

古典的 H_1 と二進的 H_1 の同型定理

(Maurey の理論)

茨城大理 荷見 守助 (Morisuke Hasumi)

1. 序。Martingale 理論の函数解析学方面への目覚ましい応用の最近の一例として、B. Maurey による古典的 Hardy 族 $H_1(\mathbb{D})$ と二進的 H_1 の同型定理とその帰結としての $H_1(\mathbb{D})$ の無条件基底の存在定理を紹介する。其後 Carleson, Wojtaszczyk により $H_1(\mathbb{D})$ の無条件基底の直接構成法が考案され、それを通じて古典的 H_1 と二進的 H_1 の同型性も証明されるやうにはなつたが、Maurey の方法が依然として極めて有効で且つ興味深いことは確かである。問題の定理は次の通りである。

定理 A。 $H_1(\mathbb{D}) \cong H_1(\mathcal{S})$ 。右辺は二進的 H_1 である。

定理 B。 $H_1(\mathbb{D})$ は無条件基底を持つ。

詳しい定義は後で述べるが、Banach 空間の基底の問題は、Banach の頃から既に大きな問題であった。正則函数の作る空間の基底に関しては、「disk algebra は基底を持つか？」が有名な Banach の本に出てゐる。具体的な空間についての最近ま

での結果が要領よくまとめられてゐる。これは Petczynski [4] で例へば次の表はその一部である。(+ は存在, - は非存在.)

空間名	$A(\mathbb{D})$	$H_{\infty}^{\infty}(\mathbb{D})$	$H_p(\mathbb{D})$ ($1 < p < \infty$)	$H_1(\mathbb{D})$	C/A_0
基底	+	-	+	+	+
無条件基底	-	-	+	?	?

これからも、上記の Maurey の結果の意味が窺へよう。我々の $\langle \rangle$ の興味はしかし結果よりもその方法にある。

2. 同型証明の一般論 — Petczynski の分解法。Martingale に

無関係のところから片付けておく。X, Y を Banach 空間とし次を仮定する。但し, \times は Banach 空間の直積を表はす。

$$1) \quad X \cong X \times X, \quad Y \cong Y \times Y$$

$$2) \quad \exists X', Y' : \quad X \cong Y \times Y', \quad Y \cong X \times X'.$$

このとき, $X \cong Y$ 。何となれば、 $X \cong Y \times Y' \cong Y \times (Y \times Y') \cong Y \times X \cong X \times X' \times X \cong X \times X' \cong Y$ 。これは Petczynski の分解法と呼ばれるものである。古典的 Hardy 族 $H_1(\mathbb{D})$ と進的 Hardy 族 $H_1(\delta)$ (定義は次節) について 1) は直ぐ分かるから、示すべき事は 2) である。即ち、一方が他方の complemented subspace に同型であることを示すことである。Maurey の方法の眼目はそこにある。

3. 二進的 Hardy 族 $H_1(\delta)$ の定義と性質. Haar 函数系の定義から始める。 $[0, 1]$ 上の函数 $h_0, h_{n,k}$ ($n=1, 2, \dots$; $k=1, 2, \dots, 2^{n-1}$) を, $h_0 \equiv 1, h_{n,k} = 2^{(n-1)/2} \left(\mathbb{I}_{[(2k-2)2^{-n}, (2k-1)2^{-n}]} - \mathbb{I}_{[(2k-1)2^{-n}, 2k \cdot 2^{-n}]} \right)$ と定義し, Haar 函数 と呼ぶ。これは $L_2[0, 1]$ の正規直交基底をなす。次に Haar 函数系から生成される $[0, 1]$ 内の σ 集合族 (= 進集合族) と呼んでおく) $(\mathcal{A}_n)_{n=0}^{\infty}$ を次で定義する:

$$\mathcal{A}_0 = \sigma(h_0) = \{\emptyset, [0, 1]\}, \quad \mathcal{A}_n = \sigma(h_{n,k} : k=1, 2, \dots, 2^{n-1}),$$

但し, $\sigma(\dots)$ は括弧内の函数を可測にする最小の σ 集合族を表す。従って, \mathcal{A}_n は閉区間 $[j2^{-n}, (j+1)2^{-n}]$ ($j=0, 1, \dots, 2^n-1$) から生成されたものであり, $\mathcal{A}_0 = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$ とおくと, \mathcal{A}_0 はすべての Borel 集合より成る。また dt は $[0, 1]$ 上の Lebesgue 測度を表はすものとする。

定義. $f \in L_1(dt)$ に対し, $f_n = \mathbb{E}[f / \mathcal{A}_n]$, $n=0, 1, \dots$ とし,

$$S(f) = \left(|f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n-1}|^2 \right)^{1/2}$$

を f の平方函数 (square function) と呼ぶ。そして

$$H_1(\delta) = H_1([0, 1], (\mathcal{A}_n), dt) \equiv \{ f \in L_1(dt) : S(f) \in L_1(dt) \}$$

と定義する。 $H_1(\delta)$ の norm は

$$\|f\|_{H_1(\delta)} \equiv \|S(f)\|_1$$

とする。 $H_1(\delta)$ はこの norm について Banach 空間となる。

次に基底を定義する。複素 Banach 空間 X の点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が X の基底であるとは、任意の $x \in X$ に対して複素数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$

が一意的に存在して $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ を満たすことを云ふ。この右辺が常に無条件収束するとき、 $\{x_n\}$ を X の無条件基底 (unconditional basis) と呼ぶ。(級数 $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, $y_n \in X$, が無条件収束するとは、 $\{y_n\}$ のすべての置換 $\{y_{\sigma(n)}\}$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} y_{\sigma(n)}$ が収束することを云ふ。これはすべての $\theta_n \in \mathbb{C}$, $|\theta_n| = 1$, に対して $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n y_n$ が収束することと同値である。) $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が無条件基底とすれば、すべての $x = \sum c_n x_n \in X$ に対し $\|x\| = \sup \{ \|\sum \theta_n c_n x_n\| : |\theta_n| = 1 \}$ とおくと、 $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|$ と同値な norm である。そこで $K = \sup \{ \|x\| : \|x\| = 1 \}$ を基底 $\{x_n\}$ の無条件性定数と呼ぶ。

命題 1. Haar 函数系 $\{h_0, h_{n,k}\}$ は $H_1(S)$ の無条件基底で、無条件性定数は 1 である。

証明. $f \in L_1(dt)$ に対し、 $\alpha_0 = \mathbb{E}[f h_0]$, $\alpha_{n,k} = \mathbb{E}[f h_{n,k}]$ とおけば、 $f_n = \mathbb{E}[f / d_n] = \alpha_0 h_0 + \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu,k} h_{\nu,k}$ である。(ここで $\sum_{\nu=1}^n$ は $\sum_{\nu=1}^n \sum_{k=1}^{2^{\nu-1}}$ の略である。) 即ち、 $f_n - f_{n-1} = \sum_k \alpha_{n,k} h_{n,k}$ となり、

$$S(f) = (|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\sum_k \alpha_{n,k} h_{n,k}|^2)^{1/2} = (|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n,k}|^2 h_{n,k}^2)^{1/2}.$$

