

Optimal stopping の問題について

愛媛大・教養 森本宏明 (Hiroaki Morimoto)

§1. Stochastic control の一般論では取扱えない、一つの問題として optimal stopping の問題がある。 (X_t) を (1) diffusion process 又は (2) point process とするとき、利得 $J(T) = E[a(X_T) + \int_0^T b(s, X_s) ds]$ (T : stopping time) を最大にすることである。(1)の場合, [1], [2], [5] 等で論じられている。ここでは(2)の場合を含めて、マルチンゲール理論を適用する立場から論ずる。もっと一般的な問題の formulation をしよう。

Formulation (Ω, \mathcal{F}, P) を complete な確率空間, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ を \mathcal{F} の sub- σ -fields の増加列で通常の条件をみたすとする。 (X_t) を与えられた右連続, adapted process として $E[\sup_t X_t^+] < \infty$, $E[X_t^-] < \infty \quad \forall t \geq 0$, をみたすとする。以後 $X_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup X_t$ とみなす。

$$\bar{C} = \{T; \text{stopping time}, E[X_T] < \infty\},$$

$$C = \{T \in \bar{C}; \text{finite}\} \quad \text{とおく.}$$

利得を $J(T) = E[X_T]$ で定義するとき C 又は \bar{C} の中で利得を最大にせよ。

この問題の起源は Wald の Sequential Analysis (1947) にあり, Snell (1952) は (X_t) のかわりに r.v. の列 $(X_n)_{n=1,2,\dots}$ の場合に解決した。その考え方を deterministic な場合に述べよう。すなわち t で X_t は trivial とすると (X_t) は t のみの通常の一変数関数となる, 更に, $t \rightarrow X_t$ は連続としよう。 $Y_t = \sup_{s \geq t} X_s$ とおくと, Y_t は次の性質をもつ:

(1) $t \rightarrow Y_t$: 連続, 減少関数,

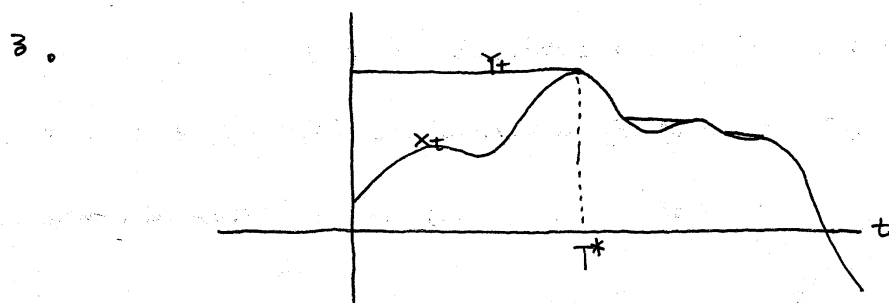
(2) $X_t \leq Y_t, \quad Y_t \geq 0,$

(3) $Y_0 = \sup_t X_t$.

$T^* = \inf \{t | X_t = Y_t\}$ とおくと, これが求めるもの,

optimal stopping time である。更に $X_t \rightarrow -\infty (t \rightarrow \infty)$

のときには $T^* < \infty$ 。事情を図式にすると次の様になる。



これを random 化しようとするのが Snell の考えである。
 即ち次の定理が成立する。

定理 1. 次の性質をもつ右連続 supermartingale (Y_t) が存在する:

$$(1) \quad X_t \leq Y_t, \quad \forall t \geq 0,$$

$$(2) \quad Y_t = \operatorname{ess\,sup}_{T \in \bar{C}, T \geq t} E[X_T | \mathcal{F}_t],$$

$$(3) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} Y_t = \limsup_{t \rightarrow \infty} X_t,$$

$$(4) \quad E[Y_0] = \sup_{T \in \bar{C}} E[X_T] = \sup_{T \in \bar{C}} E[X_T].$$

