数理解析研究所講究録
497巻 1983年 190-200

可約な概均質ベクトル空間の一例

筑波大学大学院修士
笠井 伸一

V を $\mathbb{C}$ (=複素数体) 上の有限次元ベクトル空間, G を $\mathbb{C}$ 上の連結線型代数群, $\rho : G \to GL(V)$ を有限次元複素有理表現とする. (G, ρ, V) が概均質ベクトル空間 (以下 P. V. と記す) であるとは, G が V 上 Zariski-dense orbit をもつことをいう.

この小論では次の結果を示すことを目的とする.

G を任意の単純群, ρ を G の任意の表現 ($\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$, $V(m) = V(m_1) \oplus \cdots \oplus V(m_k)$, $\rho_i : G \to GL(V(m_i))$ ($i = 1, \cdots, k$) は G の $V(m_i)$ 上の任意の既約表現, $\rho_i \neq 1$, $k \geq 1$) とする.

定理.

☆ $\big(GL(1)^{1+k} \times SL(2n+1) \times G,\ \square \otimes \rho \oplus \boxminus \otimes 1,$

$V(2n+1) \otimes V(m) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1) \big)$, $2n+1 \geq m$

が概均質ベクトル空間であるためには, 次の①, ②, ③のうちのどれかであることが必要十分である.

① $(GL(1)^2 \times SL(2n+1) \times SL(m),\ \square \otimes \square \oplus 日 \otimes 1,$

$V(2n+1) \otimes V(m) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1))$ $(1 \leq m \leq 2n+1)$

② $(GL(1)^2 \times SL(2n+1) \times Sp(m),\ \square \otimes \square \oplus 日 \otimes 1,$

$V(2n+1) \otimes V(2m) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1))$ $(1 \leq 2m \leq 2n+1)$

③ $(GL(1)^2 \times SL(2n+1) \times SO(4),\ \square \otimes \square \oplus 日 \otimes 1,$

$V(2n+1) \otimes V(4) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1))$ $(4 \leq 2n+1)$

□，日はそのYoung図形に対応する既約表現をあらわすものとする．また$GL(1)^{1+k}$の作用を記さないが，$GL(1)^{1+k}$は各既約成分のスカラー倍として作用しているものとする．（以下でも同様．）

G_1，G_2を単純群，$G = GL(1)^l \times G_1 \times G_2$，$\rho_i : G \to GL(V_i)$ $(i = 1, \dots, l)$をGの既約表現，$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_l$，$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$とするとき，$(GL(1)^l \times G, \rho, V)$がP.V.ならば各$(GL(1) \times G, \rho_i, V_i)$ $(i = 1, \dots, l)$は既約P.V.ゆえに$(GL(1) \times G, \rho_i, V_i)$は（Sato-Kimura [1]）で得られた既約P.V.の表に表われる．しかし$(GL(1) \times G, \rho_i, V_i)$がtrivial P.V.，すなわち$(GL(1) \times G_1 \times GL(n), \rho_i^{(1)} \otimes \square, V_i^{(1)}(m) \otimes V(n))$；$m \leq n$；であれば，$G_1$として任意の単純群，$\rho_i^{(1)}$として任意の既約表現が可能である．

以下 triplet ☆ が P. V. となるような (G, ρ, V) を決定する。

triplet ☆ の P. V. 性に関して保倉理美氏が次の事を示した（くわしい事は本講究録の保倉氏のところを参照のこと）。

命題（保倉）

$$\left(SL(2m+1) \times G \times GL(1)^{1+k},\ \square \otimes \rho \oplus \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix} \otimes 1,\ V(2m+1) \otimes V(n) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(1) \right) : \text{P. V.}$$

$$\Leftrightarrow \left(SL(n-1) \times (G \times Sp(m)) \times GL(1)^{1+k},\ \square \otimes (\rho^{*} \oplus \square),\ V(n-1) \otimes (V(n)^{*} \oplus V(2m)) \right) : \text{P. V.}$$