従って

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_1(S)} &= \mathbb{E} \left((|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n,k}|^2 h_{n,k}^2)^{1/2} \right) = \|\alpha_0 + \sum' \alpha_{n,k} h_{n,k}\|_{H_1(S)} \\ &= \|\alpha_0 \theta_0 + \sum' \alpha_{n,k} \theta_{n,k} h_{n,k}\|_{H_1(S)} \quad \text{但し } |\theta_0| = |\theta_{n,k}| = 1. \end{aligned}$$

これから命題は明らかである。(証明終)

4. Martingale H_1 及 BMO . $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率測度空間、 $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ を \mathcal{F} の部分 σ 集合族の増加列とし、 $\mathcal{F}_{\infty} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$ とおく。

$f \in L_1(\mathcal{F}_{\infty})$ に対して、 $f_n = \mathbb{E}[f / \mathcal{F}_n]$, $n=0, 1, \dots$, とし、 $S(f) = (|f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n-1}|^2)^{1/2}$ とおき、martingale H_1 を

$$H_1[(\mathcal{F}_n)] = H_1(\Omega, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P}) = \{f \in L_1(\mathcal{F}_{\infty}) : S(f) \in L_1(\mathcal{F}_{\infty})\}$$

と定義する。norm は $\|f\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \equiv \|S(f)\|_1$ で与えられる。

$f \in L_2(\mathcal{F}_{\infty})$ に対し

$$\|f\|_{BMO[(\mathcal{F}_n)]} = \|\max\{|f_0|, \sup_{n \geq 1} (\mathbb{E}(|f - f_{n-1}|^2 / \mathcal{F}_n))^{1/2}\}\|_{\infty}$$

とおき、martingale BMO を

$$BMO[(\mathcal{F}_n)] = BMO(\Omega, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P}) = \{f \in L_2(\mathcal{F}_{\infty}) : \|f\|_{BMO[(\mathcal{F}_n)]} < \infty\}$$

と定義する。このとき、 $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ の双対空間は $BMO[(\mathcal{F}_n)]$ であることが Fefferman の定理から分かる。特に $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{A}_n$, $\mathbb{P} = dt$ の場合、 $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ は $H_1(\delta)$ に等しい。また $BMO[(\mathcal{A}_n)]$ のわりに $BMO(\delta)$ と書く。

5. $H_1(\delta)$ が $H_1(\mathbb{D})$ の complement subspace に同型になること。

目標は $H_1(\mathbb{D})$ の中に Haar 函数系と同等な函数系を作り出すことである。問題は

1°) Haar 函数系と同等な系を手へるための条件の発見。

2°) $H_1(\mathbb{D})$ の中に具体的に構成すること。

の二点である。以下順次に述べる。

1° Haar 函数系変形の一般論. 先づ Haar 函数系の特性を列挙する. (1) A_{n-1} は $\text{supp}(h_{n,k}) (= h_{n,k}$ の closed support), $k=1, 2, \dots, 2^{n-1}$, から生成される. (2) $h_{n,k} = \mathbb{E}[h_{n,k} / \mathcal{A}_n], \mathbb{E}[h_{n,k} / \mathcal{A}_{n-1}] = 0, k=1, 2, \dots, 2^{n-1}$. (3) $\mathbb{E}[h_{n,k}] = 0, \mathbb{E}[|h_{n,k}|^2] = 1, n=1, 2, \dots; k=1, 2, \dots, 2^{n-1}$. (4) $|h_{n,k}| = 2^{(n-1)/2} \mathbb{I}_{\text{supp}(h_{n,k})} (\forall n, k)$. (5) $\mathbb{P}\{h_{n,k} > 0\} = \mathbb{P}\{h_{n,k} < 0\} = 2^{-n}$. (6) $\{h_{n,k}\}$ は $L_2(dt)$ の正規直交系をなす. これらの性質を如何に一般の場合に活かすかが問題の核心である.

まづ (\mathcal{A}_n) の代替を作る. $A_{1,1} = \Omega$ とし, $A_{n,k} (k=1, 2, \dots, 2^{n-1})$ が次の様に定義出来たとする: (α) $A_{n,k} \in \mathcal{F}_n$; (β) $\{A_{n,k}\}_k$ は互に素; (γ) $\bigcup_k A_{n,k} = \Omega$; (δ) $\mathbb{P}(A_{n,k}) = 2^{-(n-1)}$. このとき, $A_{n+1,k} \in \mathcal{F}_{n+1} (k=1, 2, \dots, 2^n)$ を次で決める: (α') $A_{n+1,k}$ は互に素; (β') $A_{n,k} = A_{n+1,2k-1} \cup A_{n+1,2k} (k=1, 2, \dots, 2^{n-1})$; (γ') すべての $k=1, 2, \dots, 2^{n-1}$ に対して, $\mathbb{E}[\mathbb{I}_{A_{n+1,2k-1}} / \mathcal{F}_n] = \frac{1}{2} \mathbb{I}_{A_{n,k}}$. この方法で定義された集合系 $\{A_{n,k}\}$ を (\mathcal{F}_n) tree と呼び. 今:

$$u_{n,k} = 2^{(n-1)/2} \mathbb{I}_{A_{n,k}}$$

とおく. この $u_{n,k}$ は $|h_{n,k}|$ に対応するものと考えられる. この $u_{n,k}$ を槌子として Haar 函数からの歪みを測ることが出来る.

定理 C. $(A_{n,k}; n=1, 2, \dots; k=1, 2, \dots, 2^{n-1})$ を (\mathcal{F}_n) tree とし,

$\phi_{n,k} \in L_\infty(\mathcal{F}_0)$ は次の性質を持つと仮定する: (a) $\phi_{n,k}$ は $L_2(\mathcal{F}_0)$ の直交系; (b) $\|\phi_{n,k} - u_{n,k}\|_2 \leq C 4^{-n}$; (c) $|\phi_{n,k}| \leq u_{n,k}$

$+ c4^{-n}$; (d) $|\phi_{n,k} - (\mathbb{E}[\phi_{n,k} | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[\phi_{n,k} | \mathcal{F}_{n-1}])| \leq c4^{-n}$. このとき、 c が充分小さければ (例えば $c \leq 1/16$), 任意の $f = \alpha_0 + \sum \alpha_{n,k} \phi_{n,k}$, $g = \alpha_0 + \sum \alpha_{n,k} h_{n,k}$ (有限和) に対して、 $4^{-1} \|g\|_{H_1(\delta)} \leq \|f\|_{H_1[\mathcal{F}_n]} \leq 4 \|g\|_{H_1(\delta)}$ 及び $\|f\|_{BMO[\mathcal{F}_n]} \leq 4 \|g\|_{BMO(\delta)}$ が成立する。更に、 1 と $\{\phi_{n,k}\}$ から生成された $H_1[\mathcal{F}_n]$ の閉部分空間 \mathbb{X} への ($H_1[\mathcal{F}_n]$ からの) 直交射影 $Qf = \mathbb{E}(f) + \sum \mathbb{E}(f \bar{\phi}_{n,k}) \phi_{n,k}$ は有界で、実際 $\|Q\| \leq 18\sqrt{2}$ ($c \leq 1/16$ として)。従って、 \mathbb{X} は $H_1[\mathcal{F}_n]$ の complemented subspace である。

