

## 分散処理網における遅延解析

岩手大・工・情報 吉岡 良雄

(Yoshio Yoshioka)

### 1. まえがき

計算機網などの分散処理網は、待ち行列網として解析されている。このような網の遅延解析は、各ノードでのメッセージパケットの経路決定（ルーティング）が、非常に大きな要因となっている。ここでは、分散処理網について、種々のルーティングを考えた遅延解析手法を提示する。

### 2. 分散処理網の設定とモデル化

分散処理網は、一般的に図1に示されるようになる。ここで、 $\lambda_i$  は源ノードが  $i$ 、目的地ノードが  $j$  のパケットが単位時間に網外から流入するパケット数を示す。また、各回線のトラヒックは、最適状態にあり、かつ網全体のスルーポイントが最大になると考えれば、単位時間に各回線に流れるトラヒックは、均一化される。このトラヒックを  $\lambda^*$  とおく。一

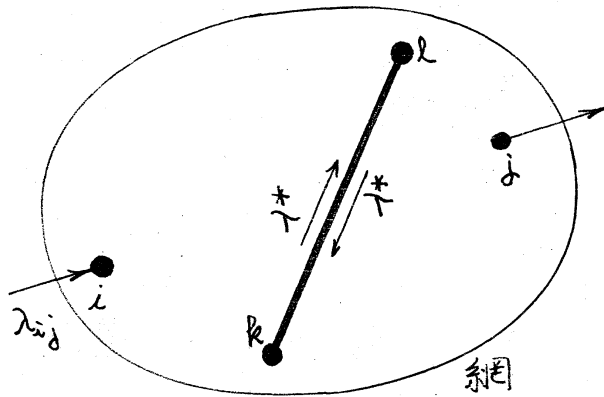


図1. 分散処理網

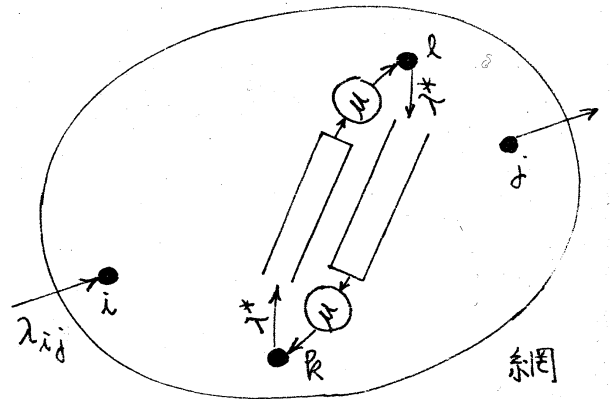


図2. 分散処理網のモデル化

方、このモデル化は、ジャクソンの待ち行列網として考えることもできるが、ここでは図2のように考える。各回線は双方向の待ち行列とし、その処理率を $\mu$ とおく。さらに、この待ち行列は、議論展開を容易にするため、 $M/M/1$ 待ち行列と考える。また、 $P_{kl}(\lambda_{ij})$ を、 $i$ から $j$ へのパケットが回線 $k-l$  ( $k$ から $l$ へ)を通る確率とおけば、 $\lambda^*$ は次式で与えられる。

$$\lambda^* = \sum_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \cdot P_{kl}(\lambda_{ij}) \quad (< \mu) \quad (1)$$

この確率 $P_{kl}(\lambda_{ij})$ は、ルーティングによって決まる値である。

### 3. 遅延解析手法

まず、待ち行列システムにおける遅延分布について考える。遅延時間分布の密度関数を  $d(x)$ 、サービス時間分布の密度関数を  $b(x)$ 、サービス中に注目する客の到着時点からの残りのサービス時間分布の密度関数を  $b^*(x)$  とおく。系内容数  $k$  に対する存在確率を  $S_k$  とおけば、次の関係式を得る。

$$d^*(0) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k \cdot \{b^*(0)\}^k \cdot \{b^*(0)\} + S_0 \cdot b^*(0) \quad (2)$$

ここで、 $d^*(0)$ 、 $b^*(0)$ 、 $b^{v*}(0)$  は、 $d(x)$ 、 $b(x)$ 、 $b^v(x)$  のラプラス変換表示である。

M/M/1 待ち行列システムでは、

$$S_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \quad (3)$$

$$b^*(0) = b^{v*}(0) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad (4)$$