この命題により ☆ が P. V. となるためには，$(SL(n-1) \times G \times GL(1)^{k}, \square \otimes \rho^{*}, V(n-1) \otimes V(n)^{*})$ が P. V. でなければならない。したがって裏返し変換により $(G \times GL(1)^{k}, \rho, V(n))$ が P. V.，すなわち Simple P. V. でなければならない。

Simple P. V. の表

I. Simple Irred. P. V.（スカラー倍を除いて書いてある）

（Sato-Kimura [1]）

(1) $\underset{\square}{SL(n)}$ $(n \geqq 2)$，(2) $\underset{\square\square}{SL(n)}$ $(n \geqq 2)$，(3) $\underset{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}{SL(n)}$ $(n \geqq 4)$，

(4) $\underset{\square\square\square}{SL(2)}$，(5) $\underset{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}{SL(n)}$ $(n = 6, 7, 8)$，(6) $\underset{\square}{Sp(n)}$ $(n \geqq 2)$，

(7) $Sp(3)$ 目 , (8) $SO(n)$ □ $(n \geqq 4)$, (9) $Spin(n)$ (半)スピン表現 $(n = 7, 9, 10, 11, 12, 14)$

(10) (G_2) $V(7)$, (11) E_6 $V(27)$, (12) E_7 $V(56)$.

II. Simple P. V.（既約なものを除く）（Kimura [2]）

(1) $SL(n)$ $\underbrace{□ + \cdots + □}_{k}$ $(2 \leqq k \leqq n+1)$, (2) $SL(n)$ $\underbrace{□ + \cdots + □}_{k} + □^*$ $(1 \leqq k \leqq n)$,

(3) $SL(2m)$ 日 + $\underbrace{□^{(*)} + \cdots + □^{(*)}}_{k}$ $(1 \leqq k \leqq 3)$, 9通り, (4) $SL(2m+1)$ 日 + $□^{(*)} + \cdots + □^{(*)}$ $(1 \leqq k \leqq 3)$ 8通り

（日 + □ + □ + $□^*$ を除く）

(5) $SL(2m+1)$ 日 + 日 $(m \geqq 2)$, (6) $SL(n)$ □□ + $□^{(*)}$

(7) $SL(6)$ 目 + □ , 目 + □ + □ , (8) $SL(7)$ 目 + $□^{(*)}$

(9) $Sp(n)$ □ + □ , □ + □ + □ , (10) $Sp(3)$ 目 + □

(11) $Spin(n)$ $(n = 7, 8, 10, 12)$ ベクトル表現⊕(半)スピン表現 , (12) $Spin(10)$ 偶半スピン表現⊕偶半スピン表現

$(GL(1)^k \times G, \rho, V(m))$ を Simple P. V., G' をその generic isotropy subgroup とする. このとき $(SL(m-1) \times (G \times Sp(n)) \times GL(1)^{1+k}$, $□ \otimes (\rho^* \oplus □)$, $V(m-1) \otimes (V(m)^* \oplus V(2n))$) が P.

V.であることは，$\square\otimes\rho^*$における generic isotropy subgroup の作用を考えることにより，($G'\times Sp(m)\times GL(1)$, $\square\otimes\square$, $V(m-1)\otimes V(2m)$) がP.V.であることと同値であり，$m-1\leq 2m$ に注意すれば(Sato-Kimura[1], p.40, Prop. 13 より) これは ($G'\times GL(1)$, $\Lambda^2\square$, $V(\frac{(m-1)(m-2)}{2})$) がP.V.であることと同値である．これの群の次元を $g'=\dim G'+1$，表現空間の次元を $v'=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ とおくとき，(G, ρ, V) がP.V.ならば $\dim G\geqq\dim V$ が成り立つことより，$g'\geqq v'$ となるような Simple P.V. ($GL(1)^k\times G$, ρ, $V(m)$) を求めると次の3つに限ることがわかる．

① ($GL(1)\times SL(m)$, $\square$, $V(m)$) ($m\geqq 1$)

② ($GL(1)\times Sp(m)$, $\square$, $V(2m)$) ($m\geqq 1$)

③ ($GL(1)\times SO(m)$, $\square$, $V(m)$) ($m\geqq 4$).