2°) 具体的構成. $H_1(\mathbb{D})$ の元にその境界値を対応させることにより次の $H_1(\mathbb{T})$ と同一視出来る:

$$H_1(\mathbb{T}) = \{f \in L_1(\mathbb{T}) : \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-n i \theta} d\theta/2\pi = 0, n=1, 2, \dots\}.$$

我々はこの $H_1(\mathbb{T})$ の中に定理 C の条件を満たす「菱形 Haar 系」 $\phi_{n,k}$ を構成する。即ち、 $\mathcal{B}_n = \mathbb{T}$ 上の区間から生成された有限代数; $\phi_{n,k} = H_0(\mathbb{T})$ の直交系; $(A_{n,k}) = (\mathcal{B}_n)$ tree; $R_n =$ 下で定義される乗法作用素 Q_{l_n} , を帰納的に定義して行く。そのために、Stein の乗数定理 (multiplier theorem) を用いる。

補題 1. 定数 K , 整数列 $0 \leq c_0 \leq a_0 \leq b_0 \leq d_0 < c_1 \leq \dots < c_n \leq a_n \leq b_n \leq d_n < c_{n+1} \leq \dots$ と $H_1(\mathbb{T})$ 上の線型作用素列 $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して、 $\lim_n (b_n - a_n) = +\infty$; $Q_0 f = \int_0^{2\pi} f \cdot d\theta/2\pi$; $Q_n(e^{ik\theta}) = e^{ik\theta}$ ($k \in [a_n, b_n]$), $= 0$ ($k \notin [c_n, d_n]$); 且つすべての $f \in H_1(\mathbb{T})$ に対しての複素数列 $\{\theta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $|\theta_n| = 1$, K に対し $\|\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n Q_n f\|_1 \leq$

K かつ $\| \cdot \|_1$ が成立つ。(例へば、 $c_n = \frac{3}{4} 2^{2n}$, $a_n = 2^{2n}$, $b_n = 2^{2n+1}$, $d_n = \frac{5}{4} 2^{2n+1}$ など。)

これを利用した具体的構成は次の通りである。まづ、 $B_0 = (\phi, \mathbb{T})$, $R_0 = Q_0$ とする。 n 段階まで出来たとしてそれを

$$B_n, \phi_{n,k}, A_{n,k}, R_n = Q_{l_n}$$

とする。このとき $n+1$ 段階を構成するため、 $A = A_{n,k}$ を任意に一つ取って固定する。この A を B_n の atom に分解して $A = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}$ とおく。この各 B_{α} は \mathbb{T} 上の区間の形をしてゐる。そこで各 B_{α} を互に書で同じ長さの区間 $B'_{\alpha}, B''_{\alpha}$ に分割し、

$$A_{n+1,2k-1} (= A') \equiv \bigcup_{\alpha} B'_{\alpha}, \quad A_{n+1,2k} (= A'') \equiv \bigcup_{\alpha} B''_{\alpha}$$

とおき、 k を動かして $\{A_{n+1,j} : j=1, 2, \dots, 2^n\}$ が出来た。次に $\phi_{n+1,j}$ を作るために、

$$u_{n+1,2k-1} = u' \equiv 2^{n/2} \mathbb{1}_{A'}, \quad u_{n+1,2k} = u'' \equiv 2^{n/2} \mathbb{1}_{A''}$$

とおき、これを三角多項式で L_2 近似する。即ち、三角多項式 $P_{A'}, P_{A''}$ ($e^{ik\theta}$ の線型結合) で

$$\|u' - P_{A'}\|_2 \leq c 4^{-n-1}, \quad |P_{A'}| \leq u' + c 4^{-n-1}$$

$$\|u'' - P_{A''}\|_2 \leq c 4^{-n-1}, \quad |P_{A''}| \leq u'' + c 4^{-n-1}$$

を満たすものを選ぶ。また、 $m', m'' \in \mathbb{N}$, $l_{n+1} (> l_n)$ を充分大きく取り、 $e^{im'\theta} P_{A'}, e^{im''\theta} P_{A''}$ (すべての $k=1, 2, \dots, 2^{n-1}$ にわたって) のスペクトルは $[a_{l_{n+1}}, b_{l_{n+1}}]$ の互に素な部分集合になるやうに、

$$\phi_{n+1,2k-1} = e^{im'\theta} P_{A'}, \quad \phi_{n+1,2k} = e^{im''\theta} P_{A''}, \quad R_{n+1} = \mathcal{Q}_{d_{n+1}}$$

と置く。終りに、 \mathcal{B}_{n+1} は \mathbb{T} の有限個の区間から生成された σ 集合族で \mathcal{B}_n と $\{A_{n+1,j} : j=1,2,\dots,2^n\}$ を含み、且つスペクトルが $[0, d_{n+1}]$ に含まれるすべての三角多項式 g に対し

$$|g - \mathbb{E}[g/\mathcal{B}_{n+1}]| \leq 2^{-n-1} \|g\|_1$$

を満たし、更に

$$|\phi_{n+1,j} - \mathbb{E}[\phi_{n+1,j}/\mathcal{B}_{n+1}]| \leq c 4^{-n-1} \quad (j=1,2,\dots,2^n)$$

も満たすものとする。これは区間を充分細かくすることにより常に可能である。これで帰納的定義は完結した。

構成法から我々の $\phi_{n,k}$ は次の性質を持つことが分かる：

- (a') $\phi_{n,k}$ は $L_2(\mathbb{T})$ の直交系； (b') $\|u_{n,k} - |\phi_{n,k}|\|_2 \leq c 4^{-n}$ ； (c') $|\phi_{n,k}| \leq u_{n,k} + c 4^{-n}$ ； (d') $|\phi_{n,k} - \mathbb{E}[\phi_{n,k}/\mathcal{B}_n]| \leq c 4^{-n}$ 。定理 C の条件と比較すると、残る問題は $\mathbb{E}[\phi_{n,k}/\mathcal{B}_{n-1}]$ の評価であるが、これは上の構成法では制御出来ない量であるから、別に工夫する。即ち、 $\Omega = \mathbb{T} \times [0, 1]$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}_n \otimes \mathcal{A}_n$, $\mathbb{P} = \frac{d\theta}{2\pi} \otimes dt$ とし、 $\tilde{A}_{n,k} = A_{n,k} \times [0, 1]$, $\psi_{n,k} = \phi_{n,k} \otimes r_n$ (r_n は Rademacher 函数), $\mathbb{T}_n f = (R_n f) \otimes r_n$ ($\forall f \in H_1(\mathbb{T})$) 且つ $\mathbb{T}f = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{T}_n f$ とおく。このとき、 $(\psi_{n,k})$ は ($H_1(\mathbb{T})$ ではなく) $H_1([\mathcal{F}_n])$ の函数系で定理 C の条件を満たすものである。問題は条件 (d) だけであるが、

$$\mathbb{E}[\psi_{n,k}/\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\phi_{n,k}/\mathcal{B}_n] \otimes \mathbb{E}[r_n/\mathcal{A}_n] = \mathbb{E}[\phi_{n,k}/\mathcal{B}_n] \otimes r_n,$$

$$\mathbb{E}[\psi_{n,k}/\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\phi_{n,k}/\mathcal{B}_{n-1}] \otimes \mathbb{E}[r_n/\mathcal{A}_{n-1}] = 0$$

