

II型の古典領域の解析的自己同型群の決定

新谷卓郎

村瀬篤・菅野孝史 記

故新谷先生の遺稿の中に, "A note on an elementary determination of the group of holomorphic automorphisms of a classical irreducible bounded domain" と題する論文の草稿(英文)が存在する。以下は, その内容の復元を試みたものである。草稿は, 最初に掲げる "Introduction" の他は散逸したのか, 断片しか残っていないが, 幸い先生の1978年度の東大における講義が, ほぼ同一の内容を含んでいるので, ここではどちらを主として参照した。講義ではI型からIV型までを対象にしているが, 紙数の関係もありここではII型の領域に話を限ることにした。証明にはI型に関する結果が本質的に用いられているが, それについては先生の講義に懇切な解説がある。

"Introduction" にもあるように, 以下の結果は必ずしもoriginalなものではないが, II型の領域についての文献は少ないようだし(特に自己同型群の詳しい記述は余りみない), 何よりそれは新谷先生の強靱な腕力を髣髴とさせる点で,

こゝう形で発表することにした。なお、文中の誤りについては筆者たちに責任がある。

最後に、先生の遺稿の発表を許していただいた新谷晶子さんに感謝いたします。

Introduction

C.L.Siegel determined the group of all holomorphic automorphisms of his generalized half plane in an elementary manner. H.Klingen modified Siegel's method and determined the automorphism groups of "generalized unit circles" in an elementary manner. E.Cartan determined the automorphism group of a general bounded irreducible symmetric domain applying deep results in differential geometry and Lie groups.

In the present note we modify methods of Siegel and Klingen and determine the groups of automorphisms of classical irreducible domains of types not discussed by them in an elementary manner.

§ 1. 主結果

$n \geq 2$ に対し, $V_n = \{ Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t Z = -Z \} \cong \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 内の有界領域 \mathcal{D}_n を

$$\mathcal{D}_n = \{ z \in V \mid 1_n - z^* z > 0 \}$$

により定義する。(\equiv して $z^* = {}^t \bar{z}$) \mathcal{D}_n は, II型の既約な有界対称領域である。 \mathcal{D}_n の解析的自己同型のなす群 $\text{Aut}(\mathcal{D}_n)$ は Lie 群をなすが, I型の領域に対する解析的自己同型群に関する結果(それ自体, \equiv におけるのと類似の方法を用いることにより初等的に決定される)を用いて, $\text{Aut}(\mathcal{D}_n)$ を“初等的”に決定するのが目的である。 $n=2$ のとき, \mathcal{D}_2 は単位円の内部と解析的に同型だから, $\text{Aut}(\mathcal{D}_2)$ については, すでによく知られている。以後 $n \geq 3$ とし, 混乱のおそれのない限り \mathcal{D}_n を単に \mathcal{D} とかく。

さて, 次のような Lie 群 G を考える:

$$G = \left\{ g \in GL(2n, \mathbb{C}) \mid {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. g^* \begin{pmatrix} -1_n & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} -1_n & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \right\}.$$

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G, \quad z \in \mathcal{D} \text{ に対し,}$$

$$g \cdot z = (Az + B)(Cz + D)^{-1}$$

とおくと, $\Phi(g): z \mapsto g \cdot z$ は, \mathcal{D} の解析的自己同型を定める。 G は, \equiv の作用により \mathcal{D} に推移的に働くことが

知られてゐる。 $O \in \mathcal{D}$ の isotropy 部分群は、

$$K = \{ (u, u^{-1}) \mid u \in U(n) \}$$

と一致し、従つて $\mathcal{D} \cong G/K$ 。写像 $\Phi: g \mapsto \Phi(g)$ は、 G から $\text{Aut}(\mathcal{D})$ への Lie 群としての準同型を与えるが、容易に $\text{Ker } \Phi = \{ \pm 1 \}$ なることがわかる。 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ を $\Phi(G)$ によつて記述する次の結果を証明するに、この文の目的である。