結局次の3つがP.V.であるかどうかを調べればよい．

① ($SL(2n+1)\times SL(m)\times GL(1)^2$, $\square\otimes\square\oplus \text{日}\otimes 1$,
$V(2n+1)\otimes V(m)\oplus V(n(2n+1))\otimes V(1)$) ($1\leq m\leq 2n+1$)

② ($Sp(m)\times SL(2n+1)\times GL(1)^2$, $\square\otimes\square\oplus 1\otimes \text{日}$,
$V(2m)\otimes V(2n+1)\oplus V(1)\otimes V(n(2n+1))$) ($1\leq 2m\leq 2n+1$)

③ ($SL(2n+1)\times SO(m)\times GL(1)^2$, $\square\otimes\square\oplus \text{日}\otimes 1$,
$V(2n+1)\otimes V(m)\oplus V(n(2n+1))\otimes V(1)$) ($4\leq m\leq 2n+1$)

以下では g は群の次元をあらわし，v は表現空間の次元をあ

らわすものとする.

① $\left(SL(2n+1) \times SL(m) \times GL(1)^2,\ \square \otimes \square \oplus \boxminus \otimes 1,\right.$

$\left. V(2n+1) \otimes V(m) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1) \right) \quad (1 \leq m \leq 2n+1)$

これの P. V. 性は $\boxminus \otimes 1$ における generic isotropy subgroup を考えることにより次の P. V. 性を調べることに帰着される.

$$\left(\begin{bmatrix} \begin{matrix} Sp(n) \\ \square \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ 0 & * \end{bmatrix} \times GL(m),\ \square \otimes \square,\ V(2n+1) \otimes V(m) \right)$$

(i) $m = 2l$ のとき.

$$X_0 = {}^t\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\qquad\qquad}^{n} & \overbrace{\qquad\qquad}^{n} & \overbrace{\quad}^{1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} I_l & & \\ \hline & I_l & \\ & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}l \\ \}l-1 \\ \}1 \end{array} \end{array} \in V(2n+1) \otimes V(2l) \text{ における}$$

isotropy subalgebra を計算してみると,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \overbrace{\quad}^{l-1} & \overbrace{\quad}^{1} & \overbrace{\quad}^{n-l} & \overbrace{\quad}^{l-1} & \overbrace{\quad}^{1} & \overbrace{\quad}^{n-l} & \overbrace{\quad}^{1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_1 & & & B_1 & B_{12} & & D_1 \\ \hline A_{21} & A_2 & -{}^tD_6 & -{}^tB_{12} & B_2 & -{}^tD_3 & D_2 \\ \hline & & A_3 & & -D_3 & B_3 & D_3 \\ \hline C_1 & & & -{}^tA_1 & -{}^tA_{21} & & D_4 \\ \hline & & & & -{}^tA_2 & & D_5 \\ \hline & & C_3 & & D_6 & -{}^tA_3 & D_6 \\ \hline & & & & & & D_5 - A_2 \end{array}\right] \end{array} \oplus \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{l-1} & \overbrace{\quad}^{1} & \overbrace{\quad}^{l-1} & \overbrace{\quad}^{1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} -{}^tA_1 & -{}^tA_{21} & -{}^tC_1 & \\ \hline & -{}^tA_2 & & \\ \hline -{}^tB_1 & -B_{12} & A_1 & \\ \hline -{}^tB_{12} - {}^tD_1 & -{}^tB_2 - {}^tD_2 & A_{21} - {}^tD_4 & A_2 - {}^tD_5 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\cong (\mathfrak{sp}(l-1) \oplus \mathfrak{sp}(n-l)) \cdot \mathfrak{u}(2(n+l)).$$

$\mathfrak{g} - \mathfrak{v} = \dim((\mathfrak{sp}(l-1) \oplus \mathfrak{sp}(n-l)) \cdot \mathfrak{u}(2(n+l)))$ が成り立つから, (i) の場合上の triplet は P. V. である.