があるから、上の (d') と併せて (d) を得る。故に $\{1, \psi_{n,k}\}$ は Haar 函数系 $\{1, \phi_{n,k}\}$ と同等である。従って、 $c \leq 1/16$ とし、 $|\theta_0| = |\theta_{n,k}| = 1$ とおいて

$$\begin{aligned} \|\alpha_0 \theta_0 + \sum \alpha_{n,k} \theta_{n,k} \psi_{n,k}\|_{H_1[\mathcal{F}_n]} &\leq 4 \|\alpha_0 \theta_0 + \sum \alpha_{n,k} \theta_{n,k} \phi_{n,k}\|_{H_1(\delta)} \\ &= 4 \|\alpha_0 + \sum \alpha_{n,k} \phi_{n,k}\|_{H_1(\delta)} \leq 16 \|\alpha_0 + \sum \alpha_{n,k} \psi_{n,k}\|_{H_1[\mathcal{F}_n]} \end{aligned}$$

となるから、 $\{1, \psi_{n,k}\}$ はこれらから生成された $H_1[\mathcal{F}_n]$ の閉部分空間の無条件基底で、その無条件性定数は ≤ 16 であることが分かった。これからまた

$$\|(1\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\sum_k \alpha_{n,k} \psi_{n,k}|^2)^{1/2}\|_1 \leq 16\sqrt{2} B \|\alpha_0 + \sum \alpha_{n,k} \psi_{n,k}\|_{H_1[\mathcal{F}_n]}$$

が出る。ここで B は $\|g\|_1 \leq B \|g\|_{H_1[\mathcal{F}_n]}$ ($\forall g \in H_1[\mathcal{F}_n]$) なる定数である。

一方、任意の $f \in H_1(\mathbb{I})$ に対し、 $(T_n f)_{n=0}^{\infty}$ は次の意味で近似的 martingale をなす： $|T_n f - \mathbb{E}[T_n f / \mathcal{F}_n]| = |(R_n f - \mathbb{E}[R_n f / \mathcal{B}_n]) \otimes R_n| \leq 2^{-n} \|R_n f\|_1 = 2^{-n} \|T_n f\|_1$, $n=1, 2, \dots$, 従って、 $T_0 f$ は定数。これから、 $\|T f\|_{H_1[\mathcal{F}_n]} \leq \|\sum_{n=0}^{\infty} T_n f\|_{H_1[\mathcal{F}_n]} \leq 5\sqrt{2} K \|f\|_1$ (K は補題 1 の定数) が得られる。即ち、 $T: H_1(\mathbb{I}) \rightarrow H_1[\mathcal{F}_n]$ は連続である。

命題 2. $H_1(\delta)$ は $H_1(\mathbb{I})$ の complemented subspace に同型である。

証明. 1 と $(\phi_{n,k})$ から生成された $H_1(\mathbb{I})$ の閉部分空間を \mathbb{X} とおく。いま $x = \alpha_0 + \sum \alpha_{n,k} \phi_{n,k}$ (有限和) とすれば、 $R_n x = \sum_k \alpha_{n,k} \phi_{n,k}$ であるから、 $y = \alpha_0 \theta_0 + \sum \theta_{n,k} R_n f$ ($|\theta_0| = |\theta_{n,k}| = 1$)

として、 $\|x\|_1 = \|\sum \theta_n R_n y\|_1 \leq K \|y\|_1 = K \|\theta_0 \alpha_0 + \sum \theta_n \alpha_{n,k} \phi_{n,k}\|_1$.

<>で θ_n を Rademacher 函数 r_n に置きかへると、

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \int_0^1 \|x\|_1 dt \leq K \int_0^1 \|\mathcal{I}_0(t) \alpha_0 + \sum_n r_n(t) (\sum_k \alpha_{n,k} \phi_{n,k})\|_1 dt \\ &= K \mathbb{E} \left[\int_0^1 |\mathcal{I}_0(t) \alpha_0 + \sum_n r_n(t) (\sum_k \alpha_{n,k} \phi_{n,k})| dt \right] \\ &\leq K \mathbb{E} \left[(|\alpha_0|^2 + \sum_n |\sum_k \alpha_{n,k} \phi_{n,k}|^2)^{1/2} \right] \\ &= K \mathbb{E} \left[(|\alpha_0|^2 + \sum_n |\sum_k \alpha_{n,k} \psi_{n,k}|^2)^{1/2} \right] \\ &\leq 16\sqrt{2} BK \|\alpha_0 + \sum \alpha_{n,k} \psi_{n,k}\|_{H_1[\mathcal{F}_n]} = 16\sqrt{2} BK \|Tx\|_{H_1[\mathcal{F}_n]}. \end{aligned}$$

また前に $\|Tx\|_{H_1[\mathcal{F}_n]} \leq 5\sqrt{2} K \|x\|_1$ を示したから、 $x \mapsto Tx$ は X から $H_1[\mathcal{F}_n]$ の中への同型対応であることが示された。T の像 $T(X)$ は 1 と $(\psi_{n,k})$ から生成されたもので、それは $H_1(\mathcal{D})$ と同型になってみたから、T は X から $H_1(\mathcal{D})$ への同型対応であると言ったより。最後に T の X への制限の逆作用素を U と書けば、定理 C によって存在する Q により $P = UQ T$ と定義すれば、P は $H_1(\mathcal{D})$ から X の上への連続な射影で、従って X が $H_1(\mathcal{D})$ の complemented subspace であることが分かった。(証明終)

6. $H_1(\mathbb{D})$ が $H_1(\mathcal{D})$ の complemented subspace に同型になること。 目的を達成するために、 $H_1(\mathbb{D})$ を 離散 martingale 型の H_1 に変へる。そのために、 \mathbb{C} 上の Brown 運動 Z_t を原点から出発するものを含め $X_t, t \geq 0$, と書く。方針は X_t の \mathbb{D} 内の部分を離散過程 Z_n で近似し、 Z_n から生成された集合族の系 $\tilde{\mathcal{F}}_n = \sigma(Z_0, \dots, Z_n)$

が二進集合族 (X_n) の中に同型に埋め込まれ、しかも任意の $f \in H_1(\mathbb{D})$ に対し、 f の X_t に沿った振舞は f の Z_n に沿った振舞により誤差 ε 以内 (正確には $\varepsilon \|f\|_1$ 以内) で近似されるやうに工夫することである。

さて、 $0 < \varepsilon < 1/2$ を任意に固定し、 $x \in \mathbb{D}$ に対して $\rho(x) = \varepsilon(1-|x|)^2/2$, $D(x)$ を中心 x , 半径 $\rho(x)$ の開円板, $S(x)$ を $D(x)$ の境界とする。この $\rho(x)$ が有効な理由は次にある。

