

Riesz bundle について

富山大理 平野正え (Masayuki Hiramoto)

富山大理 久保文夫 (Fumio Kubo)

1. Introduction. 考える Banach space は全て無限次元, 複素のものとする. Banach space X 上の bounded linear operator 全体のつくる Banach algebra を $B(X)$ で表わす. $B(X)$ の中の compact operator 全体のつくる closed two sided ideal を $C(X)$ とし, $B(X)$ の $C(X)$ による quotient algebra を $A(X)$ で表わし, natural homomorphism を $\pi: B(X) \rightarrow A(X)$ で表わす.

non-zero scalar λ と $T \in C(X)$ により $V = \lambda I - T$ と書ける operator V は Riesz と Schauder と始め多くの人達により研究された. このような operator V の range $\mathcal{R}(V)$ と kernel $\mathcal{N}(V)$ については, 次のような事実が知られている:

- 1° $\mathcal{R}(V^k)$: closed subspace of X ($k=1, 2, \dots$),
- 2° $\text{codim } \mathcal{R}(V^k) < \infty$ ("),
- 3° $\text{dim } \mathcal{N}(V^k) < \infty$ ("),
- 4° decreasing chain $X = \mathcal{R}(V^0) \supset \mathcal{R}(V) \supset \mathcal{R}(V^2) \supset \dots$ は

$\exists m \in \mathbb{N}; R(V^m) = R(V^{m+1}) = \dots$ なる有限性条件をみたす,

5° ascending chain $\{0\} = N(V^0) \subset N(V^1) \subset N(V^2) \subset \dots$ は

$\exists m \in \mathbb{N}; N(V^m) = N(V^{m+1}) = \dots$ なる有限性条件をみたす.

また $T \in C(X)$ の spectre $\sigma(T)$ について次の事実も良く知られてゐる:

6° $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T)$ で $\sigma(T)$ の accumulation point は 0 しかない.

$V = \lambda I - T$ がこれらの特性を持つ operator T は, compact operator に限るな. 実際, すべての quasimilipotent operator T もこれらの特性を持つてゐる. これら 1° ~ 7° の特性をみたす operator T の class を研究した Ruzsoma はこのような operator を Riesz operator と名付けた. この class の characterization は Ruzsoma を始め数人の人達によつて与えられた.

定理 A. $B(X) \ni T$ が Riesz operator である必要十分条件は, 任意の $\lambda \neq 0$ に対し $R(\lambda I - T)$ が closed で

$$\forall \lambda \neq 0; \begin{cases} \text{codim } R(\lambda I - T) < \infty \\ \dim N(\lambda I - T) < \infty \end{cases}$$

をみたすことである.

この characterization が λ についての一次の polynomial についての陳述であることに注目して, 本講演では, 高次の

operator を係数に持つ polynomial によって \mathcal{L} のような有限性条件を考える。

2. Riesz bundle. $B(X) \ni T_0, T_1, \dots, T_{m-1}$ を係数にもつ polynomial

$$\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^m I - \lambda^{m-1} T_{m-1} - \dots - \lambda T_1 - T_0$$

を polynomial bundle と呼ぶ。 $\mathcal{L}(\lambda)$ の companion matrix \mathbb{L} は通常の polynomial の場合と同じく

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} T_{m-1} & T_{m-2} & T_{m-3} & \dots & T_2 & T_1 & T_0 \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられる direct sum space $X^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} X$ \mathcal{L} の bounded linear operator である。

[定義] Polynomial bundle $\mathcal{L}(\lambda)$ が、任意の $\lambda \neq 0$ に対し $\mathcal{R}(\mathcal{L}(\lambda))$ が closed で

$$\text{codim } \mathcal{R}(\mathcal{L}(\lambda)) < \infty$$

$$\dim \mathcal{N}(\mathcal{L}(\lambda)) < \infty$$

をみたす時, Riesz bundle と呼ぶ。

この呼称は, 次の定理から妥当と思われる。

[定理]. Polynomial bundle $\mathcal{L}(\lambda)$ の companion matrix を \mathbb{L}

とすると, $\mathcal{L}(\lambda)$ が Riesz bundle であるための必要十分条件は \mathcal{L} が $X^{(m)}$ の Riesz operator となることである.