(ii) $m = 2l + 1$ のとき.

$$X_0 = {}^t\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n & n & 1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} I_l & & \\ \hline & I_{l+1} & \\ & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, l \\ \}\, l \\ \}\, 1 \end{array} \end{array} \in V(2m+1) \otimes V(2l+1)$$ におけ

る isotropy subalgebra を計算してみると，

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} l & 1 & n-l-1 & l & 1 & n-l-1 & 1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_1 & & & B_1 & & & D_1 \\ \hline & A_2 & A_{23} & & B_2 & B_{12} & -B_2 \\ \hline & A_{32} & A_3 & & {}^tB_{12} & B_3 & -{}^tB_{12} \\ \hline C_1 & & & -{}^tA_1 & & & D_4 \\ \hline & C_2 & C_{23} & & -{}^tA_2 & -{}^tA_{32} & D_5 \\ \hline & {}^tC_{23} & C_3 & & -{}^tA_{23} & -{}^tA_3 & {}^tA_{23} \\ \hline & & & & & & D_5 - A_2 \end{array}\right] \end{array} \oplus \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} l & l & 1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} -{}^tA_1 & -{}^tC_1 & \\ \hline -{}^tB_1 & A_1 & \\ \hline -{}^tD_1 & -{}^tD_4 & {}^tA_2 - {}^tD_5 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\cong \ (\mathfrak{sp}(l) \oplus \mathfrak{sp}(m-l)) \cdot \mathfrak{u}(2l+1).$$

$\mathfrak{g} - \mathfrak{v} = \dim((\mathfrak{sp}(l) \oplus \mathfrak{sp}(m-l)) \cdot \mathfrak{u}(2l+1))$ が成り立つから，

