数理解析研究所講究録
494巻 1983年 78-89

ある種の代数的システムに付随する無限行列の性質

山梨大　工　内村桂輔 (Keisuke Uchimura)

1. はじめに

次のような代数的システムを考える。これは文脈自由文法と考えても良い。

$$X = a_0(x)X^k + a_{k-1}(x)X + a_k(x), \qquad (1.1)$$
$$a_0(x),\ a_k(x) \in x\mathbb{R}[x],\ \ a_{k-1}(x) \in x\mathbb{R}.$$

この文脈自由文法からプッシュダウンオートマトンを作る。そのプッシュダウンオートマトンのコンフィギュレーションを"状態"と考えるとそれは無限状態オートマトンになる。その無限個の状態に順番をつけ、そのオートマトンの incidence 行列を考える([2]参照)。この行列をAとし次のことを示す。(a) Aのn次の truncation の固有値はある代数曲線上に dense に分布する。(b) Aが非負行列の時、Aと(1,1)の判別式との間に Perron-Frobenius 定理が成り立つ。(c) (a)と(b)の情報科学への応用を示す。

2. Truncationの固有値

まず、次の代数的システムを考えよう。

$$X = a_0(x)X^{k} + a_1(x)X^{k-1} + \cdots + a_k(x) \quad (2.1)$$

(2.1)に付随する無限行列をAとする。Aの最初のn行n列より作られる有限行列をAのn次のtruncationといい、A_nであらわす。

(2.1)に付随する無限オートマトンにおいて、Xが1番目の状態でX^2が $m+1$番目の状態であると仮定する。

<u>補題 2.1.</u>　　$1 \leq j \leq m-1$,　$1 \leq n$に対して、

$$\det(E_{m(n-1)+j} - xA_{m(n-1)+j}) = \det(E_{m(n-1)+1} - xA_{m(n-1)+1}),$$

$$(\widetilde{E_{mn+j} - xA_{mn+j}})_{(1,1)} = \det(E_{(n-1)m+1} - xA_{(n-1)m+1}).$$

ここで、$\widetilde{M}_{(1,1)}$は行列Mの(1,1)の余因子をあらわし、E_nはn次の単位行列をあらわす。

そこで、$d_n(x) = \det(E_{m(n-1)+1} - xA_{m(n-1)+1})$とおく。

また、$P_{[1,2,\cdots,mn+j]}(1,1)(x) = d_n(x)/d_{n+1}(x)$が成り立つ。

$P_{[1,2,\cdots,mn+j]}(1,1)(x)$は(2.1)に付随する無限オートマトンにおいて、状態$1, 2, \cdots, mn+j$のみを通り状態1から状態1に行く道に対応するgenerating functionである。このgenerating functionに関しては[1]を御参照ください。

補題2.2.

$$d_{n+k}(x) = (1-a_{k-1})d_{n+k-1}(x) - [a_{k-2}a_k d_{n+k-2}(x) + a_{k-3}a_k^{2} d_{n+k-3} + \cdots + a_0 a_k^{k-1} d_n(x)],$$

$$d_0 = 1,\quad d_{-1} = d_{-2} = \cdots = d_{-k+1} = 0.$$

これ以降は式(2.1)の特殊な場合である次式をとり扱うことにする。

$$X = a_0(x)X^{k} + a_{k-1}(x)X + a_k(x).$$

ここでは便宜的に次の記法を使う。

$$a_0(x)X^{k} + a_{k-1}(x)X + a_k(x) = 0, \qquad (2.2)$$

$$a_0(x),\ a_k(x) \in x\mathbb{R}[x],\quad a_{k-1}(x) = cx-1,\ (c\in\mathbb{R})$$

ここで、$D(x)$を(2.2)のXについての判別式とする。すなわち

$$D(x) = a_0^{2k-2}\prod_{i<j}(y_i(x)-y_j(x))^2,$$

$y_j(x)$は(2.2)の解。そして、

$$\tilde{D}(x) = D(x)/k^{k}a_0^{k-2}$$ とおく。

また $D^{*}(x) = a_{k-1}^{k}$ とする。

(2.2)式についての$d_n(x)$を変形して

$$d_n^{*}(x) = d_n(x)/(-a_{k-1}(x))^{n}$$ とおく。

この時補題2.2より次の漸化式が成り立つ。

$$d_{n+k}^{*} = d_{n+k-1}^{*} - \left[(-1)^{\binom{k+1}{2}} \widetilde{D}/D^{*} + (k-1)^{k-1}/k^{k}\right] d_n^{*}$$

