京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学 KYOTO UNIVERSITY

Title	擬斉次特異点の位相型について(C$^ \infty$写像と関連分野)
Author(s)	吉永, 悦男
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 493: 156-163
Issue Date	1983-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/103549
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
493巻 1983年 156-163

擬斉次特異点の位相型について

横浜国大 教育 吉永 悦男 (Etsuo Yoshinaga)

擬斉次多項式 $f(z)$ で定義される孤立特異点芽の位相型は，$f(z)$ の weights を決定するであろうか。ただし，$X \equiv \{ z \in \mathbb{C}^n \mid f(z) = 0 \}$ とおくとき，位相空間の対 $(\mathbb{C}^n, X)$ を芽 X の位相型という。

これは，岡睦雄氏の定理の逆命題を問うものである。これについては，次のことが知られている。

<u>定理 1</u> ([7]) 平面曲線芽については肯定的である。

<u>定理 2</u> ([4]) 3変数 ($n = 3$) の場合については肯定的である。この場合には，対 $(\mathbb{C}^3, X)$ の位相型ではなく，単に芽 X の位相型だけで，$f(z)$ の weights が決定される。

<u>定理 3</u> ([7]) Brieskorn-Pham 型の特異点については肯定的である。

さて，多項式$f(z)$のMilnor fibrationに付随する特性多項式を$\Delta_f(t)$とすると，これは位相不変量であり（[1]），次が成り立つ：

定理4

$$\mathrm{divisor}\,\Delta_f(t) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}\Lambda_{b_i} - 1\right)$$

ただし，$(a_1/b_1, \cdots, a_n/b_n)$を$f(z)$のweightsとし，$\Lambda_b \equiv \mathrm{divisor}\,(t^b - 1) = \langle 1\rangle + \langle \omega\rangle + \langle \omega^2\rangle + \cdots + \langle \omega^{b-1}\rangle$とする。$\omega \equiv \exp(2\pi\sqrt{-1}/b)$

この小稿では，次の定理5を証明することが目的である。擬斉次多項式$g(z)$のweightsを$(c_1/d_1, \cdots, c_n/d_n)$とし，$\mathbb{C}^n$の原点で孤立特異点を持つものとする。

定理5　　特性多項式$\Delta_f(t)$と$\Delta_g(t)$とが等しくなるための必要十分条件は，次の(1)，(2)が成り立つことである。

(1)　$\{2, b_1, b_2, \cdots, b_n\} = \{2, d_1, d_2, \cdots, d_n\}$

(2)　任意の元$b \in \{2, b_1, b_2, \cdots, b_n\}$について

$$\prod_{b_i = b}\left(1 - \frac{b_i}{a_i}\right) = \prod_{d_i = b}\left(1 - \frac{d_i}{c_i}\right)$$

直接の系として，次を得る。

系 6

(1) 集合 $\{2, b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ は位相不変量である。

(2) 各 b について，$\prod_{b_i=b}\left(1-\frac{b_i}{a_i}\right)$ は位相不変量である。

系 7（＝定理 3） 多項式 $f(z)$，$g(z)$ が Brieskorn－Pham 型で，特異点芽 $X_f = \{z \in \mathbb{C}^n \mid f(z)=0\}$ と X_g の位相型が等しければ，$f(z)$ と $g(z)$ の weights は順序を除いて，等しい。

証明 特性多項式が位相不変量であるので，$\Delta_f(t) \equiv \Delta_g(t)$ である。Brieskorn－Pham 型であるから，$a_i = c_i = 1$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ とおき，定理 5 (2) を用いる。$b > 2$ とすると，

$$\prod_{b_i=b}(1-b_i) = \prod_{d_i=b}(1-d_i)$$

$$\therefore \quad \#\{i \mid b_i = b\} = \#\{i \mid d_i = b\}$$

従って，$b=2$ についても $\#\{i \mid b_i = 2\} = \#\{i \mid d_i = 2\}$ となり，順序を除いて，$(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ が証明された。

