数理解析研究所講究録
491巻 1983年 71-86

BMOについて（Jonesの考え方とその応用）

東北大教養　内山明人　（Akihito Uchiyama）

1. 導入.

1972年のC. Fefferman - E.M. Stein の論文［6］以来，BMOについては多くの研究がなされて来た。特に最近では，1次元の場合についての，P.W. Jones による新しい角度からのアプローチが注目を集めている。本論では Jones の考え方を私なりに解釈しなおして紹介し，若干の拡張を試みる。Jones の結果及び考え方そのものについては，文献［11］を是非参照されたい。

定義1.1. $f \in L^1_{loc}(R^n)$ に対し

$$\|f\|_{BMO} = \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - f_I|\, dx ,$$

但し，$f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f(x)\, dx ,$

sup は R^n 内のすべての n 次元立方体 I についてとるものとする。

$$BMO(R^n) = \{ f \in L^1_{loc}(R^n) : \|f\|_{BMO} < +\infty \}.$$

定義 1.2. $f \in L^2(R^1)$ に対し

$$Hf = (-i(\operatorname{sign}\xi)\hat{f}(\xi))^\vee,$$

但し，$\wedge$ と $\vee$ とはフーリエ及び逆フーリエ変換.

$f \in L^2(R^n)$ に対して

$$R_j f = (-i\xi_j|\xi|^{-1}\hat{f}(\xi))^\vee, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

定義 1.3. $f \in L^1_{loc}(R^1)$ かつ $\int_{R^1} |f(x)|(1+|x|)^{-2}dx < +\infty$ のとき

$$\tilde{H}f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} f(y)\left\{\frac{1}{x-y} - \chi_{\{|y|>1\}}(y)\frac{1}{y}\right\}dy$$

但し，χ_E は集合 E の定義関数。

$f \in L^1_{loc}(R^n)$ かつ $\int_{R^n}|f(x)|(1+|x|)^{-n-1}dx < +\infty$ のとき

$$\tilde{R}_j f(x) = C_n \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{y\in R^n : |x-y|>\varepsilon} f(y)\left\{\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \chi_{\{|y|>1\}}(y)\frac{y_j}{|y|^{n+1}}\right\}dy.$$

定理A.（C. Fefferman）$f \in BMO(R^n)$ ならば，$g_0, g_1, \cdots, g_n \in L^\infty(R^n)$ が存在して，

$$\sum_{j=0}^{n} \|g_j\|_{L^\infty} \le C_n \|f\|_{BMO}$$
$$f(x) = g_0(x) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{R}_j g_j(x) \quad (\text{mod constants}).$$

上の定理は通常「BMOの Fefferman-Stein 分解」と呼ばれる。

2. BMO(R^1)の Fefferman-Stein 分解に対する Jones の構成的証明

定義 2.1. μ を $R_+^2 = \{(x, t) : x \in R^1, t > 0\}$ 上の σ-有限な符号付測度とするとき,

$$\|\mu\|_c = \sup_I \frac{|\mu|(Q(I))}{|I|},$$

但し, $Q(I) = \{(x,t) \in R_+^2 : x \in I, t \in (0, |I|)\}$, $|\mu|$ は μ の全変動, sup は R^1 上のすべての区間 I についてとる。$\|\mu\|_c < +\infty$ のとき μ を Carleson 測度と呼ぶ。

補題 2.A. (Carleson). $f \in BMO(R^1)$ で supp f がコンパクトとすると, Carleson 測度 μ が存在して

(2.1) $\|\mu\|_c \le C \|f\|_{BMO}$,

$$(2.2) \qquad f(x) = \iint_{R^2_+} P_t(x-y)\, d\mu(y,t),$$

但し，$P_t(x)$ は Poisson 核，つまり

$$P_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{x^2+t^2}.$$

注意．Carleson [1] は上の補題よりもっと精密なことを n 次元の場合で証明している。

以下この章で述べることは，Jones のアイデアである。

定義 2.A. $(y,t) \in R^2_+$，$b \in L^1_{loc}(R^1)$ は実数値関数で $\int |b(x)|(1+|x|)^{-2}\,dx < +\infty$ とするとき，各 $(x,s) \in \overline{R^2_+}$ に対して

$$A(x+is) = \begin{cases} e^{\,b*P_s(x) + i\frac{1}{\pi}\int b(y)\left\{\frac{x-y}{(x-y)^2+s^2} - \frac{1}{y}\chi_{\{|y|>1\}}(y)\right\}dy} & \text{if } s>0, \\ e^{\,b(x) + i\tilde{H}b(x)} & \text{if } s=0 \end{cases}$$

$$g_{y,t}(x+is) = P_t(x+is-y)\,\frac{A(x+is)}{A(y+it)}$$

と定義する。但し

$$P_t(x+is) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{(x+is)^2+t^2}.$$