であるから、 $d^*(0)$  は次式で与えられる。

$$d^*(0) = \frac{(\mu - \lambda)}{\lambda + (\mu - \lambda)} \quad (5)$$

これをラプラス逆変換すれば、次式となる。

$$d(x) = (\mu - \lambda) e^{-(\mu - \lambda)x} \quad (6)$$

この結果を利用して、分散処理網における遅延分布を考える。  
ルーティング手法には種々考えられるが、ここでは遅延時間最小を考慮した場合 (3.1)、固定ルーティングの場合 (3.2)、電気回路対応による場合 (3.3)、その他 (3.4) について、その遅延時間の解析を行う。

### 3.1 遅延時間最小を考慮した場合

分散処理網における網内経路は、図3に示されるようになるであろう。図において、経路  $m$  が  $\rho_m$  入り、 $\lambda_{ij}$  からなる。といるとすれば、その遅延時間分布  $D_{ij}^{(\rho_m)}(x)$  は、 $\rho_m$  次のアーロン分布となり、その密度関数  $d_{ij}^{(\rho_m)}(x)$  は、次式で与えられる。

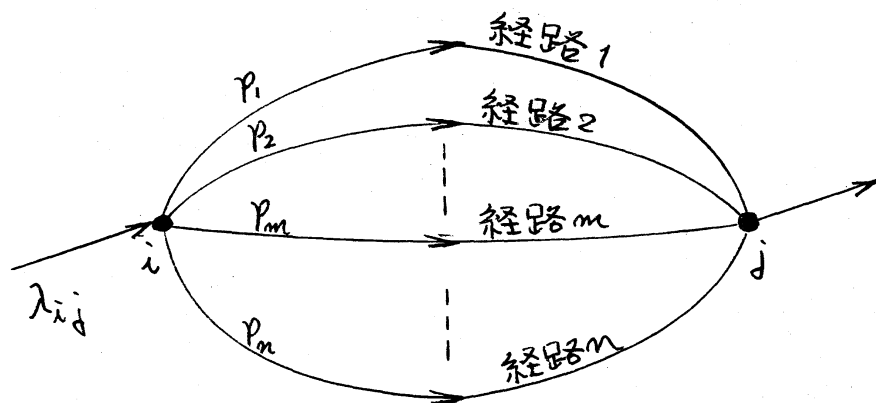


図3 網内経路

$$d_{ij}^{(r_m)}(x) = \frac{(\mu - \lambda^*)^{r_m}}{(r_m - 1)!} \cdot x^{r_m - 1} \cdot e^{-(\mu - \lambda^*)x} \quad (7)$$

従って、 $i$  から  $j$  へのノットの遅延時間分布  $D_{ij}(z)$  の密度関数  $d_{ij}(z)$  は、次式で与えられる。

$$d_{ij}(z) = \sum_{m=1}^n d_{ij}^{(r_m)}(z) \cdot \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n [1 - D_{ij}^{(r_s)}(z)] \quad (8)$$

また、各経路を通る確率  $p_1, p_2, \dots, p_m$  は、次式となる。

$$p_m = \int_0^{\infty} d_{ij}^{(r_m)}(x) \cdot \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n [1 - D_{ij}^{(r_s)}(x)] dx \quad (9)$$

上記の議論を完全グラフに適用してみよう。

網が完全グラフの場合、経路は種々考えられるが、議論を簡単にするため、3ステップ以上の経路を考えないものとする。このとき、経路は図4に示されるようになる。従って、密度関数  $d_{ij}(z)$ 、平均遅延時間  $\bar{z}$  および確率  $(p_1, p_2, \dots, p_{N-1})$  は、それぞれ次式で与えられる。

$$d_{ij}(z) = [p_1 + (N-2)p_2(\mu - \lambda^*)z] (\mu - \lambda^*) e^{-(\mu - \lambda^*)z} \quad (10)$$

$$\bar{z} = [p_1 + 2(N-2)p_2] \frac{1}{\mu - \lambda^*} \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} p_1 &= \int_0^{\infty} d_{xj}^{(1)}(x) [1 - D_{xj}^{(2)}(x)]^{N-2} dx \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-j-1} \cdot j!} \\ p_2 &= p_3 = \dots = p_{N-1} = \frac{1}{N-2} (1 - p_1) \end{aligned} \right. \quad (12)$$