証明の概略。 先ず, クラス $\{E[X_\nu | \mathcal{F}_t]: \nu \in \bar{C}, \nu \geq t\}$ は "sup" operation に関していることが基本的である。これより, (2) の右辺を Y'_t とおくと, stopping time の列 $T_n \in \bar{C}, T_n \geq t$ により $Y'_t = \lim_n \uparrow E[X_{T_n} | \mathcal{F}_t]$ なるものがとれる。従って,

$$\begin{aligned} E[Y'_t | \mathcal{F}_s] &= \lim_n E[E[X_{T_n} | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] \\ &= \lim_n E[X_{T_n} | \mathcal{F}_s] \leq Y'_s, \quad t \geq s, \end{aligned}$$

即ち, (Y'_t) は supermartingale である。

更に (Y'_t) は右連続 modification (Y_t) をもつことが示される。(1) は明らか。(3), (4) は time discrete の場合と同じ様にして出る。

この (Y_t) は Snell envelope と呼ばれる。 Optimal stopping time の存在定理として次の定理 2, 3 が知られている。

定理 2. (X_t) は次の性質をもつとする:

$$T_n \in C \uparrow T \Rightarrow \limsup X_{T_n} \leq X_T \text{ on } \{T < \infty\}.$$

このとき,

$$T^* = \inf \{t \mid X_t = Y_t\} : \text{optimal in } \bar{C}.$$

更に, $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty$ ならば $T^* < \infty$ が optimal in C .

定理 3. (X_t) は次の性質をもつとする:

$$(i) \quad E[\sup_t |X_t|] < \infty,$$

$$(ii) \quad T_n \uparrow T \text{ in } \bar{C} \Rightarrow E[X_{T_n}] \rightarrow E[X_T].$$

このとき,

$$T^* = \inf \{t \mid X_t = Y_t\} : \text{optimal in } \bar{C}.$$

よして Snell envelope (Y_t) も (ii) の性質をもつ。

更に, S を stopping time とするとき,

$$D(S) = \inf \{t \mid t \geq S, X_t = Y_t\} : \text{optimal in } \bar{C},$$

$$\text{i.e., } E[X_{D(S)}] = \sup_{T \geq S} E[X_T].$$

定理 2 は Fakker (1970), Thompson (1971), 定理 3 は Bismut-

Skalli (1977) による。尚、これらの定理で左かゝの連続性がおとせぬ事は容易にわかる。

定理4. $T \in \bar{C}$ とするとき, T が optimal であるための必要十分条件は $X_T = Y_T$ かつ $(Y_{t \wedge T})$: martingale となることである。

Penalty method コンピュータ的視点より Snell envelope を求める事, 近似法が問題となる。[1] は変分不等式, [2] は semi-group を用いて, 1つの近似法, いわゆる penalty method を論じている。ここではマルチンゲールによる取扱いを述べる。先ず Banach space W を次の様に定義する:

$$W = \{x = (x_t) : \text{右連続, adapted process, } \|x\| = \|\sup_t |x_t|\|_{L^\infty} < \infty\}.$$

以後, X_t は次の形

$$X_t = e^{-\alpha t} f_t + \int_0^t e^{-\alpha s} g_s ds \quad (f, g \in W, \alpha > 0)$$

の場合のみを考へる。 (X_t) の Snell envelope (Y_t) は

$$Y_t = e^{-\alpha t} z_t + \int_0^t e^{-\alpha s} g_s ds$$

となる。ここで (z_t) は右連続, adapted process で

$$z_t = \operatorname{ess\,sup}_{T \geq t} E[e^{-\alpha(T-t)} f_T + \int_t^T e^{-\alpha(s-t)} g_s ds | \mathcal{F}_t].$$

問題は (z_t) を何かで近似せよという事になる。

問題解決の key point は, V を W の subclass として

$$V = \{ x = (x_t) \in W :$$

$$(i) \quad f_t \leq x_t, \quad \forall t \geq 0,$$

$$(ii) \quad (e^{-\alpha t} x_t + \int_0^t e^{-\alpha s} g_s ds) : \text{supermartingale} \}$$

