数理解析研究所講究録
492巻 1983年 66-73

Transitive 代数に関するArvesonの予想について

東北大教養　御園生善尚（Yosinao Misonou）

ヒルベルト空間H上のすべての有界作用素の作る代数を$B(H)$で表わし，$\mathfrak{A}$を弱閉な恒等作用素を含む$B(H)$の部分代数とする．Hの部分空間$\mathfrak{M}$が$\mathfrak{A}$の任意の作用素で不変であるとき，単に$\mathfrak{A}$で不変であるという．ここに，部分空間とは閉部分空間を指すものとする．$\mathfrak{A}$で不変な自明でない部分空間が存在しないとき，$\mathfrak{A}$をtransitiveであるという．

$\mathfrak{A}$がtransitiveならば，$\mathfrak{A} = B(H)$か？

という問題がtransitive代数問題で，未解決である．この問題に関連して，Arvesonはつぎの問題を提起した：

$\mathfrak{A}$がtransitiveで，$\mathfrak{A}$と可換な任意の閉作用素が恒等作用素のスカラー倍ならば，$\mathfrak{A} = B(H)$か？

これも未解決であるが，この小論の目的はその部分的な解答を与えることである．

1　グラフ変換　ヒルベルト空間Hのn個の直和を$H^{(n)}$で

表わし，H上の作用素Tのn個の直和を$T^{(n)}$で表わす．$H^{(n)}$の部分空間$\mathfrak{M}$に対して

$$\mathfrak{M} = \{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathfrak{D} \}$$

を満たす共通の定義域$\mathfrak{D}$をもつH上の（必らずしも有界でない）作用素$T_1, \ldots, T_n$が存在するとき，$\mathfrak{M}$を$H^{(n)}$のグラフ部分空間という．また，あるnに対して，$H^{(n)}$のグラフ部分空間にあらわれる作用素T_iをグラフ変換という．[2]

閉作用素の極分解定理に類似する結果として，次の命題が成り立つ．[3]

<u>命題1</u>　$\{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D} \}$

を$H^{(n+1)}$のグラフ部分空間とするとき

$$T_i x = V_i S x \quad (x \in \mathfrak{D} ;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

を満たすH上の正値作用素Sおよび$V_i \in B(H)$が存在して

$$V = \begin{bmatrix} V_1/\sqrt{n} & V_1/\sqrt{n} & \cdots & V_1/\sqrt{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_n/\sqrt{n} & V_n/\sqrt{n} & \cdots & V_n/\sqrt{n} \end{bmatrix}$$

は$H^{(n)}$上の部分的等距離作用素である．

$\mathfrak{A}$をH上の *transitive* 代数とし

$$\mathfrak{M} = \{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathfrak{D} \}$$

が$\mathfrak{A}^{(n)} = \{ A^{(n)} \mid A \in \mathfrak{A} \}$で不変な$H^{(n)}$のグラフ部分空間であるとき，$\mathfrak{M}$を$\mathfrak{A}^{(n)}$の不変グラフ部分空間という．$\mathfrak{A}$が

transitive であるから, $\mathcal{D} \neq \{0\}$ ならば $\overline{\mathcal{D}} = H$ である.(以下 $\mathcal{D} \neq \{0\}$ の場合を考える.) また, ある n に対して, $\mathfrak{A}^{(n)}$ の不変グラフ部分空間を構成する作用素 T_i を, 単に $\mathfrak{A}$ のグラフ変換という. したがって, $\mathfrak{A}$ のグラフ変換は稠密な定義域をもつ $\mathfrak{A}$ と可換な作用素である. Arveson [1] は transitive 代数問題に関連した, 次の結果を示した.

<u>定理 2</u> (Arveson) $\mathfrak{A}$ をヒルベルト空間 H 上の transitive 代数とする. $\mathfrak{A}$ の任意のグラフ変換が恒等作用素のスカラー倍ならば, $\mathfrak{A} = B(H)$ である.

この形で Arveson の結果を述べ替えたのは Radjavi - Rosenthal [2] である.

次の命題が示されている. [3]

<u>命題 3</u> $\mathfrak{A}$ を H 上の transitive 代数とし, $\mathfrak{A}$ と可換な稠密な定義域をもつ任意の閉作用素が恒等作用素のスカラー倍であるとする. さらに, 任意の自然数 n に対して, $\mathfrak{A}^{(n+1)}$ の任意の不変グラフ部分空間

$$\{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

に対して, $\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$ が $H^{(n)}$ で稠密でなければ, $\mathfrak{A} = B(H)$ である.

<u>2</u> <u>主定理</u> 次の定理を示そう.

<u>定理4</u>　$\mathfrak{A}$をH上のtransitive代数とし，さらに次の2条件を満たすとすれば，$\mathfrak{A} = B(H)$ である．

(i) $\mathfrak{A}$と可換な稠密な定義をもつ閉作用素は恒等作用素のスカラー倍である．

(ii) Sが逆作用素をもつ正値作用素で，任意の$A \in \mathfrak{A}$ に対して SAS^{-1} が有界ならば，S^{-1}は有界である．

nを2より大きい任意の整数とする．

$$\mathfrak{M} = \{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D} \}$$

を$\mathfrak{A}^{(n+1)}$ の任意の不変部分空間とする．定理を示すためには，命題3から，$\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D}\}$が$H^{(n)}$で稠密でないことを示せばよい．命題1から

$$T_i = V_i S \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

と表わせる．これらの記号のもとで，若干の補題を準備する．次の補題は[3]による．

<u>補題5</u>　$\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D}\}$が$H^{(n)}$で稠密であるとき，$V_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$は次の条件を満たす部分的等距離作用素である：

$$V_i V_j^* = \delta_{ij} I \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} V_i^* V_i = I$$