注意 8 [5] により，孤立特異点を持つ擬斉次多項式 $f(z)$ の weights $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ は，$0 < r_i \leq \frac{1}{2}$ と仮定してよく，また，そのとき一意的である。

補題 9

n_i, q_j ; integers s.t.

$$2 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k , \quad 2 \leq q_1 < q_2 < \cdots < q_l$$

c_i, r_j ; integers

m_i, p_j ; positive rational numbers s.t.

$$m_i n_i + (-1)^{c_i} \neq 0, \quad p_j q_j + (-1)^{r_j} \neq 0$$

$$(*) \quad \prod_{i=1}^{k} (m_i \Lambda_{n_i} + (-1)^{c_i}) = \prod_{j=1}^{l} (p_j \Lambda_{q_j} + (-1)^{r_j})$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \equiv \sum_{j=1}^{l} r_j \pmod 2$$

$\Longrightarrow$

$$k = l, \quad n_i = q_i, \quad m_i = p_i, \quad c_i \equiv r_i \pmod 2$$

証明　数学的帰納法によって証明する。

〈第1段階〉　$n_1 = q_1$, $m_1 = p_1$, $c_1 \equiv r_1 \pmod 2$

$\because$　$\Lambda_a \Lambda_b = (a, b) \Lambda_{[a,b]}$　（ただし，$(a, b) \fallingdotseq a$ と b の最大公約数，$[a, b] \fallingdotseq a$ と b の最小公倍数）に注意して，(*)の式を展開すると，次のように一意的に書ける。

(*)の左辺 $= \alpha_1 \Lambda_{\beta_1} + \cdots + \alpha_s \Lambda_{\beta_s}$ $(\beta_1 < \cdots < \beta_s)$

ここで，$\beta_1 = n_1$, $\alpha_1 = m_1 \cdot (-1)^{c_2 + \cdots + c_k}$ であるから第1段階の証明を終える。

第 $i-1$ 段階まで証明されたものとする。

〈第ⅱ段階〉　$n_i = q_i,\ m_i = p_i,\ c_i \equiv r_i \pmod 2$

☺ 帰納法の仮定により，任意の $\beta < n_i$ (or q_i) に対して，等式(*)の両辺における Λ_β の係数は互に等しい。従って，$n_i = q_i$.　次に，

(*) の左辺における Λ_{n_i} の係数

$$= (-1)^{\alpha} m_i \prod_{\substack{n_j \mid n_i \\ n_j \neq n_i}} \left(m_j n_j + (-1)^{c_j} \right)$$

$$+ \sum_{\substack{[n_{i_1}, \cdots, n_{i_q}] = n_i \\ n_{i_1} < \cdots < n_{i_q} < n_i}} (-1)^{\alpha_I} m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_q} (n_{i_1}, n_{i_2}, \cdots, n_{i_q})$$

最小公倍数

ただし，$\alpha \equiv \sum_{n_j \nmid n_i} c_j$,　$\alpha_I \equiv \sum_{j \notin I} c_j$,　$I \equiv \{i_1, i_2, \cdots, i_q\} \subset \{1, 2, \cdots, i-1\}$

この式の第2項は，帰納法の仮定により，同じ形の項が Λ_{q_i} の係数にもあらわれる。よって，Λ_{n_i} と Λ_{q_i} の係数を比較することにより，次の等式を得る：

$$(-1)^{\alpha} m_i \boxed{\prod_{\substack{n_j \mid n_i \\ n_j \neq n_i}} \left(m_j n_j + (-1)^{c_j} \right)}$$

$$= (-1)^{\beta} p_i \boxed{\prod_{\substack{p_j \mid p_i \\ p_j \neq p_i}} \left(p_j q_j + (-1)^{r_j} \right)} \qquad \left(\beta \equiv \sum_{q_j \nmid q_i} r_j \right)$$

