

Parametrised contact equivalence について

奈良女子大理 泉屋 周一 (Shyūichi Izumiya)

§1. 序. $f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \in C^\infty$ 写像芽とする時, 任意の $u \in \mathbb{R}^r$ に対して "varieties" の芽 $f_u^{-1}(0)$ が定まる. ここでは, $f_u^{-1}(0)$ の分岐について, ある同値関係を写像芽の集合に定義して, それに関して得られた結果を報告する. 動機や従来のカタストロフ理論との関係等については ([3]) を参照してほしい.

定義 (1.1) $f, g : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \in C^\infty$ 写像芽とするとき, f, g が P - \mathcal{K} -同値 (resp. SP - \mathcal{K} -同値) とは, $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0)$ 上の微分同相芽で $\Phi(x, u) = (\Phi_1(x, u), \Phi_2(u))$ (resp. $\Phi(x, u) = (\Phi_1(x, u), u)$) の形をしたものが存在して, $\Phi^*(I(f)) = I(g)$ をみたす葉とする. ここで $I(f)$ は f_1, \dots, f_p で生成される $C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)$ のイデアルで Φ^* は Φ から自然に導かれる環同型である. (ただし, $f = (f_1, \dots, f_p)$. $C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r) = \{h \mid h : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow \mathbb{R} : C^\infty\}$.)

この時, $f \sim_{P, \mathcal{K}} g$ (resp. $f \sim_{SP, \mathcal{K}} g$) と書く.

さて, 任意の C^0 写像芽 $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して,
分岐写像芽 $\pi_f: (f^{-1}(0), 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ を $\pi_f(x, y) = y$ で定義す
 る.

定義 (1.2). $f, g: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^0 写像芽とす
 る時, π_f と π_g が \mathcal{A} -同値 (resp. \mathcal{R} -同値) とは, $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0)$
 上の微分同相芽 Φ で $\Phi(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$ をみたすものと, $(\mathbb{R}^r, 0)$ 上
 の微分同相芽 ϕ (resp. $\phi = \text{id}_{\mathbb{R}^r}$) が存在して, $\phi \circ \pi_f = \pi_g \circ \Phi$ を
 みたすことである. ($\pi_f \sim_{\mathcal{A}} \pi_g$ と書く)

注意 i) f, g が \mathcal{P} - \mathcal{X} -同値 (\mathcal{S}, \mathcal{P} - \mathcal{X} -同値) $\Rightarrow \pi_f \sim_{\mathcal{A}} \pi_g$
 ($\pi_f \sim_{\mathcal{R}} \pi_g$).

ii) $f: (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して, $D_f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を
 $D_f(x, y) = f(x) - y$ と定義する. この事によって, \mathcal{P} - \mathcal{X} -同値
 の理論は, Mather による \mathcal{A} -同値の理論の一般化である事が
 ゆかる. (cf. [4], [5]).

iii) $r=1$ の場合, この同値関係は M. Golubitsky と D. Scheffer
 によって研究された (cf. [1]). しかし, $r \geq 2$ の場合と r
 $= 1$ の場合では situation がまったくちがうことがゆかる. (cf. 参照)

§2. 陰函数定理. 我々の立場からみると, 陰函数定理と
 は, 写像芽とすの同値関係に対して, 特異性 (ie. 非特異性)
 を決定するものである. ie. 陰函数定理によって今考えてい

る同値関係により簡単な形に書きかえられるものが非特異であり、書きかえられないものが特異であると考える。

\mathbb{C}^p 写像芽 $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して,

$$df_x: T_0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r) \rightarrow T_0\mathbb{R}^p$$

$$\varepsilon, \quad df_x(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r) = \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(0), \dots, \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(0) \right)$$

$$df_u: T_0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r) \rightarrow T_0\mathbb{R}^p$$

$$\varepsilon, \quad df_u(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r) = \left(\sum_{i=1}^r w_i \frac{\partial f_i}{\partial u_i}(0), \dots, \sum_{i=1}^r w_i \frac{\partial f_p}{\partial u_i}(0) \right)$$

で定義する。この時、 $\ker df_x \supset T_0(0 \times \mathbb{R}^r)$ であり

$$df_u^k = \pi \circ df_u / \ker df_x: \ker df_x \rightarrow \text{Coker } df_x$$

が well-defined である。(ただし、 $\pi: T_0\mathbb{R}^p \rightarrow \text{Coker } df_x$ を canonical projection とする)。

定義 (2.1). i) f が原点で Σ_s^k -type $\varepsilon \neq >$ とは、

$$\text{rank } df_x = \min(m, p) - k \quad \text{かつ} \quad \text{rank } df_u^k = \min(r, p - \text{rank } df_x) - s$$