<u>補題6</u>　$\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D}\}$が$H^{(n)}$で稠密であるとき，$S$は逆作用素をもちかつその値域は$H$で稠密である．

<u>証明</u>　Sが1対1でないとすれば

$$\mathcal{K}_1 = \{ x \in \mathcal{D} \mid Sx = 0 \} \neq \{0\}$$

である．Sは閉作用素であるから，$\mathcal{K}$はHの部分空間である．任意の$A \in \mathfrak{A}$および任意の$x \in \mathcal{K}_1$に対して，補題5から

$$SAx = \sum_{i=1}^{n} V_i^* V_i SAx = \sum_{i=1}^{n} V_i^* A V_i Sx = 0$$

ゆえに$\mathcal{K}_1$はAで不変である．$A \in \mathfrak{A}$が任意で，$\mathfrak{A}$がtransitiveであるから$\mathcal{K}_1 = H$．ゆえに$S = 0$．したがって$T_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$となり，$\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$が$H^{(n)}$で稠密であることに反する．ゆえにSは1対1で，逆作用素をもつ．

次に$\{Sx \mid x \in \mathcal{D}\}$の閉包を$\mathcal{K}_2$とする．$\mathcal{K}_2 \neq H$とすれば$\mathcal{K}_2$と直交する0でない$u \in H$が存在する．

$$u_i = V_i u \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

とする．$u_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$とすれば，補題5から

$$u = \sum_{i=1}^{n} V_i^* V_i u = 0$$

となり，$u \neq 0$に反する．ゆえに$u_1 \oplus \cdots \oplus u_n$は$H^{(n)}$の0ベクトルではない．任意の$x \in \mathcal{D}$に対して

$$\begin{aligned}
&(u_1 \oplus \cdots \oplus u_n, T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (u_i, T_i x) = \sum_{i=1}^{n} (V_i u, V_i S x) \\
&= (u, \sum_{i=1}^{n} V_i^* V_i S x) = (u, Sx) = 0
\end{aligned}$$

これは$\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$が$H^{(n)}$で稠密であることに反する．ゆえに$\mathcal{K}_2 = H$．すなわち，Sの値域は稠密であ

る．

定理の証明　ある整数 n (≥ 2) に対して，$\mathfrak{A}^{(n+1)}$ の不変グラフ部分空間

$$\{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

で，$\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$ が $H^{(n)}$ で稠密であるとする．

$A \in \mathfrak{A}$ に対して

$$\Phi(A) = \sum_{i=1}^{n} V_i^* A V_i$$

とする．補題5から

$$\Phi(A) S x = \sum_{i=1}^{n} V_i^* A V_i S x = S A x \quad (x \in \mathcal{D})$$

ゆえに

$$\Phi(A) x = S A S^{-1} x \qquad (x \in \mathcal{R}(S))$$

である．$\Phi(A)$ は有界であるから，SAS^{-1} は有界である．ゆえに定理の仮定から S^{-1} は有界で，補題6から $\mathcal{R}(S) = H$ である．ゆえに

$$\mathcal{D}_0 = \{x \in \mathcal{D} \mid Sx \in V_i^* V_i H\}$$

とすれば，$\mathcal{D}_0 \neq \{0\}$ である．補題5から，$j \neq i$ ならば

$$V_j^* V_j V_i^* V_i = 0$$

であるから，$V_i^* V_i$ と $V_j^* V_j$ は直交する射影作用素である．ゆえに

$$x \in \mathcal{D}_0 \iff V_j S x = 0 \quad (i \neq j)$$

である．任意の A に対して，$V_j S$ と A は可換であるから，$\mathcal{D}_0$

は$\mathfrak{A}$で不変である．$\mathfrak{A}$が transitive であるから，$\mathfrak{D}_0$ はHで稠密である．T_i' を T_i を $\mathfrak{D}_0$ に制限してえられる作用素

$$T_i' x = V_i S x \quad (x \in \mathfrak{D}_0)$$

とすれば，$x \in \mathfrak{D}_0$ に対しては $\|V_i S x\| = \|S x\|$ であるから，T_i' は$\mathfrak{A}$と可換な閉作用素である．したがって，定理の仮定から

$$V_i S x = \lambda x \quad (x \in \mathfrak{D}_0)$$

と表わせる．ゆえに

$$S x = \lambda V_i^* x \quad (x \in \mathfrak{D}_0)$$

である．Sが閉作用素で，$\mathfrak{D}_0$ がHで稠密であるから，H上で

$$S = \lambda V_i^*$$

である．ゆえに，$j \neq i$ に対して

$$T_j = V_j S = \lambda V_j V_i^* = 0$$

これは $\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x\}$ が $H^{(n)}$ で稠密であることに反する．したがって，$\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D}\}$ は $H^{(n)}$ で稠密ではない

以上で定理が示された．

文　献

[1] W.B.Arveson, A desity theorem for operator algebras, Duku Math. J.,

34(1967), 635 - 647.

[2] H.Radjavi and P.Rosenthal, Invariant subspaces, Springer - Verlag, New York, 1973.

[3] 御園生善尚, 洲之内長一郎, Invariant subspace problem に関連する operator algebra について, 数理解析研究所講究録 377 (1980)