数理解析研究所講究録
491巻 1983年 57-70

Optimal Control について

東北大・理　和泉沢 正隆
Masataka IZUMISAWA

本稿では，始めに，最適制御解を特徴付けるために動的計画法で使われる最適性原理と，条件付き最小費用のマルチンゲール性とが同じであることを紹介し，次に，完全可観測なある場合に，conditional shift 半群の envelope を用いた value process の近似について考察する。

第1章－1　確率制御系

(1) Control base $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$

$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間，$\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ を増大情報系で $\mathcal{F}_0=$ trivial，$\mathcal{F}=\bigvee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$ とする。

$\mathbb{X}=\{\mathbb{F}$ に適合した，右連続な確率過程の全体$\}$。

$x\in\mathbb{X}$ と確率変数 $S\ (\geq 0)$ に対して，$x^S=\{x(S\wedge t)\}_{t\geq 0}$ とする。

(2) 観測系 $(\mathcal{A}, \mathbb{T})$

$\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上の σ 加法族で次の条件をみたすもの。

(ア) $^\exists\, \overline{X} \subseteq X$, $\mathcal{A} = \sigma(x \in \overline{X})$

(イ) $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}_0$

(ウ) $^\forall t \in \mathbb{R}_+$ に対して $x \in X$ が $\mathcal{A}$ 可測なら x^t も $\mathcal{A}$ 可測。

$I_{\{S \leq t\}}$ が $\mathcal{A}$ 可測となる非負確率変数 S を観測時刻（又は $\mathcal{A}$ 停止時）とよぶ。観測時刻 S での観測値の全体を $\mathcal{G}_S$ と書く。すなわち，$\mathcal{G}_S = \sigma(x(S)\,;\, x$ は $\mathcal{A}$ 可測過程)。

$\mathbb{T}$ は $\mathcal{A}$ 停止時の族で次の条件をみたすもの。

(ア) $0 \in \mathbb{T}$ (イ) $S, T \in \mathbb{T}$ なら $S \vee T, S \wedge T \in \mathbb{T}$

(ウ) $^\exists \{S_n\} \subset \mathbb{T}$, $\sup_n S_n = \infty$

(エ) $S \in \mathbb{T}$, $H \in \mathcal{G}_S$ に対して $S_H = \begin{cases} S & \text{on } H \\ \infty & \text{on } H^c \end{cases}$ とすると $S_H \in \mathbb{T}$。

観測系の例

(i) 良可測 σ 加法族 (well-measurable or optional σ-field) $\mathcal{O} = \sigma(x \in X)$ と $\mathbb{F}$ 停止時の全体 $\mathcal{T}$。

(ii) 予見可能 σ 加法族 (predictable σ field) $\mathcal{P} = \sigma(x \in X\,;$ x は連続過程) と予見可能 $\mathbb{F}$ 停止時の全体。

注意 (i) $\mathcal{A}$ の性質(ア)より $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}$ だから $\mathcal{G}_S \subseteq \mathcal{F}_S$ また (ウ)より $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ は時とともに増大している。

(ii) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$ のとき完全可観測といい，それ以外の場合を部分的観測という。

(3) 許容制御族と制御政策 ($\mathcal{D}$, $\Pi = \{P^u : u \in \mathcal{D}\}$)

許容制御族 $\mathcal{D}$ は $\mathcal{A}$ 可測過程の族で次の条件をみたすもの。

(ア) $u(0) = c$ (定数) $\quad \forall u \in \mathcal{D}$

(イ) $u \in \mathcal{D}$, $S \in \mathbb{T}$ に対して，$\mathcal{D}(u, S) = \{v \in \mathcal{D} ; v^S = u^S\}$ と定める。$v \in \mathcal{D}(u, S)$, $A \in \mathcal{G}_S$ に対し $u^S \in \mathcal{D}$ かつ $uI_A + vI_{A^c} \in \mathcal{D}$ となっている。

制御政策 Π は各 $u \in \mathcal{D}$ に対して定まる $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率法則 P^u の族で，$u \in \mathcal{D}$, $S \in \mathbb{T}$, $v \in \mathcal{D}(u, S)$, $A \in \mathcal{F}_S$ に対し $P^u(A) = P^v(A)$ が成立しているものである。