この場合も P. V. である．

② $(Sp(m) \times SL(2n+1) \times GL(1)^2$，□⊗□⊕1⊗日，

$V(2m) \otimes V(2n+1) \oplus V(1) \otimes V(n(2n+1)))$ $(1 \leq 2m \leq 2n+1)$

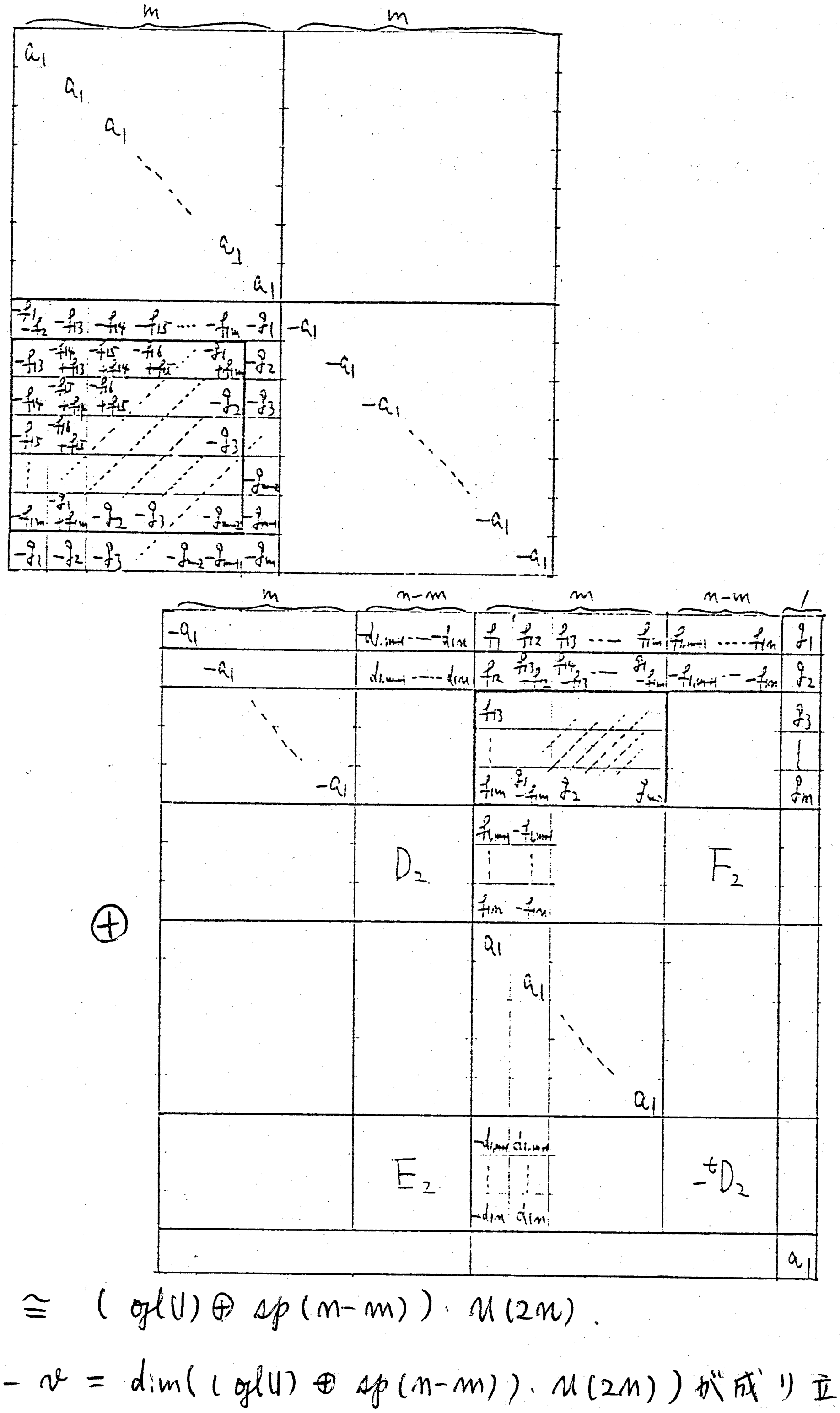
これの P. V. 性は 1⊗日における generic isotropy subgroup を考えることにより次の P. V. 性を調べることになる．

$$\left(Sp(m) \times \left[\begin{array}{c|c} Sp(n) & * \\ & \vdots \\ & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \times GL(1),\ □⊗□,\ V(2m) \otimes V(2n+1) \right)$$

まずスカラー倍 $GL(1)$ を除いて考える．

$$X_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n & n & 1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} I_m & & \\ \hline & I_{m-1} & \\ & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, m-1 \\ \}\, 1 \end{array} \end{array} \in V(2m) \otimes V(2n+1)$$ における

isotropy subalgebra を求めてみると,



$$\cong \ (\mathfrak{gl}(1) \oplus \mathfrak{sp}(n-m)) \cdot \mathfrak{u}(2m).$$

$g - v = \dim((\mathfrak{gl}(1) \oplus \mathfrak{sp}(n-m)) \cdot \mathfrak{u}(2m))$ が成り立つから これはスカラー倍の作用がなくてもP.V.である. したがって②も

P. V. である.

③ $(SL(2n+1) \times SO(m) \times GL(1)^2,\ \square \otimes \square \oplus 日 \otimes 1,$
$V(2n+1) \otimes V(m) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1))\quad (4 \leqq m \leqq 2n+1)$

これは命題より次の P. V. 性を調べればよい.

$(SL(m-1) \times (SO(m) \times Sp(n)) \times GL(1)^2,\ \square \otimes (\square + \square)$
$V(m-1) \otimes (V(m) \oplus V(2n)))$.