定理 1

- (i) $n \neq 4$ のとき、 $\text{Aut}(\mathcal{D}) = \Phi(G)$ 。
 (ii) $n = 4$ のとき、 $\Phi(G)$ は $\text{Aut}(\mathcal{D})$ の指数 2 の部分群である。 $\varphi_0: \begin{pmatrix} X & Z \\ -Z & Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X & tZ \\ -Z & Y \end{pmatrix}$ は \mathcal{D} の解析的自己同型を以ておとし、しかも $\varphi_0 \notin \Phi(K)$ 、(従つて、 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ は φ_0 と $\Phi(G)$ により生成される。)

$\text{Aut}(\mathcal{D})_0$ を O の isotropy 部分群とする。 G は、 \mathcal{D} に推移的に作用するから 次の事実を示せば十分である。

- (i)' $n \neq 4$ のとき $\text{Aut}(\mathcal{D})_0 = \Phi(K)$
 (ii)' $n = 4$ のとき $[\text{Aut}(\mathcal{D})_0: \Phi(K)] = 2$

かつ $\varphi_0 \in \text{Aut}(\mathcal{D})$ 。— $\mathbb{D}(K)$ 。

§2. 準備

1°. $D \ni 0$ を含む \mathbb{C}^N 内の有界領域, $\text{Aut}(D)$ を D から D への 1:1 onto な双正則写像の群とする。

$\varphi \in \text{Aut}(D)$, $z \in D$ に対し,

$$J(\varphi, z) = \left(\frac{\partial(\varphi(z))_\alpha}{\partial z_\beta} \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq N}$$

とおく。 $J(\varphi, z)$ は $\text{Aut}(D)$ の $GL(N, \mathbb{C})$ に値をとる保型因子である。

定理 A (H. Cartan)

$\varphi \mapsto J(\varphi, 0)$ は, $\text{Aut}(D)_0$ から $GL(N, \mathbb{C})$ への単射準同型で, 像は $GL(N, \mathbb{C})$ 内で compact.

任意の $t \in \mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} \mid |t|=1\}$ に対し $z \in D \Rightarrow tz \in D$ が成り立つとき, すなわち $\mathbb{T} \subset \text{Aut}(D)$ のとき, D を 0 を中心とする円領域 という。

Corollary D を 0 を中心とする円領域とする。
 $\text{Aut}(\mathcal{D})_0$ は \mathbb{C}^n の 線型変換 L で $L(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ を 非退化

みたすもののなす群と一致する。

2°.

Lemma 1 $\text{Aut}(D)$ は D に推移的に作用するとする。

このとき、 D 上の $N \times N$ 次 正値 Hermite 行列に値をとる 函数 $H(z)$ で

$$(1) \quad H(\varphi(z)) = J(\varphi, z) H(z) J(\varphi, z)^*$$

が任意の $\varphi \in \text{Aut}(D)$ に対して成り立つものが存在する。

$\text{Aut}(D)$ の部分群 G と $z_0 \in D$ に対し $G_{z_0} = \{g \in G \mid g(z_0) = z_0\}$ とする。 $\widetilde{G}_{z_0} = \{J(g, z_0) \mid g \in G_{z_0}\}$ は $GL(N, \mathbb{C})$ の部分群である。一般に $GL(N, \mathbb{C})$ の部分群 S が \mathbb{C}^N に 既約に作用する とは、 $T \in M_N(\mathbb{C})$ に対し

$$TA = AT \quad \forall A \in S \implies T = \lambda I_N \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

なることをいう。

Lemma 2 $G \in \text{Aut}(D)$ の部分群で D に推移的に働き、 \widetilde{G}_{z_0} が \mathbb{C}^N に既約に作用するような $z_0 \in D$ が存在するとする。このとき D 上の 正値 Hermite 行列に値をとる 函数 $H(z)$ で、(1) が任意の $\varphi \in G$ に対して成り立つものがあつたならば (2) は 任意の $\varphi \in \text{Aut}(D)$ に対しても正しい。

3°

Lemma 3 $H(Z, W)$ を $D \times D$ 上定義されたなめらかな
 函数で, Z について holomorphic, W について antiholomorphic,
 さらに $H(Z, Z) = 0$ ($\forall Z \in D$) とする。このとき H は
 $D \times D$ 上恒等的に 0 となる。