とすると, (z_t) は V の元で, $\forall x \in V$ に対して $x \geq z$ になっていることである。

実際, (i), (ii) は容易に check できる。又 Doob の任意

抽出定理より, $T \geq t$ に対して,

$$E[e^{-\alpha T} x_T + \int_0^T e^{-\alpha s} g_s ds | \mathcal{F}_t] \leq e^{-\alpha t} x_t + \int_0^t e^{-\alpha s} g_s ds.$$

故に, (i) を考慮して,

$$E[e^{-\alpha(T-t)} f_T + \int_t^T e^{-\alpha(s-t)} g_s ds | \mathcal{F}_t] \leq x_t.$$

結局 $x \geq z$ を得る。

次に non-Markovian の場合に通用する generator A を導入しよう。各 $x \in W$, 各 $\beta > 0$ に対して

$$G_\beta x(t) = E[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)} x_s ds | \mathcal{F}_t]$$

とおくと, $G_\beta : W \rightarrow W$ であり 1 対 1, resolvent

equation $G_\beta - G_\gamma + (\beta - \gamma) G_\beta G_\gamma = 0$ ($\beta, \gamma > 0$) を満たすことが

示せる。よって $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow W$ を

$$A = \beta - G_\beta^{-1}, \quad \mathcal{D}(A) = G_\beta(W) \quad (\beta \text{ に depend しない})$$

と定義する。deterministic な場合 $A = d^+/dt$ である

ことが簡単な計算より示せる。

マルチンゲールとの関係は

$$\begin{cases} Ax = 0 & \Leftrightarrow x \in W : \text{martingale} \\ Ax \leq 0, x \in \mathcal{D}(A) & \Rightarrow x : \text{supermartingale} \end{cases}$$

が成立する。

定理 5. Penalty equation

$$(\alpha - A) z^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} (f - z^\varepsilon)^+ = g, \quad (\varepsilon > 0)$$

は unique solution $z^\varepsilon \in \mathcal{D}(A)$ をもち、各 t に対し

$$z^\varepsilon(t) \rightarrow z(t) \quad \text{a.s.} \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

証明の概略。作用素 $T_\varepsilon : W \rightarrow W$ を

$$T_\varepsilon x(t) = E \left[\int_t^\infty \bar{e}^{(\alpha + \frac{1}{\varepsilon})(s-t)} (g_s + \frac{1}{\varepsilon} f \vee x(s)) ds \mid \mathcal{F}_t \right], \quad x \in W,$$

によつて定義すると、 T_ε は縮小写像となり、不動点 $z^\varepsilon \in W$ をもち、 z^ε は $(\alpha - A) z^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} (f - z^\varepsilon)^+ = g$ とかける。

これが penalty equation の解である。更に、

$$A \left(\bar{e}^{\alpha t} z^\varepsilon(t) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s} g_s ds \right) = -\bar{e}^{\alpha t} \frac{1}{\varepsilon} (f - z^\varepsilon)^+(t) \leq 0$$

により $(\bar{e}^{\alpha t} z^\varepsilon(t) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s} g_s ds)$ は supermartingale となる。

$$\text{一方, } \begin{cases} z^\varepsilon(t) \leq z^{\varepsilon'}(t) & (\varepsilon' < \varepsilon) \\ z^\varepsilon(t) \leq z(t), \end{cases}$$

が成立し、 $z^*(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} z^\varepsilon(t)$ とおくと $z^* \in V$ がわかり

minimality より $z = z^*$ となる。

§2. Optimal stopping の応用や複雑化された optimal stopping の問題として有名なものがいくつかあるが、ここでは直列型の optimal switching の問題を述べよう。

