ がすべて定まる.

以上で, 観測時点直前の状態確率 $\{\pi_{ij}\}$, 任意時点の状態確率 $\{q_{ij}\}$ がすべて定まったことになる.

次に, これらを用いて, 系の評価尺度を求める.

(i) 規制率 (系が規制中の状態にある確率): P_I (式 (23))

(ii) 呼[1]の呼損率: P_{L1}

$$P_{L1} = q_{K0} + q_{K1}$$

(iii) 呼[2]の呼損率 (規制状態に遭遇した呼は呼損): P_{L2}

$$P_{L2} = q_{K0} + P_I$$

(iv) 規制頻度* (単位時間あたりの規制発動回数): R_I

$$R_I = \sum_{i=K_2+1}^K \pi_{i0} / T$$

(v) 規制解除頻度*: R_F

$$R_F = \sum_{i=0}^{K_1-1} \pi_{i1} / T$$

(vi) 呼[i]の平均待ち時間: W_i ($i=1, 2$)

処理された呼の待ち時間とする。処理規律は、呼種を区別しない先着順 (FIFO) 処理とする。

$$W_1 = \sum_{i=0}^{K-1} (i-S+1)(q_{i0} + q_{i1}) / \{S\mu(1-P_{L1})\}$$

$$W_2 = \sum_{i=S}^{K-1} (i-S+1)q_{i0} / \{S\mu(1-P_{L2})\}$$

(vii) 処理装置の平均使用率: U

$$U = \{ \sum_{i=1}^S i(q_{i0} + q_{i1}) + S \sum_{i=S+1}^K (q_{i0} + q_{i1}) \} / S$$

4. 数値例

数値計算例においては、次のパラメータを設定する。

$$S=1, K=11 (m=10), K_2=9, K_1=6, \lambda_1=0.5, \mu=1$$

観測間隔が単位分布に従うモデル、指数分布に従うモデル**

* ヒステリシス制御モデル (系内呼数変化時制御 (連続観測)) について、これらを論じたものとして、文献(2), (10), (11)等がある。ただし、文献(10)では、規制そのものはモデル化しないで、規制/非規制に対応する状態を考えているのみである。

** 式(8)で $\Phi(\Delta) = 1/(1+\Delta T)$ とおけばよい。なお、別の方法で数値計算を行い、結果が一致することを確認している。

及び連続観測のモデルの結果を比較して示す。グラフでは、単位分布モデル、指数分布モデル及び連続観測モデルの結果をそれぞれ実線、破線、一点鎖線で示す。

図3～6に、 λ_2 の変化に対する各評価尺度を示す。観測間隔の平均値は $T=1$ とする。図3、4より、呼[2]の規制率の大きい方が、呼[1]の呼損率が小さいことがわかる。呼[1]の呼損率は、連続観測の場合が最も小さい。図5より、呼[2]の呼損率は、観測方式によらずに、ほぼ等しいことがわかる。しかし、規制率には方式によって差がみられる。呼[2]に関しては、呼損率と規制率の差が小さい方が望ましい。すなわち、呼損になるならば、規制によって呼損になる方が良い。その意味で、 T が同一ならば、観測間隔分布は単位分布の方が指数分布よりも良いといえる。なお、このときの制御頻度（平均保留時間を単位時間とする）を図6に示す。

図7～9に、観測間隔の平均値 T の変化に対する各評価尺度を示す。 $\lambda_2=1.0$ とする。なお、連続観測モデルの値は、 $T=0$ に対する値としてプロットした。図7より、観測間隔が長いほど、呼[1]の呼損率が大きい。また、図8より、観測間隔が長い方が呼[2]の規制率は小さい。しかし、呼[2]の呼損率は観測間隔に対して最小となる値が存在し、観測間隔が長いほど大きくなる。制御頻度を図9に示す。

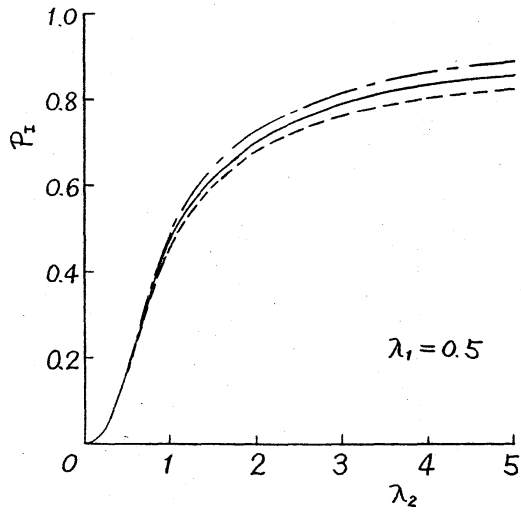
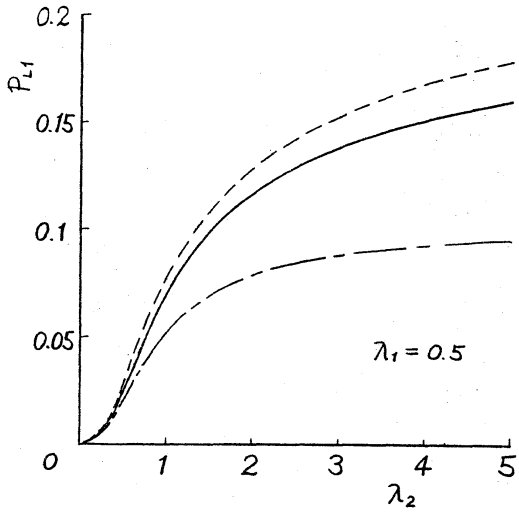