4°

$p, q \geq 1$ に対し $M(p, q, \mathbb{C})$ 内の有界領域

$$I_{p,q} = \{ Z \in M(p, q, \mathbb{C}) \mid 1_p - ZZ^* > 0 \}$$

を I 型の古典領域と呼ぶ。§1 で述べたように次の
 結果を初等的に示すことが出来る。

定理 B

(i) $p \neq q$ のとき, $\text{Aut}(I_{p,q})_0$ は $Z \mapsto uZu'$
 ($u \in U(p), u' \in U(q)$) の形の変換全体の可換群と
 一致する。

(ii) $p = q$ のとき, $\text{Aut}(I_{p,q})_0$ は $Z \mapsto uZu'$
 ($u \in U(p), u' \in U(q)$) 及び $Z \mapsto {}^t Z$ により
 生成される。

§3. 定理の証明

$\psi \in \text{Aut}(\mathcal{D})$ とする。 \mathcal{D} は $0 \in$ 中心 とする 円領域 \mathcal{D} 元 定理 A の Corollary より, $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ をみたす V の 非退化な線型変換 L で, $L|_{\mathcal{D}} = \psi$ なるものが存在する。

$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$, $z \in \mathcal{D}$ に対し, $j(g, z) = Cz + D$ とおくと,

$$(2) \quad J(\Phi(g), z) = \overset{(z)}{=} {}^t j(g, z)^{-1} z j(g, z)^{-1} \quad (z \in V).$$

$z \in \mathcal{D}$ に対し $h(z) = 1 - z^* z$ とおく。 $g \in G$ に対し,

$$(3) \quad h(\Phi(g) \cdot z) = j(g, z)^*{}^{-1} h(z) j(g, z)^{-1}.$$

V に 内積 $(,)$ と $(Z, W) = {}^t Z^* W$ により定める。

V の線型変換 $H(z)$ ($z \in \mathcal{D}$) と

$$H(z)(Z) = {}^t h(z) Z h(z) \quad (Z \in V)$$

により定義すると, $H(z)$ は V の正值 Hermite 変換で,

(2), (3) より, (1) 式が $\varphi \in \Phi(G)$ に対して成り立つことが

わかる。 $t = 3$ が $\widetilde{\Phi(G)}_0 = \{ J(k, 0) \mid k \in K \} =$

$\{ Z \mapsto uZu \mid u \in U(n) \}$ は V に既約に作用するから

Lemma 2 より

$$H(\varphi(z)) = J(\varphi, z) H(z) J(\varphi, z)^* \quad (\forall \varphi \in \text{Aut}(\mathcal{D})).$$

特 $t = \varphi = L|_{\mathcal{D}}$ として ($J(\varphi, z) = L$ に注意すれば)

$$(4) \quad H(L(z)) = L H(z) L^* \quad (\forall z \in \mathcal{D})$$

(4) により $z = 0$ とし

$$(5) \quad LL^* = 1_V$$

を得る。

$z, \zeta \in V$ に対し, V の線型変換 $H(z, \zeta) \in$

$$H(z, \zeta)(Z) = {}^t h(z, \zeta) Z h(z, \zeta)$$

により定義する。ただし $h(z, \zeta) = 1 - \zeta^* z$ 。 $H(z, \zeta)$

は z に関して \mathbb{D} 上 holomorphic, ζ に関して \mathbb{D} 上 anti-holomorphic かつ $H(z, z) = H(z)$ であるから

Lemma 3 より $z, \zeta \in \mathbb{D}$ に対し

$$H(\varphi(z), \varphi(\zeta)) = J(\varphi, z) H(z, \zeta) J(\varphi, \zeta)^*$$

($\forall \varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$) を得る。特に $\varphi = L|_{\mathbb{D}}$ とし,

$$(6) \quad H(L(z), L(\zeta)) = L H(z, \zeta) L^* .$$

(4), (6) は $z, \zeta \in V$ に対して成り立つことに注意する。

$u \in U(n)$ に対し $Z \mapsto uZ^t u$ ($Z \in V$) なる

V の線型変換を L_u とかく。 $\Phi(K) = \{L_u \mid u \in U(n)\}$

である。適当な $u \in U(n)$ をとれば, $L_u \circ L$ が

$\begin{pmatrix} -z_1 & z_1 & \dots & z_m \\ & & & \\ & & & \\ & & & -z_m \end{pmatrix}$ ($z_i \in \mathbb{C}$, $n = 2m$ 又は $2m+1$; 右下隅の 0