補題 2.B.　$A(x+is)$ は R^2_+ 上解析的，

$$\lim_{s\downarrow 0} A(x+is) = A(x) \quad \text{a.e. } x,$$

$$\lim_{s\downarrow 0} g_{y,t}(x+is) = g(x) \quad \text{a.e. } x,$$

$$|g_{y,t}(x)| = P_t(x-y)\frac{e^{\ell(x)}}{e^{\ell * P_t(y)}}. \tag{2.3}$$

いずれも容易であるので証明は略す，

補題 2.C.　$g_{y,t}(x+is) - P_t(x+is-y)$ は R^2_+ 上で解析的.

$P_t(x+is-y)$ が R^2_+ 上でおいては，$x+is = y+it$ で 1 位の極をもち，$1 - \dfrac{A(x+is)}{A(y+it)}$ が $x+is = y+it$ でゼロとなることから容易。

補題 2.D.　定義 2.A において，ℓ が上に有界ならば，

$$P_t(x-y) = \mathrm{Re}\, g_{y,t}(x) + H(\mathrm{Im}\, g_{y,t})(x).$$

ℓ が上に有界ならば，補題 2.C より $g_{y,t}(x+is) - P_t(x+is-y)$ は R^2_+ 上で有界解析関数となることおよび $g_{y,t}(x) \in L^2(R^1)$ とから，補題 2.D は容易。

$\|f\|_{BMO(R^1)} \leq 1$ かつ supp f をコンパクトとする。

補題2.A より (2.1) と (2.2) をみたす Carleson 測度 μ を得る。各 $t > 0$ に対し

$$b_t(x) = -\iint_{y \in R^1,\, s \in (0,t]} P_s(x-y)\, d|\mu|(y,s)$$

とおく。$b = b_t$ に対して，定義 2.A. を適用して，

$g_{y,t}(x)$ を得る。$b_t(x) \leq 0$ より 補題 2.D が成立していることにまず注意しておく。

$$-b_t * P_t(y) = \iint_{z \in R^1,\, s \in (0,t]} P_{s+t}(y-z)\, d|\mu|(z,s)$$

$$\leq C\, \|\mu\|_c \leq C\, \|f\|_{BMO} \leq C$$

と (2.3) とから

$$|g_{y,t}(x)| \leq C\, P_t(x-y)\, e^{b_t(x)}.$$

よって，$\forall x \in R^1$ に対し

$$\iint_{R^2_+} |g_{y,t}(x)|\, d|\mu|(y,t)$$

$$\leq C \iint P_t(x-y)\, e^{-\iint_{s \leq t} P_s(x-z)\, d|\mu|(z,s)}\, d|\mu|(y,t)$$

$$\leq C \left[e^{-\iint_{s \leq t} P_s(x-z)\, d|\mu|(z,s)} \right]_{t=+\infty}^{t=0} \leq C$$

そこで

$$g(x) = \iint_{\mathbf{R}^2_+} g_{y,t}(x)\, d\mu(y,t)$$

とおく。上の考察よりこの定義は可能で

$$\|g\|_{L^\infty} \le C.$$

一方, $\forall \alpha > 0$ に対し

$$\tilde{H}(\mathrm{Im}\, g_{y,t})(x) = \tilde{H}\left(\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{\varepsilon<t<\frac{1}{\varepsilon}} \mathrm{Im}\, g_{y,t}\, d\mu(y,t)\right)(x) \quad \text{in } L^2(-2\alpha, 2\alpha)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{\varepsilon<t<\frac{1}{\varepsilon}} \tilde{H}(g_{y,t})(x)\, d\mu(y,t) \quad \text{in } L^2(-\alpha,\alpha).$$

よって,

$$\mathrm{Re}\, g(x) + \tilde{H}\, \mathrm{Im}\, g(x)$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\iint_{\varepsilon<t<\frac{1}{\varepsilon}} \mathrm{Re}\, g_{y,t}(x) + \tilde{H}\, \mathrm{Im}\, g_{y,t}(x)\, d\mu(y,t) \quad \text{in } L^2(-\alpha,\alpha)$$

$$= \iint P_t(x-y)\, d\mu(y,t) \qquad (\text{modulo constants})$$

$$= f(x) \qquad (\quad " \quad).$$

よって, $\mathrm{Re}\, g$ と $\mathrm{Im}\, g$ とが f の Fefferman - Stein 分解を与える。

3. Jones の考え方の H^p への応用

定義 3.1. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ と $p \in (0,1]$ とに対し

$$f^*(x) = \sup_{t>0} |f * P_t(x)|,$$
$$\|f\|_{H^p} = \|f^*\|_{L^p},$$

但し

$$P_t(x) = C_n \frac{t}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x)\,dx = 1.$$