$z = \widetilde{D}(x)/D^{*}(x)$ とおき、$d_n^{*}(x)$の変数をzにかえたものを$\widetilde{d}_n(z)$とする。すると、

$k \equiv 0, 3 \pmod 4$ の時、

$$\widetilde{d}_{n+k}(z) = \widetilde{d}_{n+k-1}(z) - \left[z + (k-1)^{k-1}/k^{k}\right] \widetilde{d}_n(z),$$

$k \equiv 1, 2 \pmod 4$ の時

$$\widetilde{d}_{n+k}(z) = \widetilde{d}_{n+k-1}(z) - \left[-z + (k-1)^{k-1}/k^{k}\right] \widetilde{d}_n(z),$$

$\widetilde{d}_0 = \widetilde{d}_1 = \cdots = \widetilde{d}_{k-1} = 1$, となる。

これ以降は$k \equiv 0, 3 \pmod 4$ の場合だけをとり扱うことにする。他の場合も同様である。

<u>補題 2.3.</u>　k以上のnに対して、$\widetilde{d}_n(z)$のゼロ点は正であり、$\widetilde{d}_n(z)$と$\widetilde{d}_{n+1}(z)$のゼロ点は互いに分離しあう。

$C_+ = \{ x \in \mathbb{C} \mid {}^{\exists} z > 0,\ \widetilde{D}(x) = D^{*}(x) \times z \}$ とおく。

<u>命題 2.1.</u>　$k \equiv 0, 3 \pmod 4$ とする。この時$d_n(x)$のゼロ点は全て、C_+上にある。

C_+ は定義より明らかに、代数曲線の組である。

<u>命題 2.2.</u>　複素数 x について、x が C_+ の要素である必要十分条件は、$\lim_{n\to\infty}(d_n(x)/d_{n+1}(x))$ が収束しないことである。

(2.2) に付随する無限オートマトンに対して、X から X への道の数に対応する *generating function* を $P(1.1)(x)$ として、それを解析接続した関数を $\overline{P}(1,1)(x)$ とおく。

<u>命題 2.3.</u>　C_+ に属さない複素数 x について、

$$\lim_{n\to\infty} d_n(x)/d_{n+1}(x) = \overline{P}(1.1)(x)$$

<u>補題 2.4.</u>　$F_n(z)=\tilde{d}_n(z)/\tilde{d}_{n+1}(z)$ とおく。G を $\tilde{d}_n(z)$ 達の全てのゼロ点の集合から正の距離のある、複素平面上の有界集合とする。この時、任意の負数 z_0 に対して、定数 k_0 が存在して、任意の G の元 z に対して、

$$|F_n(z)| \le k_0\,|F_n(z_0)|.$$

ここで、次の定理を使う。

<u>定理(Vitali).</u> $\{f_n\}$ を複素平面の開領域Gで正則な、解析関数の列とする。もし$\{f_n\}$がGで一様に有界で、Gに集積点を持つGの部分集合Eで$\{f_n\}$が収束するならば、$\{f_n\}$はGで収束する。

命題2.1, 命題2.2, 補題2.4と上の定理より次の定理が導かれる。

<u>定理2.1.</u> $W = \{ y \in \mathbb{C} \mid y$ はある$d_n(x)$のゼロ点$\}$とおく。すると集合Wは集合C_+上で*dense*である。

3. Perron-Frobenius 定理.

次に、無限オートマトンに付随する行列が非負行列の場合を考えよう。すなわち、式(2.2)で$a_0(x)$, $a_{k-1}(x)+1$, $a_k(x)$が$x\mathbb{R}_+[x]$に属する場合を考える。

n次の非負行列Bに対して、$f_B(x) = \det(E_n - xB)$ とおく。$f_B(x)$のゼロ点は、行列Bの0以外の固有値の逆数になっている。$\det(xE_n - B) = x^n f_B(1/x)$。