は, n が 奇数のときのみ現われる (以下同様)) の形の各元を fix することを示そう。そのために次の二つの結果を引用する。

Lemma 4 $n \geq 3$ かつ $z, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ に対し,

$$H(z, \zeta) = 1_V \quad \text{ならば} \quad \zeta^* z = 0$$

Lemma 5 $Z \in V$ に対し

$$L_u(Z) = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_m & \\ & & -\lambda_m & 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda_i \in \mathbb{C})$$

なる $u \in U(n)$ が存在する。

Corollary $Z, W \in V$ に対し, Z^*Z と W^*W の
固有多項式が一致すれば ある $u \in U(n)$ に対し
 $W = L_u(Z)$.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ & & 0_{n-2} \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ & & 0_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad f_m =$$

$$\begin{pmatrix} 0_{2m-2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とする。 } i \neq j \text{ ならば } f_j^* f_i = 0 \text{ かつ}$$

$$H(f_i, f_j) = 1_V. \quad f_i \in \mathfrak{D} \text{ なら } L(f_i) \in \mathfrak{D} \text{ となる}$$

Lemma 4 により

$$(7) \quad L(f_j)^* L(f_i) = 0 \quad (i \neq j)$$

を得る。 (4), (5) により $\det H(Z) = \det H(L(Z))$ 。

一方 $\det H(Z) = \det h(Z)^{n-1}$ となる $\det h(Z) =$
 $\det h(L(Z))$ 。 $Z \in tZ$ ($t \in \mathbb{C}$) とおくと

$$\det (I_n - |t|^2 Z^* Z) = \det (I_n - |t|^2 L(Z)^* L(Z)).$$

後、2 次を得る。

Lemma 6 $Z \in V$ に対して Z^*Z と $L(Z)^*L(Z)$ の固有方程式は一致する。

Lemma 5 の Corollary より 適当な $u \in U(n)$ をとれば $L_u \circ L(f_1) = f_1$ と仮定してよい。従って $i \geq 2$ のとき

$$(8) \quad (L(f_i))^* f_1 = 0.$$

今, $L(f_i)$ を次のように block 分けする。

$$(9) \quad \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} & v_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} & v_m \\ -t v_1 & \cdots & -t v_m & 0 \end{pmatrix},$$

$z_{\alpha\beta} \in M_2(\mathbb{C})$, $v_\alpha \in \mathbb{C}^2$ (ただし n が偶数のとき, v_α たちはあらわれない。(以下同様))。 (8) より

$$z_{11} = z_{12} = \cdots = z_{1m} = z_{21} = \cdots = z_{m1} = 0, \quad v_1 = 0.$$

$u = \begin{pmatrix} 1 & \\ & u' \end{pmatrix}$ ($u' \in U(n-2)$) を適当にとれば L を $L_u \circ L$ でおまかえることができる。

$$L(f_1) = f_1, \quad L(f_2) = f_2, \quad (L(f_i))^* L(f_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

を成たすようにできる。この操作をくりかえすことができる。

$L_u \circ L(f_i) = f_i \quad (1 \leq i \leq m)$ なる $u \in U(n)$ が存在するにちがいない。

我々は今 $\mathbb{R}(K) \setminus \text{Aut}(\mathcal{S})_0$ の代表元を求めたい。

とが目標なのだから, 今後 L は $V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & & \\ -z_1 & \dots & z_n \\ & & & 0 \end{pmatrix} \mid z_i \in \mathbb{C} \right\}$ の各元を fix すると仮定してよい. $z_0 = \begin{pmatrix} z_1 & & \\ -z_1 & \dots & z_n \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in V_0$ に対して $h(z_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n & & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ ($\lambda_\alpha = 1 - |z_\alpha|^2$) なることに注意すれば $Z \in V$ は (9) のように block 分解したとき,

$$H(z_0)(Z) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_i \lambda_j z_{ij} & \lambda_i v_i \\ \hline -\lambda_i {}^t v_i & 0 \end{array} \right)$$

一方 $L(z_0) = z_0$ なることは, (4) より, $H(z_0)$ と L は可換である. 以上より容易に次を得る.