なる事である。

ii) f が 非特異 であるとは、 f が原点で Σ_0^0 -type $\varepsilon \neq >$ 時にいう。

この時、我々は、以下の命題を得る。

命題 (2.2). $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\text{rank } df_x = s$ かつ、 $\text{rank } df_u^k = q$ をみたす時、

i) f は以下の形の germ に SP-K-同値である;

$$f': (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s} \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{p-s}, 0) \quad f'(x^1, x^2, u) = (x^1, \bar{f}(x^2, u))$$

2) f は以下の形の germ に \mathcal{K} -同値である :

$$f : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{r-s}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{p-(s+r)}, 0)$$

$$f'(x^1, x^2, u^1, u^2) = (x^1, u^1 + g_1(x^2, u^1, u^2), g_2(x^2, u^1, u^2)),$$

$\in \mathbb{R}^s$, $x^1 = (x_1, \dots, x_s)$, $x^2 = (x_{s+1}, \dots, x_m)$, $u^1 = (u_1, \dots, u_r)$,

$u^2 = (u_{r+1}, \dots, u_r)$, $g_i(x^2, u^1, u^2) \in \mathcal{M}_{m-s+r}^2 \ominus \mathcal{M}_i$ ($i=1, 2$).

[証明] 1) ϵ (必要ならば, $(\mathbb{R}^m, 0) \times (\mathbb{R}^p, 0)$ の座標をとりかえることにより

$$df_x = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{--- (*)}$$

と仮定してよい。

この時, $f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{p-s}, 0)$ の components を $f(x, u) = (f_1(x, u), f_2(x, u))$ と書く。さて, 我々は以下の写像を定義する :

$$\Phi : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s} \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s} \times \mathbb{R}^r, 0)$$

by $\Phi(x^1, x^2, u) = (f_1(x^1, x^2, u), x^2, u)$. 仮定 (*) から Φ は局所微分同相であり,

その局所逆写像を $\Phi(x^1, x^2, u) = (\phi(x^1, x^2, u), x^2, u)$ とおく。

この時, 明らかに, $f \circ \Phi(x^1, x^2, u) = (x^1, f_2 \circ \Phi(x^1, x^2, u))$

となり \pm してこれら $(x^1, f_2 \circ \Phi(0, x^2, u))$ に \mathcal{K} -同値である。

2) 1) から, $f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $\text{rank } df_x = 0$ $\text{rank } df_u = r$

と仮定してよい。この時 $(\mathbb{R}^p, 0)$ の座標を変換して

$$df_u^K = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline & & 0 \end{array} \right) \quad \text{と (してよい)}.$$

今, $f = (f_1, f_2) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p-q}, 0)$ と成分表示する時, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r-q} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r-q}$ を $(u_1, u_2) \mapsto (f_1(0, u_1, u_2), u_2)$ と定義すると, この写像は原点で rank r の逆写像とみえ, $\Phi(u_1, u_2) = (\phi(u_1, u_2), u_2)$ とかくと,

$$\begin{aligned} f \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \Phi)(x, u_1, u_2) &= (f_1(x, \phi(u_1, u_2), u_2), f_2(x, \phi(u_1, u_2), u_2)) \\ &= (f_1'(x, u_1, u_2), f_2(x, u_1, u_2)) \text{ とおくと,} \end{aligned}$$

$f_1'(0, u_1, u_2) = u_1$ で f_1' の 1 次の項は u_1 のみである.

[証明終り]

この命題 (2.2) の系として以下の定理が得られる.

定理 (2.3). (P - \mathcal{K} -同値に対する陰函数定理).

$f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を非特異写像芽とする.

1) $m \geq p$ の時, f は $(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r) \mapsto (x_1, \dots, x_p)$ に S - P - \mathcal{K} -同値.

2) $m < p$ かつ $r \leq p - m$ の時, f は $(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r) \mapsto (x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0)$ に P - \mathcal{K} -同値.

3) $m < p$ かつ $r \geq p - m$ の時, f は $(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r) \mapsto (x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_{p-m})$ に P - \mathcal{K} -同値.

証明略.

この様に, 非特異写像芽については標準型が決定でき, かつ原点における variety の分岐が (おこすな) 事となる. では, 特異写像芽についてはいかに分類のアルゴリズムをあたえる

べきか?

§3. 有限確定性. この節では, 通常の意味での有限確定性と, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$ の2種類の変数を分離させた意味での有限確定性について考察する.

定義 (3.1). $f, g : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ 写像芽とする時,

$$(i) \quad k \in \mathbb{N} \text{ に対して, } f \sim_{P\text{-jet}}^k g \Leftrightarrow (f^* - g^*)(\mathcal{M}_P) \subset \mathcal{M}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r}^{k+1}$$

$$(ii) \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ に対して, } f \sim_{(k_1, k_2)\text{-jet}} g \Leftrightarrow (f^* - g^*)(\mathcal{M}_P) \subset (\mathcal{M}_{\mathbb{R}^m}^{k_1+1} + \mathcal{M}_{\mathbb{R}^r}^{k_2+1}) \subset C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)$$

これは, 明らかに同値関係であり $f \sim F \rightarrow$

同値類をそれぞれ $j_0^k f$ ($j_0^{(k_1, k_2)} f$) で表す.