[この性質より，$T \geq S$, $\mathcal{F}_T$ 可測確率変数 Y に対し

$$E^u[Y \mid \mathcal{G}_S] = E^v[Y \mid \mathcal{G}_S]$$ となる。

ここで，$E^u[\cdot] = \int_\Omega \cdot \, dP^u$ である。]

以上をまとめて 確率制御系 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathcal{A}, \mathbb{T}, \mathcal{D}, \Pi)$ という。

2 最適制御解の特徴付け

各 $u \in \mathcal{D}$ に対し，$(\mathcal{F}, P^u)$ 可積分な正確率変数 $C^u(\omega) = C(u, \omega)$ が存在し，かつ $\{\omega ; u = v\}$ 上では $C^u(\omega) = C^v(\omega)$ P^u and P^v a.s. となっているとき $\Gamma^u = E^u[C^u]$ $J = \inf_{u \in \mathcal{D}} \Gamma^u$ とおく。$C^u(\omega)$, Γ^u, J をそれぞれ，制御 u に関する損失関数（loss function），費用（cost），最小費用という。また $u^* \in \mathcal{D}$ で $\Gamma^{u^*} = J = \inf_{\mathcal{D}} E^u[C^u]$ となるものを最適制御（optimal control）という。

$u \in \mathcal{D}$，$S \in \mathbb{T}$ に対し以下のように，条件付き費用 $\Gamma(u, S)$ および条件付き最小費用 $J(u, S)$ を定める。

$$\Gamma(u, S) = E^u[C^u \mid \mathcal{G}_S]$$

$$J(u, S) = \operatorname*{ess\,inf}_{v \in \mathcal{D}(u,S)} \Gamma(v, S) = \operatorname*{ess\,inf}_{\mathcal{D}(u,S)} E^v[C^v \mid \mathcal{G}_S]$$

$u^* \in \mathcal{D}(u, S)$ で $\Gamma(u^*, S) = J(u, S)$ P^u-a.s. となっているとき，u^* を (u, S) 条件付き最適制御とよぶ。

定理 1 $u \in \mathcal{D}$，$S, T \in \mathbb{T}$，$S \leqq T$ に対し

(i) $E^u[J(u, T) \mid \mathcal{G}_S] \geqq J(u, S)$ P^u-a.s.

(ii) u^* が (u^*, S) 条件付き最適制御なら，(u^*, T) 条件付き最適制御にもなっている。

(iii) 次の3つは同値な性質である。

(ア) u^* が最適制御である。

(イ) $^\forall S \in \mathbb{T}$ に対し，u^* は (u^*, S) 条件付き最適制御である。

(ウ) $E^{u^*}[\, J(u^*, T) \mid \mathcal{G}_S] = J(u^*, S) \qquad P^{u^*}\text{-a.s.}$ 。

大雑把にいうと，(i)は $\{ J(u,S), \mathcal{G}_S \}$ は P^u劣マルチンゲール，すなわち，一般には時とともにその条件付き最小費用は増していくことを示している。(ii)及び(iii)は最適制御はどの観測時刻においても最適なものになっていなければいけないことを示し，これは $\{ J(u^*, S), \mathcal{G}_S \}$ が P^{u^*}マルチンゲールになっているのと同値であることを示している。(iii)の性質を最適性原理（ *principle of optimality* ）又は Bellman 原理と呼ぶ。

定理の証明(i) ess inf と積分が交換可能なこと（後述の補題1），許容制御政策の性質，$\mathcal{D}(u,S) \geqq \mathcal{D}(u,T)$ であることを順に使って，$E^u[\, J(u,T) \mid \mathcal{G}_S]$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname*{ess\,inf}_{v \in \mathcal{D}(u,T)} E^u[\, \Gamma(v,T) \mid \mathcal{G}_S] = \operatorname*{ess\,inf}_{v \in \mathcal{D}(u,T)} E^u[E^v[C^v \mid \mathcal{G}_T] \mid \mathcal{G}_S] \\
&= \operatorname*{ess\,inf}_{v \in \mathcal{D}(u,T)} E^v[E^v[C^v \mid \mathcal{G}_T] \mid \mathcal{G}_S] \geqq \operatorname*{ess\,inf}_{v \in \mathcal{D}(u,S)} E^v[C^v \mid \mathcal{G}_S] \\
&= J(u,S)
\end{aligned}
$$

