数理解析研究所講究録
496巻 1983年 12-17

p-algebraic sequences and van der Corput's theorem

大阪市大・理　釜江哲朗（Teturo Kamae）

ここでは，p-algebraic sequences の族と有限オートマトンによって生成される sequences の族が一致することと一様分布列に関する van der Corput's theorem の拡張という異なる二つの話題を述べる。

p は 2 以上の整数とし，$K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とする。K を集合 $\{0, 1, \cdots, p-1\}$ と同一視する。x を変数とする K 上の多項式及び形式的べき級数の全体をそれぞれ $K[x]$ 及び $K[[x]]$ とする。$K[[x]]$ の元 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ またはその係数列 $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$ または実数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{-n}$ が p-algebraic であるとは，n 及び $P_0, P_1, \cdots, P_n \in K[x]$ が存在して $P_n f^n + \cdots + P_1 f + P_0 = 0$ が成立することをいう。他方以下をみたす組 $(\Sigma, \varphi, \sigma_0, \tau)$ を K 上の有限オートマトンという：

(1)　Σ は有限集合　(set of states)

(2)　$\varphi : \Sigma \times K \to \Sigma$　(next state function)

(3)　$\sigma_0 \in \Sigma$　(initial state)

(4) $\tau: \Sigma \to K$ (output function)。

上のφは，K上の有限列の全体をK^*と書くとき，$\Sigma \times K^*$からΣへの写像に拡張される：

$$\varphi(\sigma, (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)) = \varphi(\cdots\varphi(\varphi(\sigma, \xi_1), \xi_2)\cdots, \xi_k)。$$

$n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$に対し，その$p$進表現を$\tilde{n} = (e_k, e_{k-1}, \cdots, e_0)$と書く。但し，

$$n = \sum_{i=1}^{k} e_i p^i, \quad e_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\} \quad (\forall i) \text{ 且つ } e_k \neq 0。$$

また，$\tilde{n}^* = (e_0, \cdots, e_{k-1}, e_k)$と書く。$K$上の無限列$(a_0, a_1, a_2, \cdots)$が$K$上の有限オートマトン$(\Sigma, \varphi, \sigma_0, \tau)$によって<u>生成</u>または<u>*生成</u>されるとは，それぞれ

$$a_n = \tau\varphi(\sigma_0, \tilde{n}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

または

$$a_n = \tau\varphi(\sigma_0, \tilde{n}^*) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

となることをいう。

<u>定理1</u> (G. Christol, T. Kamae, M. Mendes France and G. Rauzy [1]) K上の無限列fに関する以下の3命題は互いに同値である。

(1) fはp-algebraic。

(2) fはK上のある有限オートマトンで生成される。

(3) fはK上のある有限オートマトンで*生成される。

例　$p=2$とし，

$$a_n=\frac{1}{2}\left(1+(-1)^{\sum_{i=0}^{k}e_i}\right)$$
$$b_n=\frac{1}{2}\left(1+(-1)^{\sum_{i=0}^{k-1}e_ie_{i+1}}\right) \qquad (\forall n\in\mathbb{N})$$

と定義する。但し，$\hat{n}=(e_k,e_{k-1},\cdots,e_0)$。このとき，$f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$は$(x+1)^3f^2+(x+1)^2f+x=0$，$g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$は$(x+1)^5g^2+(x+1)^4g+x^3=0$をみたし，いずれも2-algebraicである。これらの係数列は前者はMorse sequence後者はRudin-Shapiro sequenceとよばれている。前者は

$$\Sigma=\{0,1\},\ \varphi(i,j)\equiv i+j\pmod 2\quad(\forall i,j\in\{0,1\})$$
$$\sigma_0=0,\ \tau(i)=i\quad(\forall i\in\{0,1\})$$