図3 呼[1]の呼損率

図4 呼[2]の規制率

(——) 単位分布間隔観測
 (---) 指数分布間隔観測
 (-.-) 連続観測

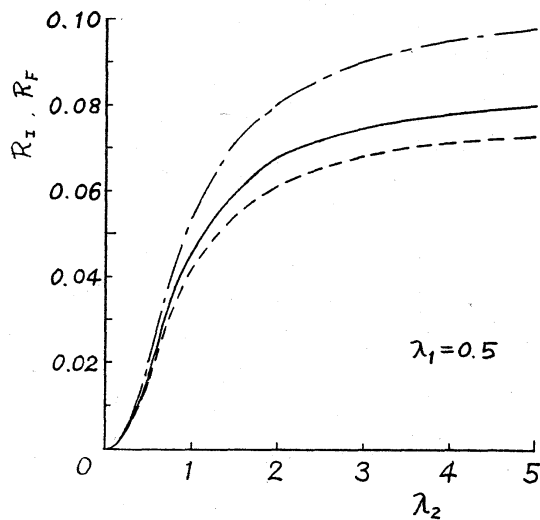
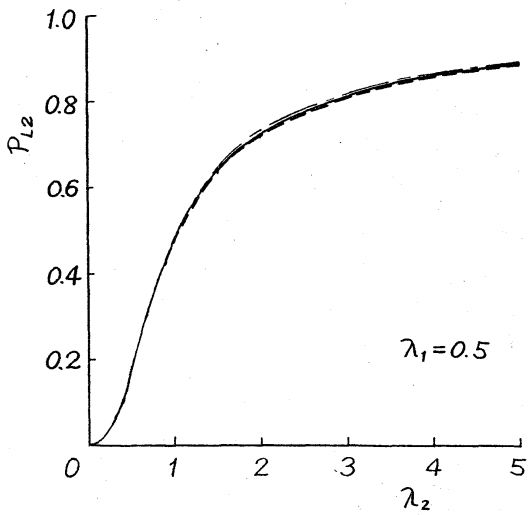