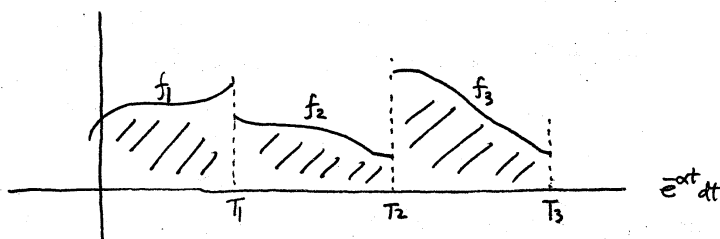
先ず次の様な model を考えよう。 N 個の diffusion process X_i ($i=1, 2, \dots, N$) が与えられたとき、 X_1 を start し、時刻 T_i で X_i から X_{i+1} に switch する process を X_{\uparrow} とする

$$\text{即ち, } X_{\uparrow}(t) = \begin{cases} X_i(t) & \text{if } T_{i-1} \leq t < T_i \\ 0 & \text{if } t \geq T_N \end{cases}$$

このとき、利得 $J(\hat{\tau}) = E[\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} c(X_{\uparrow}(s)) ds] \cong \sum_i E[\int_{T_{i-1}}^{T_i} e^{-\alpha s} c(X_i(s)) ds]$ ($\hat{\tau} = (T_1, T_2, \dots, T_N)$) を最大にせよ。

一般的な formulation $\mathcal{C} = \{ \hat{\tau} = (T_1, T_2, \dots, T_N) \mid 0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_N$ stopping time } とする。与えられた $f_i \in W$ ($i=1, 2, \dots, N$) に対し、利得 $J(\hat{\tau}) = \sum_{i=1}^N E[\int_{T_{i-1}}^{T_i} e^{-\alpha s} f_i(s) ds]$ ($\hat{\tau} \in \mathcal{C}$) を最大にせよ。特に、 $N=1$ のときは optimal stopping の問題となる。

$N=3$, deterministic な場合は下図の斜線の部分の面積を最大にするように T_1, T_2, T_3 を選ぶことになる。



Snell envelope を一般化して, 定理 1 に対応する次の定理が成立する。

定理 6. 次の性質を満たす $Z_i \in W$ ($i=1, 2, \dots, N$) が存在する:

$$(1) \quad Z_1 \geq Z_2 \geq \dots \geq Z_N \geq Z_{N+1} \equiv 0,$$

(2) 任意の stopping time S に対して,

$$Z_i(S) = \operatorname{ess\,sup}_{\bar{T} \in C_i(S)} E \left[\sum_{j=i}^N \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{-\alpha(t-S)} f_j(t) dt \mid \mathcal{F}_S \right], \quad i=1, 2, \dots, N,$$

$$\text{ここで } C_i(S) = \{ \bar{T} = (T_1, \dots, T_N) \mid S = T_{i-1} \leq \dots \leq T_N, \text{ stopping times } \},$$

$$(3) \quad (e^{-\alpha t} Z_i(t) + \int_0^t e^{-\alpha s} f_i(s) ds) : \text{supermartingale } \forall i,$$

$$(4) \quad E[Z_1(0)] = \sup_{\hat{T} \in \mathcal{C}} J(\hat{T}),$$

$$(5) \quad e^{-\alpha t} Z_i(t) = \operatorname{ess\,sup}_{T \geq t} E \left[\int_t^T e^{-\alpha s} f_i(s) ds + e^{-\alpha T} Z_{i+1}(T) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

(5) だけは定理 1 のものに対応してない。 i について

Bellman principle が成立することを示しており基本的な役割をする。

定理 7. $T_0^* = 0$, $T_i^* = \inf \{ t \geq T_{i-1}^* \mid Z_i(t) = Z_{i+1}(t) \}$ とおくと $\hat{T}^* = (T_1^*, T_2^*, \dots, T_N^*) \in \mathcal{C}$ は optimal である。