定義 (3.2). 写像芽 $f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が k -determined (resp. (k_1, k_2) -determined) relative to \mathcal{J} とは, $j_0^k f = j_0^k g$ (resp. $j_0^{(k_1, k_2)} f = j_0^{(k_1, k_2)} g$) なる任意の写像芽 $g : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ は $f \sim_{\mathcal{J}} g$ なる事とする. ただし, $\mathcal{J} = P\text{-}\mathcal{K}$ or $S.P\text{-}\mathcal{K}$.

f が有限確定とは, ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して, f が k -determined であるとする.

注). f が有限確定 $\Leftrightarrow \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s.t. f is (k_1, k_2) -det.

f が有限確定であるための必要充分条件は, J. Mather の仕事と同様にできる; $C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$ を $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$ の写像芽全体のなる $C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)$ -加群とする. 任意の写像芽 $f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して,

$$\begin{aligned}
T_e(P-\mathcal{F})(f) &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right\rangle_{C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_r} \right\rangle_{C^0(\mathbb{R}^r)} + f^*(\mathfrak{m}_p) C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \\
T_e(SP-\mathcal{F})(f) &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right\rangle_{C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)} + f^*(\mathfrak{m}_p) C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p), \\
T(P-\mathcal{F})(f) &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right\rangle_{\mathfrak{m}_{m+r}} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_r} \right\rangle_{\mathfrak{m}_r} + f^*(\mathfrak{m}_p) C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p), \\
T(SP-\mathcal{F})(f) &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right\rangle_{\mathfrak{m}_{m+r}} + f^*(\mathfrak{m}_p) C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)
\end{aligned}$$

とよく

定理 (3.3) (Characterization theorem). 以下は同値.

- 1) f : finitely determined rel to $P-\mathcal{F}$ (resp. $SP-\mathcal{F}$).
- 2) $\exists k \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathfrak{m}_{m+r}^k C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T_e(P-\mathcal{F})(f)$ (resp. $T_e(SP-\mathcal{F})(f)$).
- 3) $\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s.t. $(\mathfrak{m}_m^{k_1} + \mathfrak{m}_r^{k_2}) C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T_e(P-\mathcal{F})(f)$ (resp. $T_e(SP-\mathcal{F})(f)$).
- 4) $\dim_{\mathbb{R}} C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) / T_e(P-\mathcal{F})(f) < +\infty$
(resp. $\dim_{\mathbb{R}} C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) / T_e(SP-\mathcal{F})(f) < +\infty$).

証明略

さて, このように有限確定性は特徴づけられたが, 分類のためには, その $P-\mathcal{F}$ -同値類 (又は $SP-\mathcal{F}$ -同値類) を決定する k -jet や (k_1, k_2) -jet の次数を具体的に評価する必要がある. 時に計算できる量からの評価が望まれる. ここで, (k_1, k_2) -determinacy の jet の次数の評価をいくつかあたえる.

定理 (3.4). $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^0 写像芽とする.

- 1) $D \in C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$ の $C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)$ -submodule として
 $D \subset T_e(P-\mathcal{F})(f) + (\mathfrak{m}_m^{s_1} + \mathfrak{m}_r^{s_2}) C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$ と
 $(\mathfrak{m}_m^{s_1} + \mathfrak{m}_r^{s_2}) C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T(SP-\mathcal{F})(f) + \mathfrak{m}_r D + \mathfrak{m}_{m+r} (\mathfrak{m}_m^{s_1} + \mathfrak{m}_r^{s_2}) C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$

を満たすならば, f は (s_1, s_2) -determined rel to P - \mathcal{K} である.

2) $r=1$ の時, $(\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T(s, P-\mathcal{K})(f) + \mathcal{M}_{m+r}(\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$ ならば f は (s_1, s_2) -determined rel to $SP\mathcal{K}$.

証明の概略.

2) は 1) と同様 (むしろやさしい) に証明できるので, 1) のみを証明する.

この証明のためには以下の 2 つの Lemma を必要とする.

補題 (3.5). R を可換環, E を R -加群, $\Sigma \in R$ の部分環とする. ($\Sigma \ni 1$ でもよい). $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Sigma^k E = 0$ をみたしているとする.

$$\text{もし, } E = \Sigma E \implies E = 0.$$

[証明]. $E = \Sigma E$ とすると, $\Sigma E = \Sigma^2 E = \dots = \Sigma^k E = 0$
 $\forall k \in \mathbb{N}$. Q.E.D

補題 (3.6). $f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を (k_1, k_2) -determined relative to P - \mathcal{K} とする. $(k_1, k_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を $k_1 \leq l_1$ かつ $k_2 \leq l_2$ とする. この時, 以下は同値.