証明. $\mathcal{L}(\lambda)$ と \mathcal{L} の間の関係については次の事実が知られている:

$$B_1(\lambda) := I$$

$$B_2(\lambda) := (\mathcal{L}(\lambda) - \mathcal{L}(0)) / \lambda$$

$$B_{k+1}(\lambda) := (B_k(\lambda) - B_k(0)) / \lambda \quad (k=2, 3, \dots, m-1)$$

$$B(\lambda) := \begin{bmatrix} -B_1(\lambda) & -B_2(\lambda) & \dots & -B_{m-1}(\lambda) & -B_m(\lambda) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(\lambda) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ は λ の任意の値に対し可逆であり,

$$2I_m - \mathcal{L} = B(\lambda) \begin{bmatrix} \mathcal{L}(\lambda) & & & & \\ & I & & & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & & & & I \end{bmatrix} C(\lambda)$$

の関係を読み取っている. この関係から次の range と kernel

の関係が導かれ、定理が証明される:

$$\forall \lambda \neq 0; \begin{cases} \operatorname{codim} R(\mathcal{L}(\lambda)) = \operatorname{codim} R(\lambda I_m - \mathbb{L}) \\ \dim N(\mathcal{L}(\lambda)) = \dim N(\lambda I_m - \mathbb{L}). \quad \square \end{cases}$$

3. Spectral properties. Operator の spectrum 及び point spectrum に類似して polynomial bundle $\mathcal{L}(\lambda)$ の spectrum $\sigma(\mathcal{L}(\cdot))$ 及び point spectrum $\sigma_p(\mathcal{L}(\cdot))$ を定義する:

$$\sigma(\mathcal{L}(\cdot)) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \mathcal{L}(\lambda) \text{ は } B(X) \text{ に逆をもたない} \}$$

$$\sigma_p(\mathcal{L}(\cdot)) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \neq x \in X; \mathcal{L}(\lambda)x = 0 \}.$$

また, operator の essential spectrum の類似として polynomial bundle $\mathcal{L}(\lambda)$ の essential spectrum $\sigma_e(\mathcal{L}(\cdot))$ を次のように定義する:

$$\sigma_e(\mathcal{L}(\cdot)) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \pi(\mathcal{L}(\lambda)) \text{ は } A(X) \text{ に逆をもたない} \}.$$

Riesz operator の種々の spectral property に対応して Riesz bundle の spectral property が得られる.

[定理] Polynomial bundle $\mathcal{L}(\lambda)$ が Riesz bundle であるためには次のいずれか1つをみたすことが必要十分である.

(1) $\sigma_e(\mathcal{L}(\cdot)) = \{0\}$,

(2) $\exists \mathcal{K} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}(X) : \text{a function.}$; $\mathcal{L}(\lambda)^{-1} = \mathcal{K}(\lambda) + \mathcal{A}(\lambda)$
 $\exists \mathcal{A} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow B(X) : \text{analytic}$ ($\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(\cdot))$)

(3) $\sigma(\mathcal{L}(\cdot))$ は, 0を除いて $\mathcal{L}(\lambda)^{-1}$ の有限位の極である,

(4) $\sigma(L(\cdot))$ の 0 でない任意の点 λ_0 は isolated point である。 operator $(1/2\pi i) \int_{\Gamma_0} \lambda^k L(\lambda)^{-1} d\lambda$ ($k=0, 1, \dots, 2m-2$) はすべて finite rank である。 但し Γ_0 は λ_0 と spectre の他の部分から分離する積分路とする。

証明. これらの証明には, 対応する Riesz operator の spectral property が用いられる。 例として (4) を証明する。 これに対応する property

(4') $\sigma(T)$ の 0 でない任意の点 λ_0 は isolated point である。 この spectral projection は finite rank である, は operator T の Riesz 性を特徴付けている。 前定理の証明に現れた $L(\lambda)$ と $\lambda L_m - L$ の関係は $\sigma(L(\cdot)) = \sigma(L)$ を示しており, 一方

$$B(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} -B_1(\lambda) & -B_2(\lambda) & \dots & -B_2(\lambda) \\ 0 & 0 & \dots & I \\ \vdots & & & \\ 0 & I & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