補題 2. $y \in \overline{D(x)}$ ならば、 $\rho(y) \geq \rho(x)/2$ であり、すべての $f \in H_1(\mathbb{D})$ に対して $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \|f\|_1$ 。

これは $D(x)$ 上での f の振動量が f の詳しい形には無関係に $\varepsilon \|f\|_1$ で抑えられることを示してゐて、従って $D(x)$ 内で X_t の道を多少変更しても f の行動の記述には支障がないことが分かる。さて $N = 2^6$ (ε の大きい中ならば何でもよい) とし、帰納的に次の構成を行ふ。

- (a) stopping time の列 τ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ 。
 (b) 確率変数の列 Z_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ 。各 Z_n は \mathbb{D} 内の有限個の値のみを取り、 $\tilde{\mathcal{F}}_n \equiv \sigma(Z_0, \dots, Z_n) \subseteq \mathcal{F}_{\tau_n}$ 。但し $\mathcal{F}_t \equiv \sigma(X_u; u \leq t)$ である。

- (c) $n \geq 1$ に対し、 $S(Z_{n-1}(\omega))$ は N 個の区間 $I_j(Z_{n-1}(\omega))$, $j = 1, 2, \dots, N$, に分割されて、 $|I_j(Z_{n-1}(\omega))| \leq \rho(Z_{n-1}(\omega))/2$ を満たし、 $I_j(Z_{n-1}(\omega))$ の中点を $z_j(Z_{n-1}(\omega))$ と書くとき、 Z_n は

$Z_n = z_j(Z_{n-1}) \Leftrightarrow X_{\tau_n} \in I_j(Z_{n-1})$ を満たす。更に $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ 内のすべての atom B に対して、 $P(X_{\tau_n} \in I_j(Z_{n-1}) | B) = 1/N$ が成立つ。

補題 3. (a), (b), (c) を満たす構成は可能である。

証明. $\tau_0(\omega) \equiv 0$, $Z_0(\omega) \equiv 0$, 従って $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ として帰納法を始める。まず第一段階を述べる。 τ_1 を $S(0)$ への到達時刻 (hitting time) とする。次に、 $S(0)$ を N 個の互に素で等長の区間 $I_j(0)$ に分割し、 $I_j(0)$ の中点を $z_j(0)$ と書く。このとき、 $|I_j(0)| = 2\pi\rho(0)/N < \rho(0)/2$ 。そこで、 $Z_1(\omega)$ を $Z_1(\omega) = z_j(0) \Leftrightarrow X_{\tau_1(\omega)} \in I_j(0)$ によって定義する。 $\tilde{\mathcal{F}}_1 \equiv \sigma(Z_0, Z_1) = \sigma(Z_1)$ は N 個の atom $\{X_{\tau_1} \in I_j(0)\}$, $j=1, \dots, N$, より生成され、Brown 運動の対称性から $P(X_{\tau_1} \in I_j(Z_0)) = 1/N$, $j=1, \dots, N$, を得る。

さて第 n 段階まで構成出来たとして、第 $n+1$ 段階の構成を行う。そのため、 $\tilde{\mathcal{F}}_n$ の atom B^* を任意に固定し、 B^* を含む $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ の atom を B' と書く。このとき、 Z_n, Z_{n-1} は夫々 B^*, B' の上で一定で、それぞれを夫々 z^*, z' とおく。帰納法の仮定から、 z^* は円周 $S(z')$ 上の区間 $I (= I_j(z'))$ の中点で、 $|I| \leq \rho(z')/2$ 且つ $\omega \in B'$ に対して $Z_n(\omega) = z^* \Leftrightarrow X_{\tau_n(\omega)} \in I$ を満たしてゐる。さて、 $\omega \in B^*$ に対して

$$\tau_{n+1}(\omega) = \inf \{ t > \tau_n(\omega) : X_t(\omega) \in S(z^*) \}$$

と定義する。補題 2 により $\rho(z')/2 \leq \rho(z^*)$ であるから、 I は中心 z^* , 半径 $\rho(z^*)/2$ の円板に含まれてゐる。従つて、Brown

運動の到達確率についての角谷の定理と調和函数についての Harnack の不等式から、任意の $A \subset S(z^*)$ に対して

$$(*) \quad P(A)/3 \leq \mathbb{P}(X_{\tau_{n+1}} \in A \mid B^*) \leq 3P(A)$$

が成立つ。即ち、 $A \mapsto \mathbb{P}(X_{\tau_{n+1}} \in A \mid B^*)$ は $S(z^*)$ の弧長と比較可能となるから、 $S(z^*)$ を N 個の区間 $I_j(z^*)$, $j=1, \dots, N$, に分割して

$$\mathbb{P}(X_{\tau_{n+1}} \in I_j(z^*) \mid B^*) = 1/N, \quad j=1, \dots, N,$$

を成立せしめることが出来る。この区間の長さについては、(*) より $|I_j(z^*)| \leq$

$$3 \cdot 2\pi \rho(z^*) \cdot \mathbb{P}(X_{\tau_{n+1}} \in I_j(z^*) \mid B^*) \leq \frac{6\pi}{N} \rho(z^*) < \rho(z^*)/2. \quad \text{即ち、}$$

$\omega \in B^*$ に対して $|I_j(z_n(\omega))| \leq \rho(z_n(\omega))/2$ 。終りに、函数 Z_{n+1}

の B^* 上での値は $Z_{n+1}(\omega) = z_j(z^*) \Leftrightarrow X_{\tau_{n+1}}(\omega) \in I_j(z^*)$ で定義

するものとする。この定義を $\tilde{\mathcal{F}}_n$ のすべての atom B^* に対して

実行し、 $\tilde{\mathcal{F}}_{n+1} = \sigma(Z_0, \dots, Z_{n+1})$ とおく。このとき、(i) τ_{n+1}

が (\mathcal{F}_t) -stopping time であること、(ii) Z_{n+1} は $\mathcal{F}_{\tau_{n+1}}$ 可測で、

従って $\tilde{\mathcal{F}}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_{n+1}}$ であること、及び (iii) $\tilde{\mathcal{F}}_n$ のすべての

atom B^* は同一の確率 $\mathbb{P}(B^*)/N$ を持つ $\tilde{\mathcal{F}}_{n+1}$ の N 個の atom

に分割させること、の三点が型通りの論法で示される。(証明終)

これだけの準備の下に、 $H_1(D)$ を $H_1(D)$ の complemented sub-space に二段に分けて埋込む。これを二節に分けて述べる。

7. $H_1[\tilde{\mathcal{F}}_n]$ への埋込み。 X_t の単位円周への到達時刻を τ とする。即ち、 $\tau(\omega) = \inf\{t > 0 : |X_t(\omega)| = 1\}$ 。 $F \in L_1(\mathcal{F}_\tau)$ に対し、

$$\|F\|_{H_1} = \mathbb{E} \left(\sup_{t \geq 0} |\mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau}]| \right) \quad \text{とおき、} \quad H_1[(\mathcal{F}_{t \wedge \tau})] = \{F \in L_1(\mathcal{F}_\tau) :$$