1) $f : (k_1, k_2)$ -determined rel to P - \mathcal{K} .

2) $j_0^{(k_1, k_2)} f = j_0^{(k_1, k_2)} g$ なる任意の $g : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して,

$$(\mathcal{M}_m^{k_1+1} + \mathcal{M}_r^{k_2+1})C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T(P-\mathcal{K})(g) + (\mathcal{M}_m^{l_1+1} + \mathcal{M}_r^{l_2+1})C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p).$$

証明は [5] のアナロジーであるので省略する.

[定理 (3.4) の証明]

$j_0^{(s_1, s_2)} g = j_0^{(s_1, s_2)} f$ なる $g: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して, 簡単な計算から,

$$(1) \quad D \subset T_e(P-X)(g) + (\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$$

から

$$(2) \quad (\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T(S, P-X)(g) + \mathcal{M}_r D + \mathcal{M}_{m+r} (\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$$

が成立する: γ からわかる.

$C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)$ - 加群

$$E = \frac{T(S, P-X)(g) + \mathcal{M}_r D + (\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)}{T(S, P-X)(g) + \mathcal{M}_r D + \mathcal{M}_{m+r}^k (\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)}$$

($E \in \mathcal{E}^k$, $k = 2l + s + 2$ & $s = \min(s_1, s_2)$)

したがって, (2) より $Z E = E$ ($E \in \mathcal{E}^k$ ($Z = \mathcal{M}_{m+r}$)).

従って, 補題 (3.5) から $E = 0$. i.e.

$$(\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T(S, P-X)(g) + \mathcal{M}_r D + \mathcal{M}_{m+r}^k (\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$$

$D = 0$ であること代入できる.

$$(3) \quad (\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T(P-X)(g) + \mathcal{M}_r (\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) + \mathcal{M}_{m+r}^k (\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p).$$

$C_0^{\infty}(\mathbb{R}^r)$ - module

$$E' = \frac{T(P-X)(g) + (\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)}{T(P-X)(g) + \mathcal{M}_{m+r}^k (\mathcal{M}_m^{s_1} + \mathcal{M}_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)}$$

したがって, (3) より, $Z' E' = E'$ ($Z' = \mathcal{M}_r$).

従って、補題 (3.5) から $E' = 0$

$$\text{故に, } (\pi_n^{s_1} + \pi_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T(P-\mathcal{K})(g) + \pi_{n+r}^k (\pi_n^{s_1} + \pi_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p).$$

$$\begin{aligned} \text{よ, } \pi_{n+r}^k (\pi_n^{s_1} + \pi_r^{s_2}) &\subset \pi_{n+r}^k \pi_{n+r}^s \\ &\subset (\pi_n^{l+s+1} + \pi_r^{l+1}) \subset (\pi_n^{l+1} + \pi_r^{l+1}). \end{aligned}$$

い.e.

$$(\pi_n^{s_1} + \pi_r^{s_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T(P-\mathcal{K})(g) + (\pi_n^{l+1} + \pi_r^{l+1}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$$

補題 (3.6) より成立.

Q.E.D.

この定理 (3.4) の系として以下の命題が成立する.

$$\begin{aligned} \text{系 (3.7)} \quad (1) & (\pi_n^{k_1} + \pi_r^{k_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T_e(P-\mathcal{K})(f) + \\ & (\pi_n^{k_1+l} + \pi_r^{k_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \quad \text{か} > \\ (2) & \pi_{n+r}^l C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T_e(S, P-\mathcal{K})(f) + \pi_r C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) + \\ & (\pi_n^{k_1+l} + \pi_r^{k_2}) C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f : (k_1+l, k_2)$ -determined relative to $P-\mathcal{K}$.

系 (3.8) $\pi_{n+r}^k C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T_e(P-\mathcal{K})(f) \Rightarrow f : (S(k, r), S(k, r) + k)$ -determined relative to $P-\mathcal{K}$.

$$\text{たに } (S(k, r)) = \begin{cases} k(r+1) & \text{if } \text{rank}(df_n) = p \\ k(r+2) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\text{系 (3.9)} \quad C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) = T_e(P-\mathcal{K})(f)$$

$\Rightarrow f : (r+1, 1)$ -determined relative to $P-\mathcal{K}$.

(注) : 系 (3.9) は Mather の定理 (stable germ は $(r+1)$ -determined

に対応しているに一般化となっている).

さて, ここで S.P.- \mathcal{K} -同値について考えてみる. 次の命題は $r \geq 2$ の場合と $r=1$ の場合のうちか1)をあらわしている.

命題 (3.10). $f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ 写像芽で $r \geq 2$ とする. 次の同値

1) f : finitely determined relative to S.P.- \mathcal{K} .