$H^p(\mathbb{R}^n)$ を $\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{H^p} < +\infty\}$ の距離 $\|\cdot\|_{H^p}^p$ による完備化として定義する。$H^p(\mathbb{R}^n)$ が $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ の部分空間とみなせることはよく知られている。

定理 B. $\frac{n-1}{n} < p \leq 1$ のとき 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\|f\|_{H^p} \leq C_{n,p} \left\{ \|f\|_{L^p} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_{L^p} \right\}$$

注意. $n=1$ の場合については古くから知られている。$n \geqq 2$ の場合については, Stein-Weiss [16] によって示された。かれらは

$$\left\{ |f * P_t(x)|^2 + \sum_{j=1}^{n} |R_j f * P_t(x)|^2 \right\}^{q/2}$$

が $q > \frac{n-1}{n}$ のとき $\mathbb{R}_+^{n+1}$ で劣調和になることを示した。

この章ではまず, 定理Bの $n=1$ の場合を, 第2章の Jones

のアイデアを用いて示してみよう。

補題 3.A. $f(x)$ を非負関数とし，$0 < q < p$ とすると

$$\| f^{q*\frac{1}{q}} \|_{L^p} \leq C_{p,q} \| f \|_{L^p}.$$

これは Hardy - Littlewood の maximal theorem から容易。

任意の実数値関数 $f \in L^2(R^1)$ と $\forall y \in R^1, \forall t > 0$ をとる。$\forall \varepsilon > 0$ をとり

$$b(x) = -\log(\varepsilon + |f(x) + iHf(x)|)$$

に対して，Jones の定義 2.A を適用して $g_{y,t}(x)$ を得る。

$$|f * P_t(y)| \leq \left| \int (f(x) + iHf(x)) P_t(x-y)\, dx \right|$$

$$= \left| \int (f(x) + iHf(x))\, g_{y,t}(x)\, dx \right| \quad (\because \text{補題 } 2.D)$$

$$\leq \int |f(x) + iHf(x)|\, |g_{y,t}(x)|\, dx$$

$$\leq \int |f(x) + iHf(x)| \frac{P_t(x-y)}{\varepsilon + |f(x) + iHf(x)|}\, dx \cdot e^{-b*P_t(y)}$$

$$\leq e^{(\log(\varepsilon + |f + iHf|)) * P_t(y)}$$

$\varepsilon > 0$ は任意であったから，$\forall q > 0$ に対して

$$|f * P_t(y)| \leq e^{(\log |f + iHf|) * P_t(y)} \leq |f + iHf|^{q*\frac{1}{q}}(x).$$

$t > 0$ は任意だから

$$f^*(x) \leq |f + iHf|^{q*\frac{1}{q}}(x).$$

よって，補題3.Aより $\forall p > q$ に対して

$$\|f\|_{H^p} \le C_{p,q} \|f + iHf\|_{L^p} \approx \|f\|_{L^p} + \|Hf\|_{L^p}.$$

を得て，定理Bの $n=1$ の場合が示される。

次に，2次元以上の場合に上の考え方を拡張することを試みる。そのために，前章のJonesの考え方を，複素数を用いずに言いかえてみると，定義2.A及び補題2.Dは次のようになる。

「$b(x) \in L^1_{loc}(R^1)$ を $\int_{R^1} |b(x)|(1+|x|)^{-2}dx < +\infty$ なる上に有界な実数値関数とする。$\forall (y,t) \in R^2_+$ に対し，実数値関数 $g_0, g_1 \in L^2(R^1)$ が存在して

$$P_t(x-y) = g_0(x) + Hg_1(x)$$

$$\{g_0(x)^2 + g_1(x)^2\}^{1/2} \le P_t(x-y)\, e^{b(x)}\, e^{-b*P_t(y)}$$ 」

これは，2次元以上の場合には，次のような少し弱い形で示すことができる。

定理1. $b(x) \in L^1_{loc}(R^n)$ を $\|b\|_{BMO} < \varepsilon_n$ なる実数値関数とする。$\forall y \in R^n$ と $\forall t > 0$ に対し，$g_0, g_1, \cdots, g_n \in L^2(R^n)$ が存在し，