この時、Perron-Frobenius 定理（の一部）は次のようになる。

(1). $f_B(x)$には正のゼロ点r（フロベニウス根の逆数）が存在して、yを$f_B(x)$の任意のゼロ点とする時、不等式

$$r \leq |y|$$

が成り立つ。

(2). $0 < x < r$ ならば、$(E_n - xB)^{-1}$が存在して、正行列となる。

(3). 非負行列Bに付随する有限グラフの周期をdとする。この時 $|y| = r$ となる$f_B(x)$ のゼロ点は丁度d個あり、それらは $re^{i2\pi k/d}$ $(k = 0, 1, \cdots, d-1)$である。

(4). (3). で述べたd個のゼロ点は $f_B(x)$の単純ゼロ点である。

この論文では、式(2、2)から無限オートマトン（無限グラフ）を作り、その *incidence* 行列としての無限行列を考えた。この無限行列に対して、上の Perron-Frobenius 定理と同様の結果が成り立つ。その際、有限次行列の特性多項式の類似物$f_B(x)$の役目は、式(2、2)の判別式$D(x)$を変形して得られた、$\widetilde{D}(x)$がうけもつ。

(2、2)に付随する無限行列をAとする。

定理 3.1.

(1). $\tilde{D}(x)$には正のゼロ点rが存在して、yを$\hat{D}(x)$の任意のゼロ点とする時、不等式 $r \leq |y|$ が成り立つ。

(2). $0 < x < r$ ならば、$(E - xA)^{-1}$が存在して、それは正行列 $(P(i,j)(x))$ に等しい。

(3). 非負行列Aに付随する無限グラフの周期をdとする。このとき、$|y| = r$ となる$\hat{D}(x)$のゼロ点yは丁度d個あり、それらは $re^{i2\pi k/d}$ $(k = 0, 1, \cdots, d-1)$である。

(4). (3)で述べたd個のゼロ点は$\tilde{D}(x)$の単純ゼロ点である。

これとは別に、命題2.3を使うと次の定理が得られる。

定理 3.2. (2.2)の解のうちで言語に対応する解を$P(X,\lambda)(x)$とする。$P(X,\lambda)(x)$の収束半径は定理3.1のrである。また、

$C_+ \cap \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < r\} = \phi$ が成り立つ。

この定理は有限次の Perron－Frobenius定理の(1).に、定理3.1とは別のいみで対応している。

定理3.1は次の方程式に付随する無限行列に対しても成り立つ。

$$X = a_0(x)X^k + a_{k-1}(x)X + a_k(x),$$

$$a_0(x),\ a_{k-1}(x),\ a_k(x) \in x\mathbb{R}_+[x].$$

4. 応用

4.1. 言語のエントロピー

$L \subset \Sigma^*$を言語とする。$u(n)$をL中の長さnの語の数とする。

$$H := \log\left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u(n)}\right)$$

を言語のエントロピーという。これは*Shannon*の定義した*channel capacity*を、言語の場合にあてはめたものである。

$f_L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n) z^n$ を考え、その収束半径をrとすると、$H = -\log r$ となる。

ここで、$G = (V, \Sigma, P, \sigma)$ を *unambiguous* CF *grammar*とする。Σの各元をxでおきかえて、次の代数的システムを得る場合を考える。

$$X = a_0(x) X^k + a_{k-1}(x) X + a_k(x) \qquad (4.1)$$

$$a_0(x),\ a_k(x) \in x\mathbb{N}[x],\quad a_{k-1}(x) \in x\mathbb{N}.$$

すると$f_{L(G)}(z)$は(4.1)の一つの解であり、定理3.2より、その収束半径は(4.1)から決まる$\hat{D}(x)$のゼロ点中、最小の正数に等しいことがわかる。それゆえ、言語$L(G)$のエントロピーが求められる。

4．2．Dyck言語

$$X = xX^2 + x \tag{4.2}$$

はDyck言語D_1に対応する。(4.2)に付随する無限行列をAとして、n次のtruncationをA_nとすると

$$d_n(x) = \det(E_n - xA_n) = x^n S_n(1/x),$$

ここで、$S_n(y)$は第2種チェビシェフ多項式となる。

A_{n+1}を考えるということは、(4.2)に付随する無限オートマトンを有限で打ち切ることに対応する。

$$X \underset{x}{\overset{x}{\rightleftarrows}} X^2 \underset{x}{\overset{x}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{x}{\overset{x}{\rightleftarrows}} X^{n+1}$$