2) f : S.P.- \mathcal{K} -equivalent to $O(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r) \mapsto (x_1, \dots, x_p)$.

(証明略)

(注) Golubitsky - Schaeffer は以下の評価を得ている: $r=1$ のとき, $\bigcap_{m \geq k} C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^p) \subset \mathcal{T}(\text{S.P.-}\mathcal{K}) \Rightarrow f$: k -determined rel to P- \mathcal{K} ". 今, $r \geq 2$ の場合, 定理 (3.3) と命題 (3.10) から, 上記左辺の条件をみたすような写像芽は 1-determined rel to S.P.- \mathcal{K} となり, 上記の評価は意味をなさぬ.

§4. Versal deformations.

$f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ の s -parameter deformation とは, C^∞ 写像芽 $F : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ で $F|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times 0} = f$ なる F のことである. f の deformation の versality 等については他の場合と同様に定義される.

定義 (4.1) $F : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を $f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ の deformation とする時.

F : infinitesimally \mathcal{J} -versal \Leftrightarrow

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p) = T_e(\mathcal{Y})(f) + V_F,$$

ただし, $\mathcal{Y} = P\text{-}\mathcal{K}$ or $SP\text{-}\mathcal{K}$ かつ $V_F = \langle \frac{\partial F}{\partial x_i} | \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_j} | \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rangle$

この時以下の定理が得られる.

定理 (4.2) $\mathcal{Y} = P\text{-}\mathcal{K}$ or $SP\text{-}\mathcal{K}$ とある時. 次の同値.

- 1) $F : \mathcal{Y}$ -versal deformation of f .
- 2) $F : \text{infinitesimally } \mathcal{Y}\text{-versal deformation of } f$.

(証明略)

この定理の 2, 3 の応用を示す

A). $f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ C^∞ 写像芽に対して,

$$D_f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \text{ 且 } D_f(x, y) = f(x) - y,$$

$$G_f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, 0) \text{ 且 } G_f(x) = (x, f(x))$$

で定義する. この時,

補題 (4.3). $(G_f)^* : C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ は surjective であり, $\text{Ker } (G_f)^* = \langle f_1(x) - y_1, \dots, f_p(x) - y_p \rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p)}$ とある, ただし, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$. (trivial)

任意の $f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して

$$T(A)(f) = \langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m} \rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^m)} + f^*(C_0^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)) \text{ とおくと}$$

定理 (4.4) (Gomossou [2]). $F : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ 且

s -parameter deformation of f . とあるとき.

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) = T(A)(f) + V_F \Rightarrow F : A\text{-versal deformation}$$

of f .

[proof]. 補題 (4.3) から surjective homo

$(G_f)^* : C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ がある. 定義から,

$$(G_f)^*(T(P-f)(0_f)) = T(A)(f), \quad V_{D_f} = V_f.$$

$\ker(G_f)^* = D_f^*(\mathcal{M}_f) C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$, したがって, F が infinitesimally A -versal $\Leftrightarrow D_f$ が infinitesimally P - K -versal. \square ED

B) $(\mathbb{C}^m, 0) \xrightarrow{g} (\mathbb{C}^p, 0)$ と Π の system を考える. $(f, g: \text{hol})$.

$$\downarrow f$$

$$(\mathbb{C}, 0)$$

$$(\mathbb{C}^m, 0) \xrightarrow{g_i} (\mathbb{C}^p, 0) \quad i=1, 2 \text{ に対して.}$$

$$\downarrow f_i$$

$$(\mathbb{C}, 0)$$

$f_1|_{g_1^{-1}(0)}$ と $f_2|_{g_2^{-1}(0)}$ が Right-同値とは,

$\exists \Phi : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$: biholomorphic germ s.t. $\Phi^*(\mathbb{I}(f_1)) = \mathbb{I}(f_2)$

s.t. $f_2 \cdot \Phi|_{g_2^{-1}(0)} = f_1|_{g_1^{-1}(0)}$ とする.

i.e. complex varieties 上の holomorphic function germs の右同値として上記の様に定義するのが自然である. この時, この右同値関係を残す立場から以下のように解いた.

$$(\mathbb{C}^m, 0) \xrightarrow{g} (\mathbb{C}^p, 0) \text{ に対して}$$

$$\downarrow f$$

$$(\mathbb{C}, 0) \quad K_{(f,g)} : (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, 0)$$

を $K_{(f,g)}(x, y) = (f(x) - y, g(x))$ と定義する.

$$\text{定理 (4.5)} \quad (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^s, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{C}^p, 0) \quad \text{と} \quad (\mathbb{C}^m, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{C}^p, 0)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow F & & \downarrow f \\ (\mathbb{C}, 0) & & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

の s-parameter deformation とする。

$$\underbrace{\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]}_P \otimes_m \mathbb{C} \oplus_m \mathbb{C} = (T_x \mathcal{K}(g)) \oplus \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}, g_1, \dots, g_p \rangle_{\mathbb{C}} + V_f \oplus V_F$$