これの P. V. 性は $(SL(m-1) \times SO(m) \times GL(1),\ \square \otimes \square,\ V(m-1) \otimes V(m))$ における generic isotropy subgroup を考えることにより次と同値である.

$(SO(m-1) \times Sp(n) \times GL(1),\ \square \otimes \square,\ V(m-1) \otimes V(2n))$.

これは既約 P. V. の分類 (Sato-Kimura [1]) より, $m = 4$ のとき P. V. で, $m \geqq 5$ のときは P. V. ではない.

$m = 4$ のときに実際に generic isotropy subalgebra を求めてみる. $(SL(2n+1) \times SO(4) \times GL(1)^2,\ \square \otimes \square \oplus 日 \otimes 1,\ V(2n+1) \otimes V(4) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1))$ の $日 \otimes 1$ における generic isotropy subgroup を考えることにより, 次の P. V. の generic isotropy subalgebra を求めればよい.

$$\left(\left[\begin{array}{c|c} Sp(n) & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \times SO(4) \times GL(1),\ \square \otimes \square,\ V(2n+1) \otimes V(4) \right).$$

$$X_0 = {}^t\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\hphantom{1\ \cdots\ 1}}^{n} & \overbrace{\hphantom{1\ \cdots\ 1}}^{n} & \overbrace{\hphantom{1}}^{1} \end{array} \\ \left.\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & & & & & & \\ \hline & & & 1 & & & 1 \\ \hline & & 1 & & & & \\ \hline & & & & & 1 & 1 \end{array}\right]\right\}4 \end{array} \in V(2n+1) \otimes V(4) \text{ における}$$

isotropy subalgebraを求めてみると,

$$
\begin{array}{ccccccc}
\overbrace{}^{1} & \overbrace{}^{n-2} & \overbrace{}^{1} & \overbrace{}^{1} & \overbrace{}^{n-2} & \overbrace{}^{1} & \overbrace{}^{1}
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 & {}^tD_5 & & -d_1-z & -{}^tD_2 & -d_1-z & d_1 \\ \hline
 & A_2 & & -D_2 & B_2 & -D_2 & D_2 \\ \hline
 & {}^tD_5 & & -d_1-z & -{}^tD_2 & -d_1-z & d_1 \\ \hline
z & & -z & & & & \\ \hline
 & C_2 & & -D_5 & -{}^tA_2 & -D_5 & D_5 \\ \hline
-z & & z & & & & \\ \hline
 & & & & & &
\end{array}\right]
\oplus
\left[\begin{array}{c|c|c|c}
 & -z & & z \\ \hline
z & & z & \\ \hline
 & z & & -z \\ \hline
z & & z &
\end{array}\right]
\oplus (\quad)
$$

$$\cong \mathfrak{sp}(n-2)\cdot\mathfrak{u}(2(n-1)) .$$

$g - v = \dim(\mathfrak{sp}(n-2)\cdot\mathfrak{u}(2(n-1)))$が成り立つから$X_0$はgenericな点となっている. したがって$\mathfrak{sp}(n-2)\cdot\mathfrak{u}(2(n-1))$が求めるgeneric isotropy subalgebraである.

以上の結果から☆がP.V.であるためには, (G, ρ, V)が次の①, ②, ③のうちのどれかであることが必要十分である.

① $(SL(m), \square, V(m))$

② $(Sp(m), \square, V(2m))$

③ $(SO(4), \square, V(4))$.

最後に, 木村達雄先生には大変多くの事を教えていただきました. ここに心から感謝の意を表します.

参考文献

[1] M. Sato and T. Kimura, A Classification of Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces and Their Relative Invariants, Nagoya Math. J. Vol. 65 (1977), 1–155.

[2] T. Kimura, A Classification of Prehomogeneous Vector Spaces of Simple Algebraic Groups with Scalar Multiples.