及 $0''$

$$C(\lambda)^{-1} = - \begin{bmatrix} \lambda^{m-1} I & \lambda^{m-2} I & \lambda^{m-3} I & \dots & I \\ \lambda^{m-2} I & \lambda^{m-3} I & & & \\ \vdots & & & & \\ I & & & 0 & \end{bmatrix}$$

の行表示及び列表示をそれぞれ、

$$B(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} Y_1(\lambda) \\ Y_2(\lambda) \\ \vdots \\ Y_m(\lambda) \end{bmatrix} \quad \text{及び} \quad C(\lambda)^{-1} = [X_1(\lambda), \dots, X_m(\lambda)]$$

とすると

$$\begin{aligned} (\lambda I_m - \mathbb{L})^{-1} &= C(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} & & & \\ & I & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I \end{bmatrix} B(\lambda)^{-1} \\ &= X_1(\lambda) \mathcal{L}(\lambda)^{-1} Y_1(\lambda) + \sum_{j=2}^m X_j(\lambda) Y_j(\lambda) \end{aligned}$$

を得る。積分すれば (第2項は analytic だから)

$$\begin{aligned} & (1/2\pi i) \int_{\Gamma_0} (\lambda I_m - \mathbb{L})^{-1} d\lambda \\ &= (1/2\pi i) \int_{\Gamma_0} X_1(\lambda) \mathcal{L}(\lambda)^{-1} Y_1(\lambda) d\lambda \\ &= \begin{bmatrix} (1/2\pi i) \int_{\Gamma_0} \lambda^{m-1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} d\lambda & \dots & (1/2\pi i) \int_{\Gamma_0} \lambda^{2m-2} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} d\lambda \\ \vdots & & \vdots \\ (1/2\pi i) \int_{\Gamma_0} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} d\lambda & \dots & (1/2\pi i) \int_{\Gamma_0} \lambda^{m-1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} d\lambda \end{bmatrix} \mathbb{T} \end{aligned}$$

を得る。ここに $\mathbb{T} = \begin{bmatrix} I & -T_{m-1} & \dots & -T_2 & -T_1 \\ 0 & I & \dots & -T_3 & -T_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & I \end{bmatrix}$ は

可逆であるから, (4) が Riesz bundle の必要十分条件である

ことがわかる。 □

[注意] 次のような Riesz bundle の十分条件は Riesz bundle の定義から明らかであることが、内山氏により講演中に指摘された:

$$(1) \exists j_0 \in \{0, 1, \dots, m-1\}, \exists m \in \mathbb{N}; \quad T_{j_0}^m \in C(X) \quad \text{でかつ}$$

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, j_0-1, j_0+1, \dots, m-1\} \quad T_j \in C(X)$$

$$(2) \forall j \in \{0, 1, \dots, m-1\}; \exists m_j \in \mathbb{N}; \quad T_{j_0}^{m_j} \in C(X) \quad \text{でかつ}$$

$$T_i T_j = T_j T_i \quad (i, j \in \{0, 1, \dots, m-1\}).$$

実際、どちらの場合でも

$$(*) \quad \lambda^{m-1} T_{m-1} + \dots + \lambda T_1 + T_0$$

は power compact 従って Riesz operator となるからである。

この事実を更に次のように一般化できる。

$$(1') \quad \exists j_0 \in \{0, 1, \dots, m-1\}; T_{j_0} : \text{a Riesz operator}$$

$$\forall j \in \{0, \dots, j_0-1, j_0+1, \dots, m-1\} \quad T_j \in C(X)$$

又は (もっと一般的に)

$$(2') \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, m-1\}; T_j : \text{Riesz operator}$$

$$T_i T_j \equiv T_j T_i \quad (i, j \in \{0, 1, \dots, m-1\}) \quad (\text{mod } C(X))$$

ならば $\mathcal{L}(\lambda)$ は Riesz bundle である。

実際、どちらの場合にも (1') は (2') の special case)

$$(**) \quad \pi(\lambda^{m-1} T_{m-1} + \dots + \lambda T_1 + T_0)$$

は quasimilpotent element in $A(X)$ となるからである。