なるが、 $F|_{\mathbb{C}^1(0)}$ は $f|_{\mathbb{C}^1(0)}$ の Right-versal deformation である。(証明は定理(4.4)と同様)

④ この定理は、どのような意味(重要性)をもつかは、筆者にはゆかさない。ただ、non-singular な object 上の函数の研究の - 一歩進んで、singular な object (ie variety) 上の函数の研究のためには有効であるかと期待する。

さらに、定理(4.2)は以下のように一般化することかできる：
 $f, g : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{r_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{r_k}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して、

f, g が (r_1, \dots, r_k) -P- \mathcal{K} -同値であるとは、

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{r_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{r_k}, 0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{r_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{r_k}, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{R}^{r_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{r_k}, 0) & \xrightarrow{\phi_1} & (\mathbb{R}^{r_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{r_k}, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{R}^{r_k}, 0) & \xrightarrow{\phi_k} & (\mathbb{R}^{r_k}, 0) \end{array} \quad \text{: 可換}$$

とすることができる、local diffeos が存在して、

$$\Phi^*(I(f)) = I(g)$$

が成立する事とする。

この時, (r_1, \dots, r_k) - P - K -同値に対応する versality theorem とは次のものである.

定理 (4.2) $F : (R^m \times R^{r_1} \times \dots \times R^{r_k} \times R^s, 0) \rightarrow (R^p, 0) \in S$ -parameter deformation of $f : (R^m \times R^{r_1} \times \dots \times R^{r_k}, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ とする.

$$C_0^r(R^m \times R^{r_1} \times \dots \times R^{r_k}, R^p) = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \rangle_{C_0^r(R^m \times R^{r_1} \times \dots \times R^{r_k})} + \langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_r} \rangle_{C_0^r(R^{r_1} \times \dots \times R^{r_k})} + \dots + \langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_k} \rangle_{C_0^r(R^k)} + f^*(m_p) C_0^r(R^m \times R^{r_1} \times \dots \times R^{r_k}, R^p) + V_F$$

ならば, F は (r_1, \dots, r_k) - P - K -versal deformation of f である.

(注) F が f の (r_1, \dots, r_k) - P - K -versal deformation であるとき,

$F^{-1}(0)$ は $(R^m \times R^{r_1} \times \dots \times R^{r_k} \times R^s, 0)$ の smooth submanifold である事がわかる. (かも)

$$F^{-1}(0) \xrightarrow{\pi_1} (R^{r_1} \times \dots \times R^{r_k}, 0) \xrightarrow{\pi_1} \dots \xrightarrow{\pi_k} (R^k, 0)$$

は composed map として安定であることが示される. 逆に,

$$(R^m, 0) \xrightarrow{f_1} (R^{r_1}, 0) \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_k} (R^k, 0) \xrightarrow{f_{k+1}} (R^s, 0)$$

を安定な composed map germ とするとき.

$$\begin{array}{ccc} (R^m \times R^{r_1} \times \dots \times R^{r_k} \times R^s, 0) & \longrightarrow & (R^{r_1} \times R^{r_2} \times \dots \times R^s, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, y_1, \dots, y_k, z) & & (f_1(x)-y_1, f_2(y_1)-y_2, \dots, f_{k+1}(y_k)-z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (R^m \times R^{r_1} \times \dots \times R^{r_k}, 0) & \longrightarrow & (R^{r_1} \times \dots \times R^{r_k} \times R^s, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, y_1, \dots, y_k) & \longmapsto & (f_1(x)-y_1, f_2(y_1)-y_2, \dots, f_{k+1}(y_k)) \end{array}$$

の (r_1, \dots, r_k) - P - K -versal deformation であることがわかる.

この事は, 安定合成写像の研究が微分方程式の定常解の研究に役立つ事を示し, 逆に, P - K -同値の研究が安定合成

写像芽の研究に有効であらうことを示している。

35 分類. ここでは, codimension が低い場合の, P - X -同値による写像芽の族の分類を行なう.

$\iota: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0)$ を canonical inclusion とする, この

時 $\mathcal{Z}^*: C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ が定義されるか.

\mathcal{Z}^* は surjection でありかつ $\ker \mathcal{Z}^* = \mathcal{M}_r C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$ である.

$f: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して, $f_0 := f|_{\mathbb{R}^n \times 0}$ と定義する.

補題 (5.1) $\mathcal{Z}^*: C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ は

\mathbb{R} -isomorphism

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^* &: C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) / \mathcal{T}_e(\mathcal{S}P\text{-}\mathcal{X})(f) + \mathcal{M}_r C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \\ &\cong C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) / \mathcal{T}_e \mathcal{X}(f_0) \end{aligned}$$

と誘導される.