Lemma 7

$$(10) \quad L(Z) = \left(\begin{array}{c|c} L_{ij}(Z_{ij}) & L_i(v_i) \\ \hline -{}^t L_i(v_i) & 0 \end{array} \right)$$

ただし L_{ij} は $M_2(\mathbb{C})$ の線型変換, L_i は \mathbb{C}^2 の線型変換である.

$L|_{V_0} = \text{id}$ であり, L_{ii} は恒等写像であることに注意する.

$V' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & W \\ {}^t W & 0_{n-2} \end{pmatrix} \mid W \in M(2, n-2, \mathbb{C}) \right\}$ とすると, Lemma 7 より L は V' の線型変換を意味する.

$\begin{pmatrix} 0 & W \\ {}^t W & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{D} \iff W \in I_{2, n-2}$ だから $L|_{V' \cap \mathfrak{D}}$ は $I_{2, n-2}$ の 0 を fix する解析的自己同型を意味する.

以後, 場合を分けて考察する.

(I) $n \geq 5$ の場合

$n-2 > 2$ だから, 定理 B より, ある $u_1 \in U(2)$, $u' \in U(n-2)$ に対し

$$L\left(\begin{pmatrix} 0 & W \\ -{}^t W & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & u_1 W u_1' \\ -{}^t(u_1 W u_1') & 0 \end{pmatrix} \quad (W \in M(2, n-2, \mathbb{C}))$$

このことと (10) により

$$L_{i2}(z) = u_1 z u_2 \quad (z \in M_2(\mathbb{C}), 2 \leq i \leq m)$$

$$L_1(v) = u_1 v t \quad (v \in \mathbb{C}^2)$$

ある $u_1, u_2, \dots, u_m \in U(2)$, $t \in \mathbb{T}$ が存在する。

今 $\mu_i \in \mathbb{T}$ ($1 \leq i \leq m$) を $\mu_i {}^t u_i^{-1} \in SU(2)$ と取り
 たり, $u = \begin{pmatrix} \mu_1 u_1^{-1} & & & & \\ & \mu_2 u_2^{-1} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \mu_m u_m^{-1} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ とおく。 $u f_i {}^t u$

$= f_i$ ($1 \leq i \leq m$) かつ $L_u \circ L$ は V_0 の各元 z に対し L ,
 block $z_{12}, \dots, z_{1m}, v_1$ に対し, 各々 z_{ij} scalar 倍射変換
 とする。すなわち,

$$(II) \quad L_u \circ L(z) = \begin{pmatrix} z_{11} & \lambda_2 z_{12} & \dots & \lambda_m z_{1m} & \lambda u_1 \\ & z_{22} & * & \dots & * & * \\ & & & \dots & & \vdots \\ * & & & & z_m & * \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

($\lambda_i, \lambda \in \mathbb{T}$)。

以後 L は (11) の形をとるものとする。 $n=2$ の場合
 を分ける。

(a) $n = 2m$ が偶数のとき

$X = (x_{ij}) \in V$ に対し Pfaffian $Pf(X) \in$

(12)
$$\text{Pf}(X) = (2^m \cdot m!)^{-1} \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn} \sigma x_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}$$
 により定義する。おなじく知らしめるように $\det X = (\text{Pf}(X))^2$ ($X \in V$)。Lemma 6 により $\det L(Z)^* L(Z) = \det (Z^* Z)$ であり、 $|\text{Pf}(Z)| = |\text{Pf}(L(Z))|$ 。従って