$\|f\|_{H_1} < \infty$ と定義する。これは $\|\cdot\|_{H_1}$ を norm として Banach 空間となる、このとき、次の命題は既知である。

命題 3. 次の性質を持つ定数 $K > 0$ が存在する。(i) 任意の $f \in H_1(\mathbb{D})$ に対し $f(X_{t \wedge \tau}) = \mathbb{E}[f(X_\tau) | \mathcal{F}_{t \wedge \tau}]$ で且つ $K^{-1} \|f\|_1 \leq \|f(X_\tau)\|_{H_1} \leq K \|f\|_1$. (ii) 上の f が $BMO(\mathbb{D})$ に属すれば、 $f(X_\tau) \in BMO[\mathcal{F}_{t \wedge \tau}]$ で且つ $K^{-1} \|f\|_{BMO} \leq \|f(X_\tau)\|_{BMO} \leq K \|f\|_{BMO}$. 但し、 $\|f(X_\tau)\|_{BMO} = \|\max\{|f(0)|, \sup_{t>0} \mathbb{E}(|f(X_\tau) - f(X_{t \wedge \tau})|^2 | \mathcal{F}_{t \wedge \tau})\}^{1/2}\|_\infty$ である。

さて、 τ_n の定義から

$$(**) \quad \rho(Z_n)/2 \leq |X_{\tau_{n+1}} - X_{\tau_n}| \leq |X_{\tau_{n+1}} - Z_n| = \rho(Z_n)$$

であることが分かる。 (X_{τ_n}) は有界な martingale だから a.s. 収束し、従って $\rho(Z_n) \rightarrow 0$ a.s. を得る。これから $|Z_n| \rightarrow 1$ a.s. 再び (**) より、 $|X_{\tau_n}| \rightarrow 1$ a.s. を得るから、 $\tau_n \rightarrow \tau$ a.s.

そこで、 $F_n = \mathbb{E}[X_\tau | \tilde{\mathcal{F}}_n]$, $n=0, 1, \dots$ とおくと、 $\tilde{\mathcal{F}}_n$ の任意の atom B に対し $\{X_{\tau_n(\omega)}(\omega) : \omega \in B\}$ は半径 $\rho(Z_n(\omega'))/2$ ($\omega' \in B$) の円板に含まれるから、 $|F_n - X_{\tau_n}| = |\mathbb{E}[X_{\tau_n}] - X_{\tau_n}| \leq \rho(Z_n)$ となり $\rho(Z_n) \rightarrow 0$ a.s. を用いて、 $X_\tau = \lim X_{\tau_n} = \lim F_n$ a.s. 故に、 X_τ は $\tilde{\mathcal{F}}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{F}}_n$ について可測である。

そこで $H_1[\tilde{\mathcal{F}}_\infty]$ を考える。これは norm を maximal function 型に入れらることにより、

$$H_1[\tilde{\mathcal{F}}_\infty] = \{F \in L_1(\tilde{\mathcal{F}}_\infty) : \mathbb{E}(\sup_n |\mathbb{E}[F | \tilde{\mathcal{F}}_n]|) < \infty\}$$

で定義される。norm は $\|F\|_{H_1[\tilde{\mathcal{F}}_n]} = \mathbb{E}[\sup_n |\mathbb{E}[F|\tilde{\mathcal{F}}_n]|]$ である。

また、 $\|F\|_{BMO[\tilde{\mathcal{F}}_n]} = \|\max\{|\mathbb{E}[F]|, \sup_n (\mathbb{E}(|F - \mathbb{E}[F|\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}]|^2|\tilde{\mathcal{F}}_n))^{1/2}\}\|_\infty$ として

$$BMO[\tilde{\mathcal{F}}_n] = \{F \in L_2(\tilde{\mathcal{F}}_n) : \|F\|_{BMO[\tilde{\mathcal{F}}_n]} < \infty\}$$

と定義する。

補題 4. $f \in H_1(\mathbb{D})$ に対し $f_n = \mathbb{E}[f(X_{\tau_n})|\tilde{\mathcal{F}}_n]$, $n=0, 1, \dots$, として

$$|f_n - f(X_{\tau_n})| \leq \varepsilon \|f\|_1.$$

証明. B を $\tilde{\mathcal{F}}_n$ の任意の atom とすれば、 $\tilde{\mathcal{F}}_n \subseteq \mathcal{F}_{\tau_n}$ だから、

$$B \text{ 上では } f_n = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{\tau_n})|\mathcal{F}_{\tau_n}]|\tilde{\mathcal{F}}_n] = \mathbb{E}[f(X_{\tau_n})|\tilde{\mathcal{F}}_n]$$

$$= \mathbb{P}(B)^{-1} \int_B f(X_{\tau_n}). \quad \omega \in B \text{ のとき } X_{\tau_n(\omega)}(\omega) \text{ は同一の } D(x) \text{ に}$$

含まれておるので、その上での f の振動量は $\varepsilon \|f\|_1$ 以下となり、

求める結果を得る。(証明終)

本節の目的は次の命題である。

命題 4. $\varepsilon > 0$ を充分小さくすれば、次の性質を持つ定数

$M > 0$ が存在する。

(a) 任意の $f \in H_1(\mathbb{D})$ に対し、 $M^{-1} \|f\|_1 \leq \|f(X_{\tau})\|_{H_1[\tilde{\mathcal{F}}_n]} \leq M \|f\|_1$.

(b) 任意の $g \in BMO(\mathbb{D})$ に対し、 $\|g(X_{\tau})\|_{BMO[\tilde{\mathcal{F}}_n]} \leq M \|g\|_{BMO}$.

証明. (a) $f \in H_1(\mathbb{D})$ を任意に取る。 $\tau_n(\omega) \leq t \leq \tau_{n+1}(\omega)$ ならば $X_t(\omega) \in D(Z_n(\omega))$ だから、 $|f(X_t(\omega)) - f(X_{\tau_n}(\omega))| \leq \varepsilon \|f\|_1$ であり、従って、 $\sup\{|f(X_t)| : \tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}\} \leq |f(X_{\tau_n})| + \varepsilon \|f\|_1$.

よって、 $\sup\{|f(X_t)| : \tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}\} \leq |f(X_{\tau_n})| + \varepsilon \|f\|_1$.