(ii) u^* を (u^*, S) 条件付き最適制御とすると，

$$J(u^*, S) = \Gamma(u^*, S)$$

$= E^{u^*}[C^{u^*} | \mathcal{G}_S] = E^{u^*}[E^{u^*}[C^{u^*} | \mathcal{G}_T] | \mathcal{G}_S]$

$= E^{u^*}[\Gamma(u^*, T) | \mathcal{G}_S] \geqq E^{u^*}[J(u^*, T) | \mathcal{G}_S]$

$\geqq J(u^*, S)$ by (i)

従って $E^{u^*}[J(u^*, T) | \mathcal{G}_S] = J(u^*, S)$ P^{u^*}-a.s.

また $E^{u^*}[J(u^*, T) | \mathcal{G}_S] = E^{u^*}[\Gamma(u^*, T) | \mathcal{G}_S]$ P^{u^*}-a.s.

一般に $\Gamma(u^*, T) \geqq J(u^*, T) \geqq 0$ P^{u^*}-a.s. だから上式と合わせて $\Gamma(u^*, T) = J(u^*, T)$ P^{u^*}-a.s. すなわち u^* は (u^*, T) 条件付き最適制御である。

(iii) (ア)と u^* が $(u^*, 0)$ 条件付き最適制御であることとは同じだから，(ii)を使って(ア)と(イ)の同値性が出る。(ウ)については(ii)の証明の中でいえている。

第2章－1．この章では，観測系を $(\mathcal{O}, \mathcal{T})$ とし，$\mathcal{D}$ および Π に次の仮定を加える。

(A.1) $u, v \in \mathcal{D}$, $T \in \mathcal{T}$ なら，$u \cdot T \cdot v = u I_{[0,T]} + v I_{]T,\infty]}$ も $\mathcal{D}$ の元（この $u \cdot T \cdot v$ を２つの制御の結合(concatenation)とよぶ）。

(A.2) $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ 上の確率 P が存在してすべての制御政策 $P^u \in \Pi$ と P とは互いに絶対連続になっている。また $\mathcal{F}_0$ は P 完備になっている。

(A.3) $u, v \in \mathcal{D}$, $S, T \in \mathcal{T}$, $S \leqq T$ に対し，

$$E^{u\cdot T\cdot v}[\,\cdot\,|\mathcal{F}_S] = E^u[E^v[\,\cdot\,|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_S] \quad P\text{-a.s.}$$

(A.4) $\{Y_n\}_{n\geq 1},\ Y \in L^\infty(P),\ Y_n \to Y$ P-a.s. なら

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathcal{D}} E^u[|Y_n - Y|] = 0$$

損失関数は次のように定められているとする。

$f(s,\omega,\lambda)$ を正の有界可測関数で，(s,ω) に関しては $\mathbb{F}$－発展的可測とする。$\alpha > 0$，$f^u(s,\omega) = f(s,\omega,u(s,\omega))$ で

$$C^u(\omega) = \int_0^\infty e^{-\alpha r} f^u(r,\omega)dr = \int_0^\infty e^{-\alpha r} f(r,\omega,u(r,\omega))dr。$$

そして $C^u(t) = \int_0^t e^{-\alpha r} f^u(r,\omega)dr$ とおけば，f の条件より $\{C^u(t)\}_{t\geq 0}$ は $\mathbb{F}$ に適合した有界連続増加過程で $C^u(\infty) = C^u(\omega)$ である。

条件付き費用 $\Gamma(v,S) = E^v[\int_0^\infty e^{-\alpha r} f^v(r)dr\,|\mathcal{F}_S]$

$$= C^v(S) + E^v[\int_S^\infty e^{-\alpha r} f^v(r)dr\,|\mathcal{F}_S]$$

次に $v \in \mathcal{D}(u,S)$ なら $C^u(S) = C^v(S)$ であり，また (A.1) より $\mathcal{D} = \mathcal{D}(u,S)$ であることに注意すれば，