$\text{Pf}(L(Z))/\text{Pf}(Z)$ は V 上の絶対値¹の有理函数。

すなわち $\text{Pf}(L(Z)) = c \text{Pf}(Z)$ ($\forall Z \in V$) なる

$c \in \mathbb{T}$ が存在することを示す。 L が V_0 の各

元を fix することにより注意して上式の両辺の係数を比較す

れば $c = 1$, すなわち

$$(13) \quad \text{Pf}(L(Z)) = \text{Pf}(Z)$$

を得る。

任意の j ($2 \leq j \leq m$) に対し Z を

$$\begin{pmatrix} z_{11} & 0 & z_{1j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm z_{1j} & 0 & z_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形のものをとると、(13) と (11) より

$$\text{Pf} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{1j} \\ \pm z_{1j} & z_{jj} \end{pmatrix} = \text{Pf} \begin{pmatrix} z_{11} & \lambda_j z_{1j} \\ -\lambda_j z_{1j} & z_{jj} \end{pmatrix} \quad \text{を得る。すなわち}$$

$$\lambda_j^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad \lambda_j = \pm 1. \quad L = L_u \quad (u = (\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m))$$

を合成することにより Lemma 7 により最初から $L_{12} =$

$\dots = L_{1m} = 1_{M_2(\mathbb{R})}$ とおきしめることがわかる。

次に、 $2 \leq \alpha < \beta \leq m$ に対し

$$V'' = \left\{ \begin{pmatrix} z_{11} & 0 & z_{1\alpha} & 0 & z_{1\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & z_{\alpha\alpha} & 0 & z_{\alpha\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_{\beta\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in V \right\} \quad \text{とある, 仮定から}$$

Δ は $V'' \cap \mathfrak{D}$ をその自身にうつす, $Z \in V''$ に対し

$$Z \in \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_6 \iff \tilde{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{1\alpha} & z_{1\beta} \\ -{}^t z_{1\alpha} & z_{\alpha\alpha} & z_{\alpha\beta} \\ -{}^t z_{1\beta} & -{}^t z_{\alpha\beta} & z_{\beta\beta} \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}_6$$

であるから, Δ は \mathfrak{D}_6 の解析的自己同型 $\tilde{\Delta}$ を用いて
す, 仮定から $\tilde{\Delta}(\tilde{Z}) = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{1\alpha} & z_{1\beta} \\ * & z_{\alpha\alpha} & L_{\alpha\beta}(z_{\alpha\beta}) \\ * & * & z_{\beta\beta} \end{pmatrix}$.

$$\text{すなわち } \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_{1\beta} \\ 0 & 0 & z_{\alpha\beta} \\ {}^t z_{1\beta} & {}^t z_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}_6 \iff \begin{pmatrix} z_{1\beta} \\ z_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \in I_{2,4}$$

ゆえ, $\tilde{\Delta}$ はさらに $I_{2,4}$ の 0 を fix する解析的自己同型 $\hat{\Delta}$

を用いてす: $\hat{\Delta} \begin{pmatrix} z_{1\beta} \\ z_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1\beta} \\ L_{\alpha\beta}(z_{\alpha\beta}) \end{pmatrix}$. 定理 B より

ある $u_1 \in U(4)$, $u_2 \in U(2)$ に対し

$$\hat{\Delta}(\hat{z}) = u_1 \hat{z} u_2 \quad (\hat{z} \in I_{2,4}).$$

このことから ある $u \in U(2)$ に対し

$$L_{\alpha\beta}(z) = uz \quad (z \in M_2(\mathbb{C}))$$

であることがわかる。すなわち

$$\text{すなわち } J = \begin{pmatrix} 0 & W & 0 \\ -{}^t W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{C}) \quad (W \in M_2(\mathbb{C})) \quad \text{とある}$$

$\widehat{L}(\zeta) = \zeta$ であり, \widehat{L} は $H(\zeta)$ と可換。従って

$${}^t(1-W^*W)u\zeta = u^t(1-W^*W)\zeta \quad (\forall \zeta, W \in M_2(\mathbb{C}))$$

を得るが, これは $u = t1_2$ ($t \in \mathbb{C}$) を意味する。等式 $\text{Pf}(\widehat{L}) = \text{Pf}(\widehat{L}(\widehat{L}))$ の両辺の係数を比較することにより $t=1$ を得る。