よって、補題 4 と命題 3, (i) を参照して

$$\|f(X_{\tau})\|_{H_1} = \mathbb{E}[\sup_{t \geq 0} |f(X_{t \wedge \tau})|] = \mathbb{E}[\sup_n [\sup\{|f(X_t)| : \tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}\}]]$$

$$\leq \mathbb{E}[\sup_n |f(X_{\tau_n})|] + \varepsilon \|f\|_1 \leq \mathbb{E}[\sup_n |f_n|] + 2\varepsilon K \|f(X_\tau)\|_{H_1}$$

従って、 $\varepsilon \leq 1/4K$ とすれば 命題 3, (i) をもう一度使う。

$$K^{-1} \|f\|_1 \leq \|f(X_\tau)\|_{H_1} \leq 2 \mathbb{E}[\sup_n |f_n|] = 2 \|f(X_\tau)\|_{H_1[\tilde{\mathcal{F}}_n]}$$

一方、補題 4 と 命題 3, (i) から

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_n |f_n|] &\leq \mathbb{E}[\sup_n |f(X_{\tau_n})|] + \varepsilon \|f\|_1 \leq \mathbb{E}[\sup_{t \geq 0} |f(X_{t \wedge \tau})|] + \varepsilon \|f\|_1 \\ &\leq (K + \varepsilon) \|f\|_1 \end{aligned}$$

を得るから、 $M = 2K$ として (a) が成立する。

(b) $g \in \text{BMO}(\mathbb{D})$ とし、 $\|g(X_\tau)\|_{\text{BMO}} \leq 1$ を仮定する。 $\gamma \leq \tau$ なる stopping time γ に対し、 $g(X_{t \wedge \tau}) = g(0) + \int_0^t g'(X_s) dX_{s \wedge \tau}$ より、 $\mathbb{E}[g(X_\tau) | \mathcal{F}_\gamma] = g(0) + \int_0^\infty g'(X_s) dX_{s \wedge \gamma}$ を得るから、

$$\mathbb{E}[|g(X_\tau) - \mathbb{E}[g(X_\tau) | \mathcal{F}_\gamma]|^2] = \mathbb{E}[\int_\gamma^\tau |g'(X_s)|^2 ds]$$

よって、 $\sigma \leq \tau$ なる stopping time σ と任意の $A \in \mathcal{F}_\sigma$ に対し、新たな stopping time γ を $\gamma(\omega) = \sigma(\omega)$ ($\omega \in A$), $\gamma(\omega) = \tau(\omega)$ ($\omega \in \Omega \setminus A$) で定義すれば、上式と $\|g(X_\tau)\|_{\text{BMO}} \leq 1$ より

$$(\#) \quad \mathbb{E}[\int_\sigma^\tau |g'(X_s)|^2 ds | \mathcal{F}_\sigma] \leq 1.$$

さて、 $\sigma = 0$ のとき $\|g - g(0)\|_1 \leq \|g - g(0)\|_2 = [\int |g(X_\tau) - g(0)|^2 d\mathbb{P}]^{1/2} = \mathbb{E}[\int_0^\tau |g'(X_s)|^2 ds]^{1/2} \leq 1$ 。また、 $g_n = \mathbb{E}[g(X_\tau) | \tilde{\mathcal{F}}_n]$ とおくと、まず $|g_0| = |g(0)| \leq 1$ 。 $n \geq 1$ のときは、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|g(X_\tau) - g_{n-1}|^2 | \tilde{\mathcal{F}}_n] &= \mathbb{E}[|g(X_\tau) - g_n|^2 | \tilde{\mathcal{F}}_n] + |g_n - g_{n-1}|^2 \\ &= \mathbb{E}[|g(X_\tau)|^2 | \tilde{\mathcal{F}}_n] - |g_n|^2 + |g_n - g_{n-1}|^2. \end{aligned}$$

補題 2 と 4 から $|g_n - g_{n-1}| \leq |g_n - g(X_{\tau_n})| + |g(X_{\tau_n}) - g(X_{\tau_{n-1}})|$

$+ |g(X_{\tau_{n-1}}) - g_{n-1}| \leq 3\varepsilon$, 更 K (#) より $\mathbb{E}[|g(X_{\tau_n})|^2 | \mathcal{F}_{\tau_n}] =$
 $|g(X_{\tau_n})|^2 + \mathbb{E}[\int_{\tau_n}^{\tau} |g'(X_s)|^2 ds | \mathcal{F}_{\tau_n}] \leq |g(X_{\tau_n})|^2 + 1$. これから,
 $\mathbb{E}[|g(X_{\tau_n})|^2 | \tilde{\mathcal{F}}_n] - |g_n|^2 = \mathbb{E}[\mathbb{E}[|g(X_{\tau_n})|^2 | \mathcal{F}_{\tau_n}] | \tilde{\mathcal{F}}_n] - |g_n|^2 \leq$
 $\mathbb{E}[|g(X_{\tau_n})|^2 | \tilde{\mathcal{F}}_n] + 1 - |g_n|^2 \leq \mathbb{E}[|g(X_{\tau_n}) - g_n|^2 | \tilde{\mathcal{F}}_n] + 1 \leq 1 + \varepsilon^2$.
 故に, $\mathbb{E}[|g(X_{\tau_n}) - g_{n-1}|^2 | \tilde{\mathcal{F}}_n] \leq 1 + \varepsilon^2 + (3\varepsilon)^2 = 1 + 10\varepsilon^2$. これと
 命題 3, (ii) より,

$$\|g(X_{\tau_n})\|_{\text{BMO}[\tilde{\mathcal{F}}_n]} \leq (1 + 10\varepsilon^2)^{1/2} \|g(X_{\tau_n})\|_{\text{BMO}} \leq (1 + 10\varepsilon^2)^{1/2} K \|g\|_{\text{BMO}}.$$

故に再び $M = 2K$ と $L = 2$ (b) が成立する。(証明終)

前命題の (a) は $E_1 = \{f(X_{\tau}) : f \in H_1(\mathbb{D})\}$ が $H_1(\mathbb{D})$ と同型な
 $H_1[\tilde{\mathcal{F}}_n]$ の部分空間であることを示してある。この E_1 は
 complemented である。実際, $E_2 = \{f(X_{\tau}) : f \in H_2(\mathbb{D})\}$ とおくと,
 E_2 は $L_2(\tilde{\mathcal{F}}_0)$ の閉部分空間であるから, $L_2(\tilde{\mathcal{F}}_0)$ から E_2
 への直交射影を Q とする。このとき, Q は $H_1[\tilde{\mathcal{F}}_n]$ の norm K
 によって連続であることを示す。 $F \in L_2(\tilde{\mathcal{F}}_0)$ に対し $QF =$
 $h(X_{\tau})$ を満たす $h \in H_2(\mathbb{D})$ を取ると

$$\begin{aligned}
 \|QF\|_{H_1[\tilde{\mathcal{F}}_n]} &= \|h(X_{\tau})\|_{H_1[\tilde{\mathcal{F}}_n]} \leq M \|h\|_1 \\
 &\leq MC \sup \left\{ \left| \int_0^{2\pi} h \bar{g} \, d\theta / 2\pi \right| : \|g\|_{\text{BMO}} \leq 1 \right\} \\
 &\leq MC \sup \left\{ |\mathbb{E}[h(X_{\tau}) \overline{g(X_{\tau})}]| : \|g(X_{\tau})\|_{\text{BMO}[\tilde{\mathcal{F}}_n]} \leq M \right\} \\
 &= MC \sup \left\{ |\mathbb{E}[F \cdot \overline{g(X_{\tau})}]| : \|g(X_{\tau})\|_{\text{BMO}[\tilde{\mathcal{F}}_n]} \leq M \right\} \\
 &\leq \sqrt{2} M^2 C \|F\|_{H_2[\tilde{\mathcal{F}}_n]}.
 \end{aligned}$$