定義 (5.2)

$$P\text{-}\mathcal{X}\text{-codim}(f) = \dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) / \mathcal{T}_e(P\text{-}\mathcal{X})(f)$$

$$\mathcal{X}\text{-codim}(f_0) = \dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) / \mathcal{T}_e \mathcal{X}(f_0)$$

と定義する.

(注) 補題 (5.1) から

$$\mathcal{X}\text{-codim}(f_0) = \dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) / \mathcal{T}_e(\mathcal{S}P\text{-}\mathcal{X})(f) + \mathcal{M}_r C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$$

補題 (5.3) $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して,

i) $\mathcal{K}\text{-codim}(f_0) \leq P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) + 1.$

ii) $\text{rank}(df_x) = s$, $\text{rank}(df_u^k) = g$

$\Rightarrow P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) \geq P - (s + g).$

証明 i) $\mathcal{K}\text{-codim}(f_0) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{C^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)}{T_e(S, P\text{-}\mathcal{K})(f)} + \dim_{\mathbb{R}} C^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$
 $\leq \dim_{\mathbb{R}} \frac{C^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)}{T_e(S, P\text{-}\mathcal{K})(f)} + \dim_{\mathbb{R}} \langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_r} \rangle$
 $= P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) + \dim_{\mathbb{R}} \frac{T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f)}{T_e(S, P\text{-}\mathcal{K})(f) + \dim_{\mathbb{R}} \langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_r} \rangle}$
 $\leq P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) + 1$

ii) 命題 (2.2) の 1) より,

$$f: (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{p-s}, 0)$$

$$f(x^1, x^2, u) = (x^1, \bar{f}(x^2, u))$$

と仮定してよい。

$$\pi: C^{\infty}(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{p-s}) \rightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}^{n-s} \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^{p-s})$$

を canonical projection とすると $\pi(T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f)) = T_e(P\text{-}\mathcal{K})(\bar{f})$.

よって、 $\text{rank}(df_x) = 0$ と仮定してよい。

さらに、命題 (2.2) の 2) から f の形が制限され、上記の
評価式が得られる。 [証明終]

この時、 $P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) = 0$ のものは、以下の様に分類できる
ことができる。

さて, $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ で $P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) \leq 3$ なる
 f の Σ を分類してみよう. 補題 (5.5) から, f は $\Sigma_0^0, \Sigma_0^1, \Sigma_0^2,$
 $\Sigma_0^3, \Sigma_0^4, \Sigma_1^1, \Sigma_1^2, \Sigma_1^3,$ の各 type をもつる. また, 補題 (5.3)
 から $f|_{\mathbb{R}^m \times 0}$ の $\mathcal{K}\text{-codim}$ は 4 以下である. ie $h: (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^l, 0)$
 $(k \leq 4)$ で $\mathcal{K}\text{-codim}(h) \leq 4$ なる f のは, $(\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^l, 0)$
 $(l \leq 8)$ なる stable map の分類と同じとなる. $\gamma = 3$ の時, Σ
 は, Mather の "nice range" の中なのである. 全ての stable map
 は discrete algebraic type である, 従って Damon [1] の分類表が使
 用できる. この Damon の分類表にあてはめられた germ の $\mathcal{K}\text{-versal}$
 deformation を構成してやると, $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ は g から g へ
 g からのひきまどしになるはずである. さらに, 分離的有
 限確定性の jet の次数の評価を適用してやると以下の定理が
 得られる.

定理 (5.6) $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ を $P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) \leq 3$ と
 すると, Table-I に表われる写像芽のどれかに $P\text{-}\mathcal{K}\text{-同値}$ とな
 る.

同様にして, 超曲面についても同様の結果が得られる.

定理 (5.7) $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を $P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) \leq 4$ とす
 ると, Table-II に表われる写像芽のどれかに $P\text{-}\mathcal{K}\text{-同値}$ となる.

最後に, $r=2$ の時, $f: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ で $\mathbb{K}\text{-codim}(f_0)=1$

& $P\text{-}\mathbb{K}\text{-codim}(f) \leq 5$ の f のは以下のように分類される.