また、ノード数  $N$  に対して、式(11)を求めれば、表1のようになる。

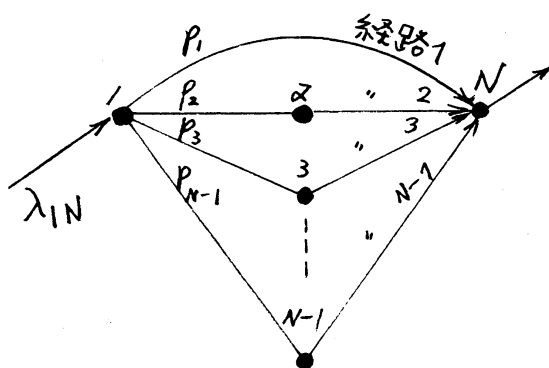


図4. 完全グラフの場合の経路

表1. 完全グラフの場合の確率

	$p_1$	$p_2 = p_3 = \dots = p_{N-1}$
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{17}{27}$	$\frac{5}{27}$
5	$\frac{71}{128}$	$\frac{19}{128}$
6	$\frac{1569}{3125}$	$\frac{389}{3125}$
7	$\frac{2157}{5832}$	$\frac{735}{5832}$
8	$\frac{355081}{823543}$	$\frac{78077}{823543}$

### 3.2 固定ルーティングの場合

ゲータフローのように処理順序が固定されている場合、ゲータの経路は固定である。従って、図3に示す確率 $p_1, p_2, \dots, p_m$ は固定であり、密度関数 $d_{ij}(z)$ およびその平均 $\bar{z}$ は次式で与えられる。

$$d_{ij}(z) = \sum_{m=1}^m p_m \cdot d_{ij}^{(r_m)}(z) \quad (13)$$

$$\bar{z} = \sum_{m=1}^m p_m \cdot \frac{r_m}{\mu - \lambda^*} \quad (14)$$

### 3.3 電気回路網対応の場合

電気回路は、非常に効率よく電流が流れており、その理論もまとま、た美しい形になっている。従って、分散処理網を電気回路網に対応して考えることができれば、非常に考え易くなる。しかしながら、その対応関係は正しく行われなければならぬ。文献[2]では、表2に示す関係を用いている。詳細については、文献[2]を参照されたい。また、情報の量 $Q$ を $\lambda_{ij} \cdot P_{kl}(\lambda_{ij})$ と置換えれば、新たな対応関係が得られる。

一方、計算機網の解析には、パワーと呼ばれる評価量を用いられている。この物理的意味を待ち行列システムと電気回

表2, 分散処理網と電気回路網との対応関係

分散処理網	←→	電気回路網
遅延時間 $T$	←→	電圧 $V$
情報の量 $Q$	←→	電流 $I$
実効速度 $v^*$	←→	コンダクタンス $G$
損失 $QT$	←→	電力 $P$

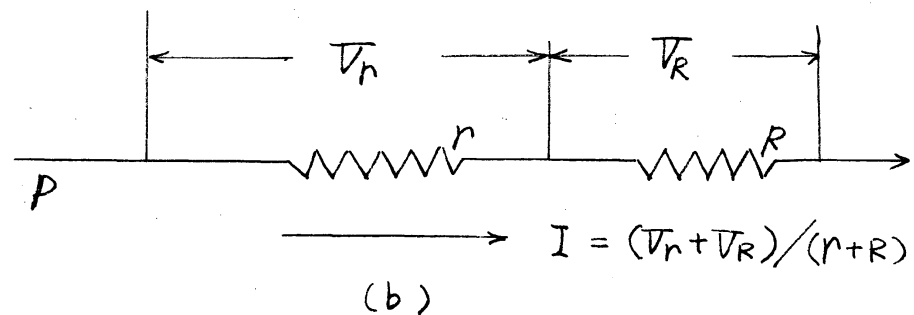
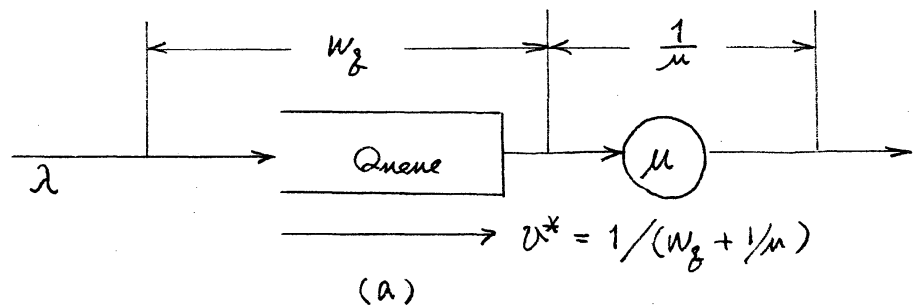