故に Q は $H_1[\tilde{\mathcal{F}}_n]$ 連続で, 従って E_1 は complemented である。

8. $H_1(\delta)$ への埋込み。 終りに次の命題を示す。

命題 5. $H_1(\mathbb{D})$ は $H_1(\delta)$ の complemented subspace と同型である。

証明. $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$ の部分 σ 集合族の増加列 (\mathcal{B}_n) を次のように作る。 まず $\mathcal{B}_{6n} = \tilde{\mathcal{F}}_n$, $n = 0, 1, \dots$ とおく。 次に $6n < m < 6(n+1)$ とする。 B を $\tilde{\mathcal{F}}_n$ の atom とすると、構成法より $B = \bigcup_{j=1}^{64} B_j$, $\mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(B)/64$, なる $\tilde{\mathcal{F}}_{n+1}$ の atom B_j が一意に存在する。 ここで

$$C_k = \bigcup \{ B_j : (k-1) \cdot 2^{6(n+1)-m} + 1 \leq j \leq k \cdot 2^{6(n+1)-m} \}$$

($k = 1, 2, \dots, 2^{m-6n}$) とおき、 B を動かして出来る C_k の合併を atom とする σ 集合族を \mathcal{B}_m とかく。 このとき $(\mathcal{B}_m, \mathbb{P})$ は (\mathcal{A}_m, dt) と同型で、従って $H_1[(\mathcal{B}_m)] \cong H_1[(\mathcal{A}_m)] = H_1(\delta)$ 。 従って我々は $H_1(\mathbb{D})$ が $H_1[(\mathcal{B}_n)]$ の complemented subspace に同型なことを示せばよい。 これを二つに分けて示す。

(i) $f \in H_1(\mathbb{D})$ に対し、 $\|f(\mathcal{R}_\tau)\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]}$ と $\|f(\mathcal{R}_\tau)\|_{H_1[(\mathcal{B}_n)]}$ は同値である。 これを示すために、 $\tilde{f}_m = \mathbb{E}[f(\mathcal{R}_\tau) | \mathcal{B}_m]$, $m = 0, 1, \dots$ とおくと、

$$\|f(\mathcal{R}_\tau)\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]} = \mathbb{E}[\sup_n |f_{6n}^\sim|] \leq \mathbb{E}[\sup_n |f_n^\sim|] = \|f(\mathcal{R}_\tau)\|_{H_1[(\mathcal{B}_n)]}.$$

また、 $6n < m < 6(n+1)$ とすると、 $\tilde{f}_m = \mathbb{E}[\tilde{f}_{6(n+1)}^\sim | \mathcal{B}_m]$ 。 補題 4 により、 $|f_{6n}^\sim - f(\mathcal{R}_{\tau_n})| \leq \varepsilon \|f\|_2$, $|\tilde{f}_{6(n+1)}^\sim - f(\mathcal{R}_{\tau_{n+1}})| \leq \varepsilon \|f\|_2$ であるが、更に補題 2 により $|f(\mathcal{R}_{\tau_n}) - f(\mathcal{R}_{\tau_{n+1}})| \leq \varepsilon \|f\|_2$ であ

るから、 $|f_{6n} - f_{6(n+1)}| \leq 3\|f\|_1$ を得る。 $B' \in \mathcal{B}_m$ の atom とすれば、

f_m, f_{6n} は B' 上では一定だから、 B' 上では

$$\begin{aligned} |f_m - f_{6n}| &= |\mathbb{P}(B')^{-1}(\int_{B'} f_{6(n+1)} - \int_{B'} f_{6n})| \leq \mathbb{P}(B')^{-1} \int_{B'} |f_{6(n+1)} - f_{6n}| \\ &\leq 3\varepsilon \|f\|_1. \end{aligned}$$

故に、

$$\mathbb{E}[\sup_m |f_m|] \leq \mathbb{E}[\sup_n |f_{6n}|] + 3\varepsilon \|f\|_1 \leq (1+3M\varepsilon) \mathbb{E}[\sup_n |f_{6n}|].$$

これより、

$$\|f(\mathbb{R}_\tau)\|_{H_1[\tilde{\mathcal{F}}_n]} \leq \|f(\mathbb{R}_\tau)\|_{H_1[\mathcal{B}_n]} \leq (1+3M\varepsilon) \|f(\mathbb{R}_\tau)\|_{H_1[\tilde{\mathcal{F}}_n]}.$$

(ii) $E_1 = \{f(\mathbb{R}_\tau) : f \in H_1(\mathbb{D})\}$ は $H_1[\mathcal{B}_n]$ の complemented subspace である。 $\mathcal{Q} : L_2(\tilde{\mathcal{F}}_0) \rightarrow E_2$ を前と同様の直交射影とすると、これは $L_2(\tilde{\mathcal{F}}_0)$ に $\|\cdot\|_{H_1[\tilde{\mathcal{F}}_n]}$ をつけたものとして連続だから、それより一般に強い norm $\|\cdot\|_{H_1[\mathcal{B}_n]}$ としても連続である。故に E_1 は $H_1[\mathcal{B}_n]$ の中でも complemented である。(証明終)

これで定理 A と定理 B の証明も終わったことになる。

9. 結語。以上定理 A 及び B の Maurey の証明の概略を見に来た。原論文には更に多くの興味ある事案が述べられている。例へば、 $n \geq 1$ に対して、 $H_1(\mathbb{R}^m)$ や $H_1(S^n)$ (S^n は n 次元球面) はすべて $H_1(\delta)$ (従って $H_1(\mathbb{D})$) に同型であることなど。polydisk 乃至 torus についてはまだ問題が残っているやうである。即ち、 $m \neq n$ のとき $H_1(\mathbb{D}^m)$ と $H_1(\mathbb{D}^n)$ は同型か?

これにちなんで Bourgain は $m \geq 2$ ならば、 $H_1(\mathbb{R}^m)$ と $H_1(\mathbb{R})$ は同型になることを示した。一般にも同様の結果が成立つの2" はあるまいか?

参考文献

- [1] B. Maurey, *Isomorphismes entre espaces H^1* , *Acta Math.* 145 (1980), 79-120.
- [2] L. Carleson, *An explicit unconditional basis in H^1* , *Bull. Sci. Math.*, 2^e série, 104 (1980), 405-416.
- [3] P. Wojtaszczyk, *The Franklin system is an unconditional basis in H_1* , *Ark. för Mat.* 20 (1982), 293-300.
- [4] A. Pełczyński, *Banach Spaces of Analytic Functions and Absolutely Summing Operators*, CBMS Regional Conf. Series in Math. No. 30, Amer. Math. Soc., 1977.
- [5] A. Garsia, *Martingale Inequalities*, Benjamin, 1973.
- [6] K. E. Petersen, *Brownian Motion, Hardy Spaces and Bounded Mean Oscillation*, Cambridge Univ. Press, 1977.
- [7] J. Bourgain, *The non-isomorphism of H^1 -spaces in one and several variables*, *J. Functional Analysis* 46 (1982), 45-57.