(3.1) $$P_t(x-y) = g_0(x) + \sum_{j=1}^{n} R_j g_j(x),$$

$$(3.2) \quad \sum_{j=0}^{n} |g_j(x)| \le C_n \frac{1}{t^n\left(1+\frac{|x-y|}{t}\right)^{n+\frac{1}{2}}} e^{b(x)} e^{-b*P_t(y)}.$$

但し，ε_n は次元だけに関係する正の実数，$P_t(x)$ は n 次元の Poisson 核（定義 3.1 参照）．

証明は長いので本論ではとりあげない。定理 1 と次の補題を併用すると，定理 B の 2 次元以上の場合を弱い形で示せる。

補題 3.B．（Coifman - Rochberg [3]）．$k(x)$ を R^n 上で定義された非負関数とすると，

$$\| \log k^* \|_{BMO(R^n)} \le C_n .$$

但し，C_n は次元にのみ関係する定数．

$\forall h \in L^2(R^n)$，$\forall y \in R^n$，$\forall t > 0$ をとる。

$$b(x) = -\varepsilon \log \left\{ |h(x)| + \sum_{j=1}^{n} |R_j h(x)| \right\}^{\frac{1}{2}*}$$

に対して定理 1 を適用して，(3.1) - (3.2) をみたすような $g_0, \cdots, g_n$ を得る。（補題 3.B により，$\varepsilon > 0$ が次元にのみ関係して十分小ならば，b は定理 1 の条件をみたしていることに注意する。）

すると

$$
\begin{aligned}
&|f * P_t(y)| \\
&= \left| \int (f(x), R_1 f(x), \cdots, R_n f(x)) \cdot (P_t(x-y), 0, \cdots, 0)\, dx \right| \\
&= \left| \int (f(x), R_1 f(x), \cdots, R_n f(x)) \cdot (g_0(x), -g_1(x), \cdots, -g_n(x)) \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. dx \right| \qquad\qquad (\because (3.1)) \\
&\leq \int |(f(x), R_1 f(x), \cdots, R_n f(x))| \\
&\qquad \cdot C_n \frac{1}{t^n \left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\, e^{b(x)}\, dx\, e^{-b * P_t(y)} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\because (3.2)) \\
&\leq \int |(f, R_1 f, \cdots, R_n f)|^{\frac{1}{2} * (2-\varepsilon)}(x) \\
&\qquad \cdot C_n \frac{1}{t^n \left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\, dx\, e^{(\varepsilon \log |(f, \cdots, R_n f)|^{\frac{1}{2}*}) * P_t(y)} \\
&\leq C |(f, R_1 f, \cdots, R_n f)|^{\frac{1}{2} * (2-\varepsilon) * \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}}(y).
\end{aligned}
$$

よって，$t > 0$が任意であることに注意し，さらに，

$p_0 = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ とおくと，

$$
f^*(y) \leq C |(f, R_1 f, \cdots, R_n f)|^{\frac{1}{2} * 2p_0 * \frac{1}{p_0}}(y)
$$

を得る。とくに，$p > p_0$ならば 補題3.Aより

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{H^p} &\leq C_{p, p_0, n} \left\| |(f, R_1 f, \cdots, R_n f)|^{\frac{1}{2} * 2} \right\|_{L^p} \\
&\leq C \quad \| |(f, R_1 f, \cdots, R_n f)| \|_{L^p} \\
&\approx \|f\|_{L^p} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_{L^p}
\end{aligned}
$$

となる。ここで，$p_0 < 1$は1に非常に近く，定理Bにおける

$\frac{n-1}{n}$ のような面白い値は得られない。

以上が定理Bに対する従来とは異なる角度からのアプローチである。この論法は，p_0 が1に非常に近いという弱点を有するが，Riesz変換 $R_1, \cdots, R_n$ 以外の作用素に対しても有効であるという長所をもつ。

$\theta_1, \cdots, \theta_m \in C^\infty(R^n \setminus \{0\})$ が

$$\theta_j(r\xi) = \theta_j(\xi) \qquad \forall r>0 \quad \forall \xi \in R^n \setminus \{0\}, \quad j=1, \cdots, m,$$

をみたすとするとき，$\forall f \in L^2(R^n)$ に対し

$$K_j f = (\theta_j(\xi)\hat{f}(\xi))^\vee \quad , \quad j=1, \cdots, m,$$

と定義する。すると，上の論法は $K_1, \cdots, K_m$ に対しても有効である。

定理1′.