条件付き最小費用 $J(u,S) = \underset{v\in\mathcal{D}(u,S)}{\mathrm{ess\,inf}}\ \Gamma(v,S)$

$$= C^u(S) + \underset{v\in\mathcal{D}}{\mathrm{ess\,inf}}\ E^v[\int_S^\infty e^{-\alpha r} f^v(r)dr\,|\mathcal{F}_S]。$$

$V(t) = \underset{v\in\mathcal{D}}{\mathrm{ess\,inf}}\ E^v[\int_t^\infty e^{-\alpha(r-t)} f^v(r)dr\,|\mathcal{F}_t]$ とおけば，$J(u,t) = C^u(t) + e^{-\alpha t}V(t)$ で，定理1から

$\{C^u(t)+e^{-\alpha t}V(t)\}_{t\geq 0}$ は P^u 劣マルチンゲール。

u^* が最適である $\rightleftarrows$ $\{C^{u^*}(t)+e^{-\alpha t}V(t)\}_{t\geq 0}$ が P^{u^*} マルチンゲール。この $V=\{V(t)\}_{t\geq 0}$ を value process と呼ぶ。

2　V の性質

$x\in X$ で $\|x\|=\|\sup_t|x(t)|\|_{L^\infty(P)}<\infty$ となるものの全体を B とすると，$(B,\|\ \|)$ は Banach 空間である。

$\Phi=\{x\in B$；各 $u\in\mathcal{D}$ に対して $\{C^u(t)+e^{-\alpha t}x(t)\}_{t\geq 0}$ が P^u 劣マルチンゲールになっている$\}$。

命題 1　V は Φ の maximal element である。

証明．まず $^\forall x\in\Phi$ に対して $x\leqq V$ を示す。そのためには，各 $u\in\mathcal{D}$ に対し $x(t)\leqq E^u[\int_t^\infty e^{-\alpha(r-t)}f^u(r)dr|\mathcal{F}_t]$ を示せばよい。$x\in\Phi$ だから $C^u(t)+e^{-\alpha t}x(t)\leqq E^u[C^u(\infty)|\mathcal{F}_t]$ $=C^u(t)+E^u[\int_t^\infty e^{-\alpha r}f^u(r)dr|\mathcal{F}_t]$。よって $x(t)\leqq E^u[\int_t^\infty e^{-\alpha(r-t)}f^u(r)dr|\mathcal{F}_t]$ が出る。あとは $V\in B$ が示せればよい。次の補題を用意する。

補題 1 (i) 有界可測過程 $z=\{z(t)\}_{t\geq 0}$ に対して optional projection が一意に存在する。すなわち，$\mathcal{O}$ 可測過程 $y=\{y(t)\}_{t\geq 0}$ で $^\forall T\in\mathcal{T}$ に対し $E[z(T)|\mathcal{F}_T]=y(T)$ P-a.s. on $\{T<\infty\}$ となるものが存在する。（本稿で

は indistinguishable な過程は同一視する。)

(ii) $\mathcal{O}$ 可測過程 Y で $t \longmapsto E[Y(t)]$ が右連続なら Y も右連続な過程である。特に，右連続有界可測過程の optional projection は右連続な過程となる。

(iii) $\{z_i\,;\,i \in I\}$ を右連続有界可測過程の族とすると，I の可算部分集合 $\{i_n\}$ で $\operatorname*{ess\,inf}_{i\in I} z_i = \inf_n z_{i_n}$ となるものが存在する。また $S \in \mathcal{T}$，$\mathcal{F}$ の sub σ field $\mathcal{H}$ に対し，

$E[\operatorname*{ess\,inf}_I z_i(S)\,|\,\mathcal{H}] = \inf_n E[z_{i_n}(S)\,|\,\mathcal{H}]$ となる。

((i),(ii) については DELLACHERIE - MEYER [4] 6 章，(iii) については EL-KAROUI [5] Appendix 又は DELLACHERIE [3] を参照して下さい。)