ところが，帰納法の仮定により，点線で囲った部分は

互に等しい。

$\therefore \quad m_i = p_i, \quad c_i \equiv r_i \pmod 2$

第 i 段階の証明終り。　　　　補題の証明終り。

<u>定理5の証明</u>　定理5は補題9に，ただちに従うのだが，そこに出てくる数達 n_i, c_i, m_i を次のように与える。

$$\{n_1, \cdots, n_k\} \equiv \{b_1, \cdots, b_n\}$$

$$c_i \equiv \#\{j \mid b_j = n_i\}$$

$$m_i \equiv \frac{1}{n_i}\left\{\prod_{b_j = n_i}\left(\frac{b_j}{a_j} - 1\right) - (-1)^{c_i}\right\}$$

とおく。すぐわかるように

$$m_i n_i + (-1)^{c_i} \neq 0$$

$$\prod_{b_j = n_i}\left(\frac{1}{a_j}\Lambda_{b_j} - 1\right) = m_i \Lambda_{n_i} + (-1)^{c_i}$$

となる。$n_i = 2$ のときのみ $m_i = 0$ となり，更に

$$\begin{aligned} \text{division } \Delta_f(t) &= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}\Lambda_{b_i} - 1\right) \\ &= \prod_{i=1}^{k}\left(m_i \Lambda_{n_i} + (-1)^{c_i}\right) \end{aligned}$$

であるから，division $\Delta_f(t) =$ division $\Delta_g(t)$ に，補題9を適用することが出来，定理5の主張が証明された。　　　　定理5の証明終り。

Examples 10

(1) $f(z,w) \equiv z_1^2 + \cdots + z_n^2 + w_1^3 + w_2^{2p}$

$n = \text{even}$, $(3, p) = 1$ について,

$$\Delta_f(t) = \frac{t^{4p} + t^{2p} + 1}{t^2 + t + 1} \qquad \therefore \Delta_f(1) = 1$$

(2) $f(z,w) \equiv z_1^2 + \cdots + z_n^2 + w_1^3 + w_2^p$

$n = \text{odd}$, $(2, p) = (3, p) = 1$ について

$$\Delta_f(t) = \frac{(t+1)(t^{3p}+1)}{(t^3+1)(t^p+1)} \qquad \therefore \Delta_f(1) = 1$$

この Examples から, $n = 1$ を除いて, $K \equiv S^{2n+3} \cap X_f$ は topological sphere であることが知られる。X_f が K の cone であることを想えば, 芽 X_f の位相だけからでは, $f(z,w)$ の weights が決定出来ないことがわかり, 3変数の場合（定理2）が唯一の例外であることが知られる。

(3)

$f \equiv x^2 + y^2 + z^2 + w^{13}$ of type $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{13}\right)$

$g \equiv x^2 + y^3 z + z^2 w + y w^2$ of type $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{5}{13}\right)$

について

$$\Delta_f(t) = \Delta_g(t) = \frac{(t-1)(t^{26}-1)}{(t^2-1)(t^{13}-1)} = \frac{t^{13}+1}{t+1}$$

Brieskorn-Pham type $f(x, y, z, w)$ とそうでないもの $g(x, y, z, w)$ とに対し，その特性多項式が互に等しく，共に，超球との切り口Kが topological sphere であることが知られる。

References

[1] Lê Dũng Tráng : Topologie des singularites des hypersurfaces complexes. Asterisque 7 et 8, 171-182 (1972)

[2] Milnor,J. : Singular Points of complex hypersurfaces. Princeton Univ.Press, 1968

[3] Milnor,J.,Orlik,P. : Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials. Topology 9, 385 -393(1970)

[4] Orlik,P. : Weighted homogeneous polynomials and fundamental groups. Topology 9, 267-273(1970)

[5] Saito,K. : Quasihomogene isplierte Singularitäten von Hyperflächen. Invensiones math. 14, 123-142(1971)

[6] Yoshinaga,E,Suzuki,M. : On the topological types of singularities of Brieskorn-Pham type. Sci.Rep. Yokohama National Univ. 37-43(1978)

[7] Yoshinaga,E.,Suzuki,M. : Topological types of quasi-homogeneous singularities in C^2. Topology 18, 113-116(1979)

[8] Yoshinaga,E. : Topological types of isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials. (to appear in J.Math.Soc.Japan)