図5 待ち行列 (a) と電気回路 (b) との対応関係

路との対応関係で示すならば, 図5および表3のようになる  
 [3]。従って, 図3の経路を図6に示すような電気回路と考え  
 られ, 次の関係式を得る。



表3 待ち行列と電気回路の対応関係

待ち行列	↔	電気回路
到着率 $\lambda$	↔	電力 $P$
$\lambda$ 人の処理時間 $\lambda \frac{1}{\mu}$	↔	$R$ の電圧 $V_R$
$\lambda$ 人の待ち時間 $\lambda W_g$	↔	$r$ の電圧 $V_r$
実効速度 $v^*$	↔	電流 $I$
パワー - $\lambda \frac{1}{\mu} v^*$	↔	有効電力 $V_R I$

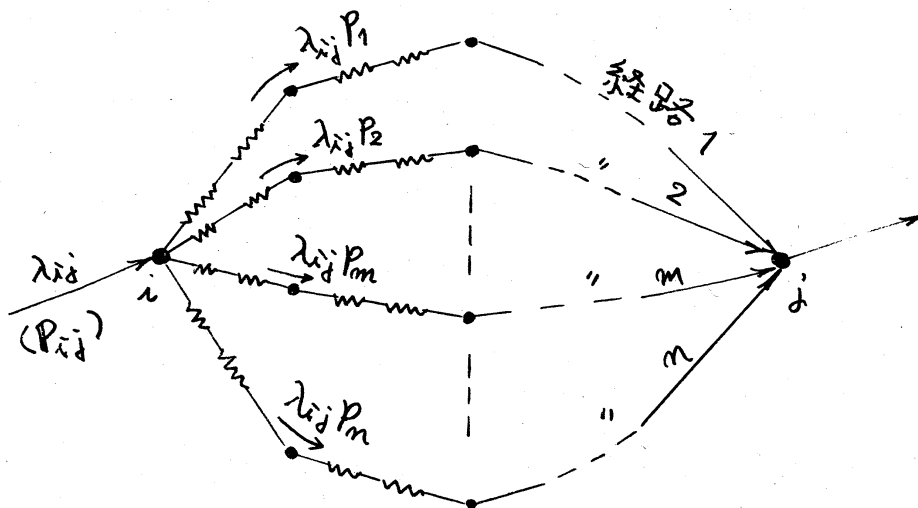


図6 分散処理網を電気回路網に対応して考えた場合

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} P_1 r_1 (W_g + \frac{1}{\mu}) &= \lambda_{ij} P_2 r_2 (W_g + \frac{1}{\mu}) = \dots \\ &= \lambda_{ij} P_m r_m (W_g + \frac{1}{\mu}) = \dots = \lambda_{ij} P_m r_m (W_g + \frac{1}{\mu}) \quad (15) \end{aligned}$$

これから次式を得る。

$$P_1 r_1 = P_2 r_2 = \dots = P_m r_m = \dots = P_m r_m \quad (16)$$

さらに,  $P_1 + P_2 + \dots + P_m = 1$  から, 次式が得られる。

$$P_m = \frac{1}{r_m} / \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_m} + \dots + \frac{1}{r_n} \right) \quad (17)$$

ただし,  $r_m$  は, 経路  $m$  のスラック数である。

また, 網全体で消費する電力は, 回線容量が決められているので固定とおき, 網全体に流入する電力ができるだけ大きくなるように確率  $P_m$  を決めれば, 不必要な経路がなくなる。具体的には, 各回線において式 (1) の  $\lambda^*$  を固定として,  $\lambda_{ij}$  をできるだけ大きくするようにすればよい。例えば, 図7に示すようなノード数4からなる網を考えた場合, 1回線の  $\lambda^*$  は, 次式となる。ただし,  $\lambda_{ij} = \lambda$  (各  $i, j$  について同じ) とおく。