さて，補題 1 (i) より，$\{E^v[\int_t^\infty e^{-\alpha(r-t)} f^v(r)dr\,|\,\mathcal{F}_t]\}_{t\geq 0}$ は，可測過程 $\{e^{\alpha t}(C^v(\infty) - C^v(t))\}_{t\geq 0}$ の P^v optional projection と考えれば，右連続な $\mathcal{O}$ 可測過程である。次に，補題 1 (ii) より，$\{v_n\} \subset \mathcal{D}$ が存在して $\mathbb{V} = \inf_n \{E^{v_n}[\int_t^\infty e^{-\alpha(r-t)} f^{v_n}(r)dr$ $|\,\mathcal{F}_t]\}_{t\geq 0}$ となっている。従って $\mathbb{V}$ は $\mathcal{O}$ 可測過程であるから補題 1 (ii) より，任意の有界 $\mathcal{F}_t$ 停止時の減少列 $\{T_m\}$，($T_m \downarrow T$ とする) に対して $\lim_{m\to\infty} E^u[\mathbb{V}(T_m)] = E^u[\mathbb{V}(T)]$ を示せば，$\mathbb{V} \in B$ がいえる。実際，補題 1 (iii) と (A,3) より

$$E^u[\mathbb{V}(T)] = E^u[\inf_n E^{v_n}[\int_T^\infty e^{-\alpha(r-T)} f^{v_n}(r)dr\,|\,\mathcal{F}_T]]$$

$$= \inf_n E^u[E^{v_n}[\int_T^\infty e^{-\alpha(r-T)} f^{v_n}(r)dr \mid \mathcal{F}_T]]$$

$$= \inf_n E^{u\cdot T\cdot v_n}[\int_T^\infty e^{-\alpha(r-T)} f^{v_n}(r)dr]$$

$$= \inf_{\mathcal{D}} E^w[\int_T^\infty e^{-\alpha(r-T)} f^w(r)dr]$$

これと同様に $E^u[V(T_m)] = \inf_{\mathcal{D}} E^w[e^{\alpha T_m}\int_{T_m}^\infty e^{-\alpha r} f^w(r)dr]$。

$|\inf_\beta a_\beta - \inf_\beta b_\beta| \leqq \sup_\beta |a_\beta - b_\beta|$ を使えば

$$|E^u[V(T_m)] - E^u[V(T)]|$$

$$\leqq \sup_{w\in\mathcal{D}} E^w[\,|e^{\alpha T_m}\int_{T_m}^\infty e^{-\alpha r} f^w(r)dr - e^{\alpha T}\int_T^\infty e^{-\alpha r} f^w(r)dr|\,]$$

$$\leqq \sup_{\mathcal{D}} E^w[(e^{\alpha T_m} - e^{\alpha T})\int_T^\infty e^{-\alpha r} f^w(r)dr + e^{\alpha T}\int_T^{T_m} e^{-\alpha r} f^w(r)dr]$$

となるので，(A, 4) より $\lim_{m\to\infty} E^u[V(T_m)] = E^u[V(T)]$ が出て $V \in \Phi$ 。

3．V の近似

$h>0$，$x\in B$ に対し，可測過程 $\{e^{\alpha t}(C^u(t+h) - C^u(t)) + e^{-\alpha h}x(t+h)\}_{t\geq 0}$ の P^u optional projection を $K_h^u x$ とし，x の conditional shift 半群とよぶことにする。さらに $G_h x = \operatorname{ess\,inf}_{u\in\mathcal{D}} K_h^u x$ を K_h^u の envelope という。

命題 2 (i) K_h^u は B から B への作用素で，$x, y \in B$ に対し

(ア) $K^u_{h+k}x = K^u_h K^u_k x = K^u_k K^u_h x$, $K^u_0 = identity$

(イ) $K^u_h x \leqq K^u_h y$ if $x \leqq y$

(ウ) $\| K^u_h x - K^u_h y \| \leqq e^{-\alpha h} \| x - y \|$

(ii) G_h も B から B への作用素で，性質(ア),(イ),(ウ) および

(エ) $u \in \mathcal{D}$ に対して $K^u_h x \geqq G_h x$ となる。

(注) K^u_h の 0 でのノルムによる連続性 ($\lim_{h \downarrow 0} \|K^u_h x - x\| = 0$) については判らない。[G_h についても同様]。