結局, Lemma 7 により $L_{12} = \dots = L_{1m} = 1_{M_2(\mathbb{C})}$ ならば, 任意の α, β ($2 \leq \alpha < \beta \leq m$) に対し $L_{\alpha\beta} = 1_{M_2(\mathbb{C})}$ でなければならぬことが示された。これより n が偶数で $n \neq 4$ のときの定理 1 (i)' が証明された。

(b) $n = 2m+1$ が奇数のとき

(a) と同様の論法で, L に適当な L_u ($u \in U(n)$) を合成することにより最初から $L_{ij} = 1_{M_2(\mathbb{C})}$ ($1 \leq i, j \leq m$) と仮定により示される。また適当な $L_{(1, \dots, m)}$ ($t \in \mathbb{C}$) を合成することにより $L_1 = 1$ としよ。

$\zeta \in M(2m-2, 2, \mathbb{C})$, $u' \in \mathbb{C}^{2m-2}$ に対し

$$\begin{pmatrix} 0_{2m-2} & \zeta u' \\ \begin{matrix} -t\zeta \\ -t u' \end{matrix} & 0_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff (\zeta u') \in I_{2m-2, 3}.$$

従って $L' \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 u_1 \\ \vdots \\ L_{m-1} u_{m-1} \end{pmatrix}$ ($u_1, \dots, u_{m-1} \in \mathbb{C}^2$) とおく

$(\zeta u') \mapsto (\zeta L' u')$ は $I_{2m-2, 3}$ の 0 を fix する自己同型をひきおこす。定理 B より $\nu_1 \in U(2m-2)$, $\nu_2 \in U(3)$ で

$\nu_1 (\zeta u') \nu_2 = (\zeta L' u')$ となる ν が存在する。これより L' は

scalar 倍の変換であることがわかるが $L_1 = 1$ から L' も恒等変換である。

次に $z \in M(2m-2, 2, \mathbb{C})$, $u_m \in \mathbb{C}^2$ に対し

$$\begin{pmatrix} O_{2m-2} & z & 0 \\ -{}^t z & O_2 & u_m \\ 0 & -{}^t u_m & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \iff \begin{pmatrix} z \\ {}^t u_m \end{pmatrix} \in I_{2m-1, 2}.$$

従って $\begin{pmatrix} z \\ {}^t u_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ {}^t(L_m u_m) \end{pmatrix}$ は $I_{2m-1, 2}$ の 0 を fix する自己同型を u とおくと、定理 B より $v_3 \in U(2m-1)$, $v_4 \in U(2)$ で $\begin{pmatrix} z \\ {}^t(L_m u_m) \end{pmatrix} = v_3 \begin{pmatrix} z \\ {}^t u_m \end{pmatrix} v_4$ なるものが存在する。ゆえに $L_m u_m = \mu u_m$ なる $\mu \in \mathbb{C}$ がある。適当な Pfaffian をとって考えれば $\mu = 1$ を得る。ゆえに n が奇数で $n \geq 5$ の場合の定理が証明された。

II. $n=4$ の場合

$L \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ -{}^t z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & L_{12}(z_{12}) \\ -{}^t L_{12}(z_{12}) & z_{22} \end{pmatrix}$ で、 L_{12} は $I_{2, 2}$ の 0 を fix する解析的自己同型を u とおくと意味がたう。定理 B より、ある $u \in U(2)$ に対し $L_{12}(z) = u z u$ または $u {}^t z u$ とかけるから、I における議論を繰り返せば、 $n=4$ のときの定理の証明は次の Lemma に帰着される。

Lemma 8

$$\varphi_0 \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ -{}^t z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & {}^t z_{12} \\ -z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} \text{ は,}$$

$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_4$ の解析的自己同型 z , しかも $\varphi_0 \in \Phi(K)$.