$$\lambda^* = (P_1 + 4P_2 + 2P_3) \cdot \lambda \quad (\text{固定}) \quad (18)$$

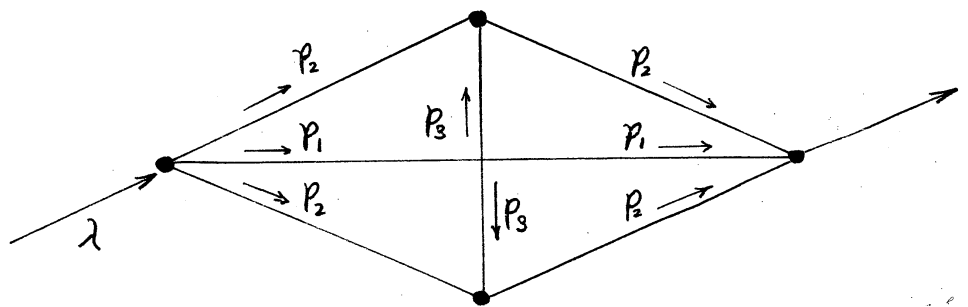


図7. ノード数4からなる網

ここで、 $P_3 = 0$  とおけば、 $\lambda$  は大きくなる。しかし、 $\lambda$  が最大になるのは  $P_1 = 1, P_2 = P_3 = 0$  のときである。分散処理網を考えているから、この場合を考える必要はないと思う。

この場合の遅延時間分布および平均遅延時間は、式(13)および(14)で与えられる。

### 3.4 その他

3.3の方法は、計算機網などの設計において、非常に有用であると思われるが、実際の分散処理網では、3.3のような効率の良い流れは起こらないであろう。そこで、各ノードが独立に（他ノードから情報を得ずに）ルーティングを行う場合を考えてみよう。この場合は、何度も同じ回線を通るといふ状態があり、最悪の状態である。この場合の例として、具体的に完全グラフの網を取りあげ検討する。

完全グラフにおいて、任意のノード間  $(i, j)$  の経路は、図4のようにとることができる。そして、中継ノード  $k$  に10ケットが転送された場合、ノード間  $(k, j)$  の経路も、図4に示す経路となる。任意のノード間  $(i, j)$  の経路において、 $i$  から  $j$  へ直接転送される確率を  $P_1$  とおけば、 $P_2 = P_3 = \dots = P_{N-1} = (1 - P_1) / (N - 2)$  となり、遅延時間分布の密度関数および平均遅延時間は、それぞれ次式となる。

$$d_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p_1)^k \cdot p_1 \cdot d_{ij}^{(k+1)}(z) \quad (19)$$

$$\bar{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{\mu-\lambda^*} (1-p_1)^k \cdot p_1 = \frac{1}{p_1(\mu-\lambda^*)} \quad (20)$$

ここで、3.3の式(17)を使用すれば、 $p_1 = 2/N$ ,  $p_2 = p_3 = \dots = p_{N-1} = 1/N$  であるから、

$$\bar{z} = \frac{N}{2(\mu-\lambda^*)} \quad (21)$$

となる。3.3の方法で行う場合

$$\bar{z} = \frac{2(N-1)}{N(\mu-\lambda^*)} \quad (22)$$

であるから、 $N^2/4(N-1)$  倍悪くなることが分かる。

また、式(1)は、次式となる。ただし  $\lambda_{ij} = \lambda$  (各辺について同じ) とおく。

$$\lambda^* = \frac{1}{p_1} \lambda = \frac{N}{2} \lambda \quad (23)$$

以上、ルーティングを考慮して、分散処理網の遅延を議論

した。なかでも、式(1)が具体的な形で与えられれば、各回線における最適化(待ち行列の最適化<sup>[4]</sup>)を考えることによつて、網の設計ができる。従つて、分散処理網の設計という立場から、式(1)が容易に求められる3.3の電気回路網への対応による方法を提案する。

#### 4. まとめ

分散処理網において、ルーティングを考慮してその遅延を議論した。この遅延解析においては、ルーティングが非常に大きな要因となり、困難な面がある。そこで、分散処理網を、効率よく電流が流れる電気回路網に対応して考えることによつて、その遅延解析が容易に行える。従つて、電気回路網への対応による方法を提案する。

#### [文献]

- [1] B.W. Boehm and R.L. Mobley: "Adaptive routing techniques for distributed communications systems," IEEE, Trans. on Commun. COM-17, 3, pp. 340~349, (June 1969).
- [2] 吉岡, 中村, 佐藤: "電気回路網への対応による計算機網の構成," 信学論(A), J59-A, 10, pp. 816~822,

(昭51-10).

[3] 吉岡, 中村, 重井: "計算機網における1107-の物理的意味について," 信学論(D), J65-D, 11, PP 1459~1460, (昭57-11).

[4] 吉岡, 中村, 佐藤: "待ち行列の最適化について," 信学論(B), J60-B, 8, PP. 590~591, (昭52-08).