図5 呼[2]の呼損率

図6 制御頻度

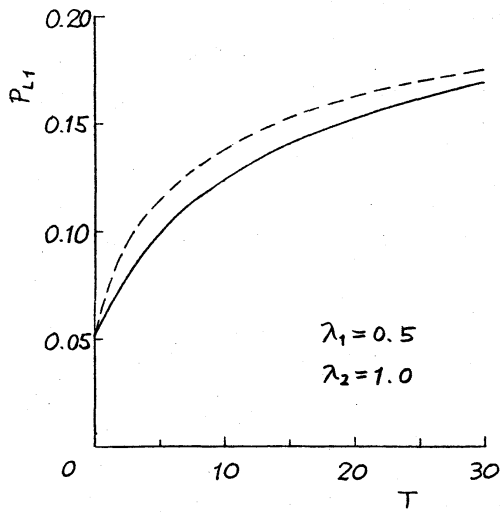


図7 呼[1]の呼損率

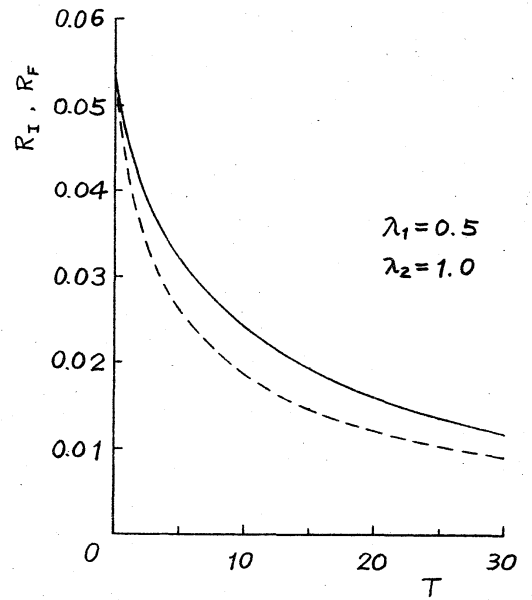


図9 制御頻度

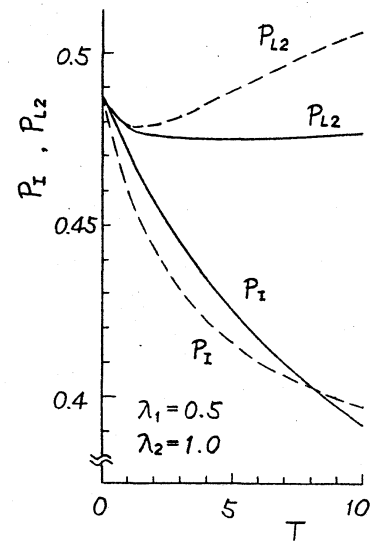
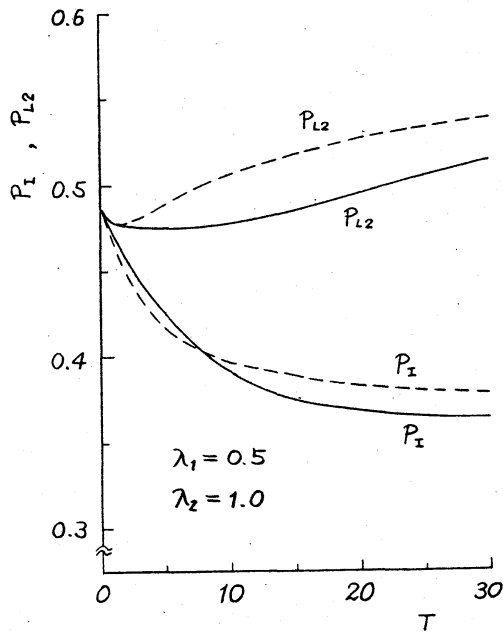


図8 呼[2]の規制率と呼損率

5. むすび

通信網の輻輳制御の基本である入力規制方式に関して、観測・制御が系の状態とは独立な一般分布周期でなされるモデルを解析した。対象モデルは、2ポアソン入力のマルコフ形モデル $M_1 + M_2 / M / S / K$ において、片方のポアソン入力を系の状態に応じて規制・規制解除するモデルである。

単一処理装置 ($S=1$) の場合について数値計算を行い、観測間隔が単位分布・指数分布の場合、及び連続観測の場合を比較して図示した。

観測間隔あるいは規制・規制解除それぞれの閾値等の最適化問題については全く触れなかった。しかし、本論文で得られた個別の評価尺度をもとに、コスト係数の導入により評価関数を作れば、最適化が可能であろう。

本論文からの発展モデルとして、以下があげられる。

- (i) 規制と規制解除で観測間隔(分布・平均)の異なるモデル。
- (ii) ポアソン入力数が3以上のモデル。(これは、多段階規制モデルであり、より現実に近いと考えられる。)

なお、過渡解の解析は、数値解析により可能であろう。

謝辞 研究集会において、貴重な御意見を頂いた、京都大学・大野助教授、東京理科大学・宮沢助教授、及び国際電信電話(株)研究所・渡辺 裕博士に感謝する。

参考文献

- (1) 大野勝久：“待ち行列システムの最適制御”，数理解析研究所講究録 425, pp.106-127(1981).
- (2) Scott, M.: "A queueing process with some discrimination", Management Science, vol.16, no.3, pp.227-233(1969).
- (3) 福田晃：“M/M/S(m)モデルにおける入呼規制の解析”，電子通信学会技術研究報告, SE81-102(1982.2).
- (4) 川島幸之助：“有限容量待ち室の混合入力モデルの解析とその応用”，電子通信学会論文誌(B), vol.J65-B, no.5, pp.523-530(1982.5).
- (5) Yaroshevskiy, V. Y.: "A problem in the theory of queueing with control", Engineering Cybernetics, vol.17, no.6, pp.57-60(1979).
- (6) Riordan, J.: "Stochastic Service Systems", John Wiley, New York(1962).
- (7) Machihara, F.: "Transition probabilities of Markovian service system and their application", Review of the Electrical Communication Laboratories, vol.29, nos.3-4, pp.170-188(1981).
- (8) Kuczura, A.: "Piecewise Markov processes", SIAM Jour. Appl. Math., vol.24, no.2, pp.169-181(1973).
- (9) 藤木, 雁部：“通信トラヒック理論”，丸善（昭55）.
- (10) Déjean, J. H. and Grandjean, Ch.; "Transitions in the occupation condition of a group of switches", Electrical Communication, vol.42, no.2, pp.261-269(1967).
- (11) Matsumoto, J. and Mori, H.: "Flow control in packet-switched networks by gradual restrictions of virtual calls", IEEE Trans. on Communications, vol.COM-29, no.4, pp.466-473(1981).