証明の概略。 各 i に対して定理 6 (5) より

$(\bar{e}^{\alpha t} z_i(t) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds)$ は $(\bar{e}^{\alpha t} z_{i+1}(t) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds)$ の Snell envelope である。これはすなわち定理 3 (ii) の性質をもつことが帰納法でわかる。定理 6 (5) と定理 3 により、

$$\begin{aligned} E[z_1(0)] &= E[\operatorname{ess\,sup}_{T \geq 0} E[\int_0^T \bar{e}^{\alpha s} f_1(s) ds + \bar{e}^{\alpha T} z_2(T) | \mathcal{F}_0]] \\ &= \operatorname{sup}_{T \geq 0} E[\int_0^T \bar{e}^{\alpha s} f_1(s) ds + \bar{e}^{\alpha T} z_2(T)] \\ &= E[\int_0^{T_1^*} \bar{e}^{\alpha s} f_1(s) ds + \bar{e}^{\alpha T_1^*} z_2(T_1^*)]. \end{aligned}$$

更に、定理 6 (5) により、

$$\bar{e}^{\alpha T_{i-1}^*} z_i(T_{i-1}^*) = \operatorname{ess\,sup}_{T \geq T_{i-1}^*} E[\int_{T_{i-1}^*}^T \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds + \bar{e}^{\alpha T} z_{i+1}(T) | \mathcal{F}_{T_{i-1}^*}]$$

が示せるので

$$E[\bar{e}^{\alpha T_{i-1}^*} z_i(T_{i-1}^*)] = \operatorname{sup}_{T \geq T_{i-1}^*} E[\int_{T_{i-1}^*}^T \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds + \bar{e}^{\alpha T} z_{i+1}(T)]$$

となる。再び定理 3 より右辺は $E[\int_{T_{i-1}^*}^{T_i^*} \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds + \bar{e}^{\alpha T_i^*} z_{i+1}(T_i^*)]$ に等しい。結局、 $E[z_1(0)] = \sum_{i=1}^N E[\int_{T_{i-1}^*}^{T_i^*} \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds]$ を得て定理 6 (4) により証明は終る。

最適性の条件は長くなるので省略する。最後に penalization を考えよう。

\mathcal{U} を N 個の process の組の class :

$$\mathcal{U} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \mid x_i \in W \ (i=1, 2, \dots, N),$$

$$(i) \ x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_N \geq x_{N+1} \equiv 0,$$

$$(ii) \ (\bar{e}^{\alpha t} x_i(t) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds) : \text{supermartingale } \forall i \}$$

としよう。 N 個の組 (z_1, z_2, \dots, z_N) は \mathcal{U} の元であらう。

で、かつ minimal i.e., $\forall (x_1, x_2, \dots, x_N) \in U \Rightarrow x_i \geq z_i, \forall i$,
 であることがわかる。 i についての帰納法と定理 5
 の方法によつて 2 次の定理が成立する。

定理 8. Penalty equation

$$(\alpha - A) z_i^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} (z_{i+1}^\varepsilon - z_i^\varepsilon)^+ = f_i, \quad z_{N+1}^\varepsilon \equiv 0$$

の solution $(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon, \dots, z_N^\varepsilon)$ が unique に存在し、各 $t \geq 0$,
 各 i に対し

$$z_i^\varepsilon(t) \longrightarrow z_i(t) \quad \text{a.s.} \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

参考文献

- [1] A. Bensoussan and J. L. Lions, Applications des inéquations
 variationnelles en contrôle stochastique, 1978.
- [2] A. Bensoussan, Stochastic control by functional analysis methods, 1982.
- [3] H. Morimoto, Tôhoku Math. J. 34, (1982), 407-416.
- [4] H. Morimoto, Tôhoku Math. J. 35, (1983), 119-128.
- [5] A. N. Shiriyayev, Optimal stopping rules, 1978.