$P\text{-}\mathbb{K}\text{-codim}(f)$	germ	$P\text{-}\mathbb{K}\text{-versal deformation}$
0	$\pm x^2 + u_1$	$\pm x^2 + u_1$
1	$\pm x^2 + u_1^2 + u_2^2$	$\pm x^2 + u_1^2 + u_2^2 + v_1$
2	$\pm x^2 + u_1^2 + u_2^3$	$\pm x^2 + u_1^2 + u_2^3 + v_1 + v_2 u_2$
3	$\pm x^2 + u_1^2 + u_2^4$	$\pm x^2 + u_1^2 + u_2^4 + v_1 + v_2 u_2 + v_3 u_2^2$
4	$\pm x^2 + u_1^3 - u_1 u_2^2$ $\pm x^2 + u_1^3 + u_2^3$ $\pm x^2 + u_1^2 + u_2^5$	$\pm x^2 + u_1^3 - u_1 u_2^2 + v_1 + v_2 u_1 + v_3 u_1 + v_4 (u_1^2 + u_2^2)$ $\pm x^2 + u_1^3 + u_2^3 + v_1 + v_2 u_1 + v_3 u_2 + v_4 u_1 u_2$ $\pm x^2 + u_1^2 + u_2^5 + v_1 + v_2 u_2 + v_3 u_2^2 + v_4 u_2^3$
5	$\pm x^2 + (u_1^2 u_2 + u_2^4)$ $\pm x^2 + u_1^2 + u_2^6$	$\pm x^2 + (u_1^2 u_2 + u_2^4) + v_1 v_2 u_1 v_3 u_2 + v_4 u_1^2 + v_5 u_2^2$ $\pm x^2 + u_1^2 + u_2^6 + v_1 + v_2 u_2 + v_3 u_2^2 + v_4 u_2^3 + v_5 u_2^4$

(注) 上記において, $x^2 + u_1^2 + u_2^3$ と $u_1^3 - u_1 u_2^2$ は T. Poston [] によつて結晶スペクトルの分岐の研究に使われた.

又, $r \geq 2$ の時は, $P\text{-}\mathbb{K}\text{-codim}(f)$ のみのせいよか r の分類だけでは複雑になるので, $\mathbb{K}\text{-codim}(f_0)$ と $P\text{-}\mathbb{K}\text{-codim}(f)$ の両方を指標として分類するのが良いと思われる.

Table I

P- \mathcal{K} -codim(f)	germ
0	$(x_1, \dots, x_{n-1}, u+x_n^2)$
1	$(x_1, \dots, x_{n-1}, u+x_n^3)$ $(x_1, \dots, x_{n-1}, u+x_n^2)$
2	$(x_1, \dots, x_{n-1}, u+x_n^4)$ $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}^3+ux_n)$ $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}^3+u^2)$ $(x_1, \dots, x_{n-1}, u^3+x_n^2)$
3	$(x_1, \dots, x_{n-1}, u+x_n^5)$ $(x_1, \dots, x_{n-1}, u^2+x_n^4)$ $(x_1, \dots, x_{n-1}, u^3+x_n^3)$ $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}^4+ux_n)$ $(x_1, \dots, x_{n-2}, u+x_{n-1}x_n, x_{n-1}^2+x_n^2)$ $(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}x_n, u+x_{n-1}^2+x_n^2)$ $(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^2+x_{n-1}x_n, u+x_{n-1}^2+x_n^2)$

Table II

P- \mathcal{K} -codim(f)	germ
0	$u+Q(x_1, \dots, x_n)$
1	$u+x_1^3+Q(x_2, \dots, x_n)$ $u^2+Q(x_1, \dots, x_n)$
2	$u^4+x_1^4+Q(x_2, \dots, x_n)$ $u^2+x_1^3+Q(x_2, \dots, x_n)$ $u^3+Q(x_1, \dots, x_n)$ $x_1^3+ux_1+Q(x_2, \dots, x_n)$
3	$u+x_1^5+Q(x_2, \dots, x_n)$ $u^+(x_1^3+x_2^3)+Q(x_3, \dots, x_n)$ $u^+(x_1^3-x_1x_2^2)+Q(x_3, \dots, x_n)$
4	$u^4+Q(x_1, \dots, x_n)$ $x_1^4+ux_1+Q(x_2, \dots, x_n)$ $u^+x_1^6+Q(x_2, \dots, x_n)$ $u^+(x_1^2x_2+x_2^4)+Q(x_3, \dots, x_n)$ $u^5+Q(x_1, \dots, x_n)$ $x_1^5+ux_1+Q(x_2, \dots, x_n)$

Here, $Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$

1
2
1

文献

- [1] Golubitsky, M. and Schaeffer, D. : A theory for imperfect bifurcation via singularity theory. *Comm. Pure Appl. Math.* 32, 21-98 (1979)
- [2] Gromov, E. P. : A versality theorem for a birational group of change of variables. *Funct. Anal. Appl.* 9, 332-333 (1975)
- [3] 泉屋周一 ; Generic Bifurcations of Varieties I.
数理解析研究所講究録 "経済学と位相幾何学" 1982年6月
- [4] Mather, J. ; stability of C^∞ mappings IV
Publ. Math. I.H.E.S. 35 127-156 (1969)
- [5] Mather, J. ; stability of C^∞ mappings IV
Publ. Math. I.H.E.S. 37 223-248 (1970)
- [6] Poston, T. ; Perturbed bifurcations and crystal spectra. In ; *Applications of non-linear Analysis in the Physical Sciences* (ed. Arman, H. et al) Pitman, 77-91 (1981)

以上

(1982, 12.10).