Lemma の証明

(後半の証明) $\varphi_0 \in \Phi(K)$ とすると,

$$(14) \quad \begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix} \varphi_0(z) \cdot \begin{pmatrix} & -1_2 \\ 1_2 & \end{pmatrix} = u z {}^t u \quad (\forall z \in \mathfrak{D})$$

なる $u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in U(4)$ が存在する。(14)は $z = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix}$ ($z \in M_2(\mathbb{C})$) に対して成り立つから

$$u_{11} z = z \overline{u_{22}}, \quad -u_{12} z = z \overline{u_{21}}, \quad u_{21} z = -z \overline{u_{12}}$$

が, 任意の $z \in M_2(\mathbb{C})$ に対して成り立つ. \therefore 4より

$$u_{11} = t 1_2, \quad u_{22} = \overline{t} 1_2, \quad u_{12} = u_{21} = 0_2 \quad (t \in \mathbb{T}) \text{ なる}$$

得る。(14)に対して $z = \begin{pmatrix} z_{11} & \\ & z_{22} \end{pmatrix}$ ($z_{11}, z_{22} \in M_2(\mathbb{C})$,

$${}^t z_{11} = -z_{11}, \quad {}^t z_{22} = -z_{22}) \text{ とすると } \quad t z_{11} = \overline{t} z_{22} \text{ なる}$$

は矛盾!!

(後半の証明終り)

(前半の証明) まず, 次のように知らぬ事実を注意する.

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} \quad (A, B, D \in M_n(\mathbb{C}), A = A^*, D = D^*) \text{ に対し,}$$

$$X > 0 \iff A > 0, D > 0, D - B^* A^{-1} B > 0.$$

\therefore 4より $Z = \begin{pmatrix} X & Z \\ -Z & Y \end{pmatrix} \in V$ に対し

$$Z \in \mathfrak{D} \iff 1 - Z^* Z > 0$$

$$\iff A = 1_2 - (X^* X + {}^t Z^* {}^t Z) > 0$$

$$E = D - (Z^* X - Y^* {}^t Z) A^{-1} (X^* Z - {}^t Z^* Y) > 0$$

$$D = 1_2 - (Z^* Z + Y^* Y) > 0.$$

今 $X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$ ($x, y \in \mathbb{C}$) とし,
 $Z = u_1 t + u_2$ ($u_1, u_2 \in U(2)$, $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$; $t_1, t_2 > 0$)
 とおく. X^*X と Y^*Y は scalar 行列 であることに注意
 可なり

$$A = {}^t u_1^* A_1 {}^t u_1, \quad D = u_2^* D_1 u_2, \quad E = u_2^* E_1 u_2,$$

$T = E^{-1}L$

$$A_1 = I - (X^*X + \tilde{E}), \quad D_1 = I - (Y^*Y + \tilde{E})$$

$$E_1 = D_1 - (X^*t - t^*Y)^* A_1^{-1} (X^*t - t^*Y)$$

$$(\tilde{E} = \begin{pmatrix} |t_1|^2 & \\ & |t_2|^2 \end{pmatrix})$$

を得る. $\delta > 2$

$$Z \in \mathcal{D} \iff A_1 > 0, E_1 > 0.$$

右の条件は X, Y, t のみに依存 することと, Z と ${}^t Z$
 に対しては 右解 $u_1 t + u_2$ において 同一 t がとれることに
 注意可なり

$$Z \in \mathcal{D} \iff \varphi_0(Z) \in \mathcal{D}$$

が示される.

(Lemma の証明終り)

(III) $n=3$ の場合

$$L \begin{pmatrix} z & u \\ -{}^t u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & L_1 u \\ -{}^t(L_1 u) & 0 \end{pmatrix} \quad (z = -{}^t z \in M_2(\mathbb{C}),$$

$u \in \mathbb{C}^2$) であつた. $T = E^{-1}L$. L_1 は \mathbb{C}^2 の線型変換.

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ -{}^t u & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff u \in I_{2,1} \quad \text{ゆゑ, } L_1 \text{ は } I_{2,1} \text{ の}$$

0 を fix する解析的自己同型を μ とおくと、定理 B より

$L_1 \in U(2)$. 今 $\mu \in \mathbb{T} \varepsilon$, $\det(\mu L_1) = 1$ なるようにとり、 $U = \begin{pmatrix} \mu L_1 & \\ & \mu^{-1} \end{pmatrix} \in U(3)$ とおけば

$$U Z^t U = L(Z) \quad (\forall Z \in V)$$

従って $\text{Aut}(\mathcal{D})_0 = \mathbb{C}(K)$ が証明された。