なる有限オートマトン$(\Sigma,\varphi,\sigma_0,\tau)$によって生成される。後者は

$$\Sigma=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$
$$\varphi((i,j),k)=(i+jk,\ k)\pmod 2\quad(\forall i,j,k\in\{0,1\})$$
$$\sigma_0=(0,0),\ \tau((i,j))=i\quad(\forall i,j\in\{0,1\})$$

なる有限オートマトン$(\Sigma,\varphi,\sigma_0,\tau)$によって生成される。

註　van der Poorten [2] によれば，実数がp-algebraicならば有理数かまたは超越数となる。このことと定理1より有理数でない代数的数は有限オートマトンで生成できないことがわかる。

つぎに，van der Corput's theorem の拡張について述べる。[0,1] 上の数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が一様分布列であるとは，任意の $0 \leqq u < v \leqq 1$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[u,v]}(a_n) = v-u$$

が成立することをいう。集合 $S \subset \{1,2,3,\cdots\}$ が van der Corput's property をもつとは，すべての $r \in S$ に対して $\{a_{n+r}-a_n \pmod 1\}_{n=1,2,\cdots}$ が一様分布列となるような任意の数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が一様分布列となることをいう。van der Corput によれば集合 $\{1,2,3,\cdots\}$ は van der Corput's property をもつ。この結果はつぎのように拡張される。

定理 2（T. Kamae and M. Mendes France [3]）
$S \subset \{1,2,3,\cdots\}$ は $P_\delta^*(S) \neq \phi$ ならば van der Corput's property をもつ。但し，

$$P(S) = \left\{ f(x) \equiv \sum_{n\in T} c_n e^{2\pi i n x} \;;\; \begin{array}{ll} T \text{は} S \text{の有限部分集合} & \\ c_n \in \mathbb{R} & (\forall n \in T) \\ f(0)=1 & \\ |f(x)| \leqq 1 & (\forall x \in [0,1]) \end{array} \right\}$$

$P^*(S)$：$P(S)$ を含み各点収束で閉じた関数の最小族

$P_\delta^*(S) = \left\{ f \in P^*(S) \;;\; \mathrm{Re}\, f(x) \geqq -\delta \quad (\forall x \in [0,1]) \right\}$。

例　$S=\{1^2, 2^2, 3^2, \cdots\}$ は van der Corput's property をもつ。何故なら，

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i (n\cdot m!)^2 x} = \begin{cases} 0 & x：無理数 \\ 1 & x：有理数 \end{cases}$$

は $P_0^*(S)$ に属す。

例　I を $\{1, 2, 3, \cdots\}$ の勝手な無限部分集合とし，$S=\{n-m\ ;\ n>m,\ n\in I,\ m\in I\}$ とする。このとき，S は van der Corput's property をもつ。何故なら，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{\substack{n\in S\\ n\leqq N}} e^{2\pi i n x}}{\sum_{\substack{n\in S\\ n\leqq N}} 1} = \lim_{N\to\infty}\left|\frac{\sum_{\substack{n\in I\\ n\leqq N}} e^{2\pi i n x}}{\sum_{\substack{n\in I\\ n\leqq N}} 1}\right|^2 \geqq 0$$

は $P_0^*(S)$ に属す。

註　その後，I. Z. Ruzsa [4] によって定理2の逆が証明された。

文献

[1] G. Christol, T. Kamae, M. Mendes France and G. Rauzy, Suites algébriques, automates et substitutions, Bull. Soc. Math. France 108 (1980) p.401-419.

[2] van der Poorten, Propriétés arithmétiques et algébriques de fonctions satisfaisant une class d'equations fonctionelles, Séminaire Théorie des Nombres, Bordeaux, 1974-1975, exposé 7.

[3] T. Kamae and M. Mendes France, Van der Corput's difference theorem, Israel J. Math. 31 (1978) p.335-342.

[4] I. Z. Ruzsa, Connections between the uniform distribution of a sequence and its differences, Proceedings of the Budapest Conference on number theory, 1981.