(3.3) $\sum_{j=1}^m |\theta_j(\xi) - \theta_j(-\xi)| \neq 0 \qquad \text{for } \forall \xi \in R^n \setminus \{0\}$

とする。$b(x) \in L^1_{loc}(R^n)$ を $\|b\|_{BMO} < \varepsilon(\theta_1, \cdots, \theta_m)$ なる実数値関数とする。（但し，ε は $\theta_1, \cdots, \theta_m$ にのみ関係する正の定数。）$\forall y \in R^n$ と $\forall t>0$ とに対し，$g_0, g_1, \cdots, g_m \in L^2(R^n)$ が存在し，

$$P_t(x-y) = g_0(x) + \sum_{j=1}^m K_j g_j(x)$$

$$\sum_{j=0}^{m} |g_j(x)| \le C_{\theta_1,\cdots,\theta_m} \frac{1}{t^n\left(1+\frac{|x-y|}{t}\right)^{n+\frac{1}{2}}} e^{b(x)} e^{-b*P_t(y)}$$

系 1. $\theta_1, \cdots \theta_m$ が (3.3) をみたすとすると，$p_0(\theta_1,\cdots,\theta_m) < 1$ が存在して，$\forall h \in L^2(R^n)$ と $\forall y \in R^n$ とに対し

$$h^*(y) \le C_{\theta_1,\cdots,\theta_m} |(h, K_1 h, \cdots, K_m h)|^{\frac{1}{2} * 2p_0 * \frac{1}{p_0}}(y).$$

系 2. $\theta_1, \cdots \theta_m$ が (3.3) をみたすとすると，$p_0(\theta_1,\cdots,\theta_m) < 1$ が存在して，$\forall p \in (p_0, 1]$ と $\forall h \in L^2(R^n)$ とに対して

$$\|h\|_{H^p} \le C_{p,\theta_1,\cdots,\theta_m} \left\{ \|h\|_{L^p} + \sum_{j=1}^{m} \|K_j h\|_{L^p} \right\}.$$

References

1. Carleson, L., Two remarks on H^1 and BMO, Advances in Math., 22(1976), 269-277.
2. Coifman, R. and Dahlberg, B., Singular integral characterization of H^p spaces and the F. and M. Riesz theorem, Proc. Symp. Pure Math., 35(1979), 231-234.
3. Coifman, R. and Rochberg, R., Another characterization of BMO, Proc. Amer. Math. Soc., 79(1980), 249-254.
4. Coifman, R. and Weiss, G., On subharmonicity inequalities involving solutions of generalized Cauchy-Riemann equations, Studia Math., 36(1970), 77-83.

5. Fefferman, C., Characterizations of bounded mean oscillation, Bull. Amer. Math. Soc., 77(1971), 587-588.

6. Fefferman, C.and Stein, E.M., H^p spaces of several variables, Acta Math., 129(1972), 137-193.

7. Gandulfo, A., Garcia-Cuerva, J. and Taibleson, M., Conjugate system characterization of H^1; counter examples for the Euclidean plane and local fields, Bull. Amer. Math. Soc., 82(1986), 83-85.

9. Janson, S., Characterization of H^1 by singular integral transforms on martingales and R^n, Math. Scand., 41(1977), 140-152.

10. Jones, P., Carleson measures and the Fefferman-Stein decomposition of BMO(R), Ann. of Math., 111(1980), 197-208.

11. __________, L^∞ estimates for the $\bar{\partial}$-problem in a half-plane, to appear in Acta Math.

12. Konjagin, S.V., On a problem of Littlewood, Math. USSR Izvestija, 18(1982), 205-225.

13. Mcgehee O.C., Pigno, L. and Smith,B.,Hardy's inequality and the L^1 norm of exponential sums, Ann. of Math., 113(1981), 613-618.

14. Peetre, J., On Littlewood's conjecture and Hardy's inequality, A connection with a problem in interpolation spaces, preprint.

15. Stein, E.M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

16. Stein, E.M. and Weiss, G. On the theory of harmonic functions of several variables I, The theory of H^p spaces, Acta Math., 103(1960), 26-62.

17. Uchiyama, A., A constructive proof of the Fefferman-Stein decomposition of BMO(R^n), Acta Math., 148(1982), 215-241.

18. ____________, The Fefferman-Stein decomposition of smooth functions and its application to $H^p(R^n)$, preprint.

19. Weiss, G., Some problems in the theory of Hardy spaces, Proc. Symp. Pure Math., 35(1979), 189-200.