証明の概略 (イ),(ウ),(エ)は定義より容易。(ア)については，

$$K^u_h x(T) = E^u[\int_T^{T+h+k} e^{-\alpha(r-T)} f^u(r)dr + e^{-\alpha(h+k)} x(T+h+k) | \mathcal{F}_T]$$

だから $\int_T^{T+h+k} \cdots dr$ を $\int_T^{T+h} \cdots dr + \int_{T+h}^{T+h+k} \cdots dr$ に分け条件付き平均の中を $\mathcal{F}_{T+h}$ でさらに条件付き平均をとって整理すれば出る。また，$V \in B$ を示したのと同様の論法により $G_h x \in B$ が示せ，K^u_h の半群性と制御の結合を使えば，G_h についても(ア)の性質が示せる。

各 $h > 0$ に対して，B 上の縮小作用素 G_h に関する不動点を $x[h]$ と書くことにする。

定理 2 $\{x[\frac{1}{2^n}]\}_{n \geq 1}$ は減少列で，その極限を $\hat{x}$ とすると $\hat{x} \in \Phi$ かつ $\hat{x} = V$ である。

補題 2 (i) $x \leqq G_h x$ なら $x \leqq x[h]$

(ii) $V \leqq G_h V$ すなわち $V \leqq x[h]$

証明(i) G_h を繰り返し作用させて，大小を比較すれば，

$x \leqq (G_h)^n x$ ，一方 $(G_h)^n x \to x[h]$ だから $x \leqq x[h]$。

(ii) $V(S) = \inf_n E^{v_n}[\int_S^\infty e^{-\alpha(r-S)} f^{v_n}(r)dr \mid \mathcal{F}_S]$ で

$u \in \mathcal{D}$ に対し $K_h^u V(T) = E^u[\int_T^{T+h} e^{-\alpha(r-T)} f^u(r)dr +$

$e^{-\alpha h} V(T+h) \mid \mathcal{F}_T] = E^u[\int_T^{T+h} e^{-\alpha(r-T)} f^u(r)dr + \inf_n E^{v_n}[\int_{T+h}^\infty$

$e^{-\alpha(r-T)} f^{v_n}(r)dr \mid \mathcal{F}_{T+h}] \mid \mathcal{F}_T]$

$= E^u[\inf_n E^{v_n}[\int_T^{T+h} e^{-\alpha(r-T)} f^u(r)dr + \int_{T+h}^\infty e^{-\alpha(r-T)} f^{v_n}(r)dr \mid \mathcal{F}_{T+h}] \mid \mathcal{F}_T]$

$= \inf_n E^u[E^{v_n}[\int_T^\infty e^{-\alpha(r-T)} f^{u\cdot(T+h)\cdot v_n}(r)dr \mid \mathcal{F}_{T+h}] \mid \mathcal{F}_T]$

$= \inf_n E^{u\cdot(T+h)\cdot v_n}[\int_T^\infty e^{-\alpha(r-T)} f^{u\cdot(T+h)\cdot v_n}(r)dr \mid \mathcal{F}_T]$

$\geqq V(T)$

よって $K_h^u V \geqq V$。従って $G_h V \geqq V$。

定理の証明 G_h の半群性と $x[h]$ が G_h の不動点であることから integer m に対し $x[h] = G_{mh} x[h]$。従って補題2(i)より $x[\frac{h}{m}] \leqq x[h] \leqq x[mh]$ を得る。特に，$x_n = x[2^{-n}]$ とすれば，上式より x_n は減少列になっている。また補題2(ii)より $x_n \geqq V$ だから $\hat{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$

$\hat{x} \geqq V$ である。ところで V は Φ の maximal element だったので，$\hat{x} \in \Phi$ を示せば，$\hat{x} \leqq V$ すなわち $\hat{x} = V$ を得る。