$a(k, t, n)$をt文字上のDyck言語の語でその深さがn以下で長さが$2k$のものの数とする。すると、$a(k, 1, n)$の母関数は次のようになる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} a(k, 1, n)\, x^{2k} = P_{[1, \cdots, n+1]}(1,1)(x) .$$

補題2.1のあとの注意より次式が得られる。

$$P_{[1, \cdots, n+1]}(1.1)(x) = d_n(x)/d_{n+1}(x) = S_n(1/x)/(xS_{n+1}(1/x)).$$

さらに、一般に次の式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(k, t, n)\, x^{2k} = S_n(1/(\sqrt{t}\,x))/(\sqrt{t}\,x\,S_{n+1}(1/(\sqrt{t}\,x))).$$

次に　$X = \frac{1}{3}xX^2 + \frac{1}{3}xX + \frac{1}{3}x$　　　　(4.3)

を考えよう。深さは十分深いが制限がある場合を考えよう。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\frac{1}{3}x"] \arrow[loop below, "\frac{1}{3}x"] & X^2 \arrow[l, shift left, "\frac{1}{3}x"] \arrow[r, shift left, "\frac{1}{3}x"] \arrow[loop below, "\frac{1}{3}x"] & X^3 \arrow[l, shift left, "\frac{1}{3}x"] \arrow[r, shift left, "\frac{1}{3}x"] \arrow[loop below, "\frac{1}{3}x"] & \cdots \arrow[l, shift left, "\frac{1}{3}x"] \arrow[r, shift left, "\frac{1}{3}x"] & X^n \arrow[l, shift left, "\frac{1}{3}x"] \arrow[loop below, "\frac{1}{3}x"] \end{tikzcd} \quad (4.4)$$

ここで，X^iからX^jへの推移のようすを考える。そのために(4.4)に付随する行列A_nを考える。一般に次の式が成り立つ。

$$A_n^{k} = r_n^{k} w_n v_n^{t} + O\left(k^{m_2-1}|\lambda_2|^{k}\right) \qquad (4.5)$$

ここでr_nはA_nのフロベニウス根，$w_n[v_n]$はA_nのr_nに対する右[左]固有ベクトルで　$vw=1$　を満たすもの。λ_2は絶対値が2番目に大きい固有値、m_2はλ_2の重複度である。(4.3)に付随する無限行列Aを考える。Aに対する定理3.1のrはその定理より1であることがわかり，定理2.1よりr_nは1に十分近い。定理2.1より$|\lambda_2|$も1に十分近いことがわかる（$|\lambda_2| < r_n < 1$）。補題2.3を使えば，$m_2=1$であることがわかる。また，$w_n[v_n]$の第l成分はAの右[左]固有ベクトル$w[v]$の第l成分に十分近くなることがわかる。

$w^t = v = c_0(1, 2, 3, \cdots, l, \cdots)$であることは容易に確かめられる。そこで，$n=2m$の時に$A_n^{k}$の近似値を求める。（$n$が奇数の時も同様）。$A_n$の形より

$$w_{2m}^{t} = v_{2m} \fallingdotseq (1, 2, \cdots, m, m, \cdots, 2, 1)/\sqrt{m(m+1)(2m+1)/3}$$

となることがわかる。

ゆえに、kが十分大きいとき次のようになる。

$$A_{2m}^{k} \fallingdotseq 3/(m(m+1)(2m+1))[a_{ij}],$$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= ij & &\text{if} \quad 1 \le i, j \le m \\ &= (2m+1-i)j & &\text{if} \quad 1 \le j \le m < i \le 2m \\ &= i(2m+1-j) & &\text{if} \quad 1 \le i \le m < j \le 2m \\ &= (2m+1-i)(2m+1-j) & &\text{if} \quad m < i, j \le 2m. \end{aligned}$$

文　献

1. K. Uchimura, Properties of structure generating functions of automata and their applications for linear systems, Theoret. Comput. Sci. 18(1982) 207-220.
2. K. Uchimura, Spectra of infinite incidence matrices of infinite automaton constructed from specific CF grammars, preprint.
3. K. Uchimura, Perron-Frobenius Theory of discriminants of some algebraic equations associated with some CF grammars, preprint.