$\hat{x}$ は作り方より $\mathcal{O}$ 可測過程で，その道は右側上半連続になっている。任意の $h>0$，$l \leqq n$ に対し $j=[h2^l]+1$，$m=j2^{n-l}$ とおけば，$l \to \infty$ のとき $j2^{-l} \downarrow h$ であり $\hat{x}(t+h) \geqq \limsup_{l\to\infty} \hat{x}(t+j2^{-l})$ となっていて，

$x_n = x[2^{-n}] = G_{m2^{-n}}\, x[2^{-n}] \leqq K^u_{m2^{-n}} x_n = K^u_{j2^{-l}} x_n$ である。

$$E^u[\, e^{\alpha t}\{c^u(t+h)-c^u(t)\} + e^{-\alpha h}\hat{x}(t+h) \mid \mathcal{F}_t]$$

$$\geqq \limsup_{l\to\infty} E^u[e^{\alpha t}\{c^u(t+j2^{-l})-c^u(t)\}+e^{-\alpha j2^{-l}}\hat{x}(t+j2^{-l}) \mid \mathcal{F}_t]$$

$$= \limsup_{l\to\infty}\lim_{n\to\infty} E^u[e^{\alpha t}\{c^u(t+j2^{-l})-c^u(t)\}+e^{-\alpha j2^{-l}}x_n(t+j2^{-l}) \mid \mathcal{F}_t]$$

$$= \limsup_{l\to\infty}\lim_{n\to\infty} K^u_{j2^{-l}} x_n(t) \geqq \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \hat{x}(t)$$

従って，$\{c^u(t)+e^{-\alpha t}\hat{x}(t)\}_{t\geq 0}$ は P^u 劣マルチンゲールとなり $c^u(t+)+e^{-\alpha t}\hat{x}(t+) \geqq c^u(t)+e^{-\alpha t}\hat{x}(t)$ を得る。$x_n \downarrow \hat{x}$ で x_n，c^u は共に右連続だから，

$$\hat{x}(t) \leqq \hat{x}(t+) \leqq x_n(t+) = x_n(t) \quad \forall n$$

よって $\hat{x}(t)=\hat{x}(t+)$ となり $\hat{x}\in\Phi$ が示せた。従って $\hat{x}=V$

本稿の第1章は EL-KAROUI [5] の第1章の概略であり，第2章は MORIMOTO-IZUMISAWA [8] IZUMISAWA [7] の紹介である。確率最適制御理論の概論として，マルコフ半群を使ったものに，NISIO [9] BENSOUSSAN [2]，また，マル

チンゲールを使ったものでは，上の［5］のほか，DAVIS［2］ELLIOTT［6］などがある。

参考文献

[1] A.BENSOUSSAN, Stochastic control by functional analysis methods, Studies in Math. and its Appl. 11, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1982.

[2] M.H.A.DAVIS, Martingale methods in stochastic control, Stochastic Control and Stochastic Differential Systems, Lect.Notes in Control and Information Sci. 16, Springer-Verlag, Berlin-(1979)85-117.

[3] C.DELLACHERIE, Sur l'existence de certains essinf et esssup de familles de processus mesurables, Sem.Prob. XII, Lect. Notes in Math. 649, Springer-Verlag (1977)512-514.

[4] C.DELLACHERIE and P.A.MEYER, Probabilites et potentiels, 2nd ed., Chaps I-IV, Hermann, Paris, 1975;Chaps V-VIII, Hermann, Paris, 1980.

[5] N.EL-KAROUI, Les aspects probabilistes du controle stochastique, Ecole d'Ete de Prob. Saint-Flour IX, Lect.Notes in Math. 876, Springer-Verlag (1981)73-238.

[6] R.J.ELLIOTT, Stochastic Calculus and Applications,Springer-Verlag, 1982.

[7] M.IZUMISAWA, On the envelope of conditioned shifts of right continuous processes, preprint.

[8] H.MORIMOTO and M.IZUMISAWA, Nonlinear semigroups and a characterization of the value process in stochastic control, preprint.

[9] M.NISIO, Lectures on Stochastic Control Theory, ISI Lect.Notes 9, McMillan India, 1981.