

グラフィカルな立場からの適合度検定法

岡山大学 脇本和昌

1. はじめに

生成された乱数列を $u_1, u_2, \dots, u_n$ とし、はじめから大きさ $l_1, l_2, \dots, l_n$ の n 個の組にわけて、くり返し連続したシミュレーションに使用する場合、各組ごとに算出した n 個の検定量の値が、その検定量のもつ確率分布に従っているかどうかを検定することが主たる目的である。

いま、母集団の分布関数を $F(x)$ 、ある定められた連続分布関数を $F_0(x)$ とする。この母集団から大きさ n の独立な *random sample* を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とするとき

$$H_0: F(x) = F_0(x)$$

$$H_1: F(x) \neq F_0(x)$$

を検定する問題に帰着される。このように、母集団の分布 $F(x)$ に何も仮定せず、仮説 H_0 を検定する場合には普通はつぎに示す *Kolmogorov-Smirnov* 検定 (略して *K-S* 検定と書くことにする) が用いられる。

$X_1, X_2, \dots, X_n$ を大きい順に並べたものを $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ とする。ここで標本累積分布関数 $F_n(x)$ をつぎのようにつくる。

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < X_{(1)} \\ \frac{i}{n}, & X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1, & X_{(n)} \leq x \end{cases}$$

このとき、検定量として

$$D_n = \max (F_0(x) - F_n(x)) \quad (\text{片側検定})$$

$$d_n = \max |F_0(x) - F_n(x)| \quad (\text{両側検定})$$

を用いるのが K-S 検定である。

D_n, d_n の確率分布は $n = 100$ までは正確に求められて表にされており、 $n > 100$ についてはつぎのように漸近分布とパーセント点が求められている。

$$P(D_n \leq \varepsilon) = P_n(\varepsilon) = 1 - \alpha \quad \text{なる } \varepsilon \text{ の値 } \varepsilon_\alpha \text{ は}$$

$$\varepsilon_\alpha \doteq \sqrt{\frac{1}{2n} \log \frac{1}{\alpha}} \quad \text{となり、}$$

$$P_n(\varepsilon) \doteq 1 - e^{-2n\varepsilon^2} \quad \text{となることが知られている。}$$

さて、ここでは H_0 を検定するために、linked line chart により、囲まれる面積を検定量とする方法を提案し、 D_n との

比較をグラフィカルな立場からおこなう。

2. 提案する検定法

$Z_i = F_0(X_i)$, $Z_{(n)} = F_0(X_{(n)})$, $i = 1, 2, \dots, n$ とおき, 原点 O を始点として x 軸となす角が $Z_{(n)}\pi$, $\frac{\pi}{n+1}$ ラジアンである長さが $1/\binom{n}{2}$ の線分 $\overline{OP_1}$, $\overline{OQ_1}$ を引き, 順次長さが $1/\binom{n}{2}$ の線分 $\overline{P_{i-1}P_i}$, $\overline{Q_{i-1}Q_i}$ を x 軸となす角が $Z_{(n)}\pi$, $\frac{i\pi}{n+1}$ ラジアンであるように引き, 順次結んでいく。つぎに点 $P_1, \dots, P_{n-1}$, $Q_1, \dots, Q_{n-1}$ をそれぞれ $\overline{OP_n}$, $\overline{OQ_n}$ の中点 M , M' に対称に移した点を $P'_1, \dots, P'_{n-1}$, $Q'_1, \dots, Q'_{n-1}$ とし, それらを順次結んで図1のような多角形 P と多角形 Q をつくる。この両多角形を Linked Line Chart (LLC - n) といい, 多角形 P の多角形 Q からのずれ具合によつて検定するものである。

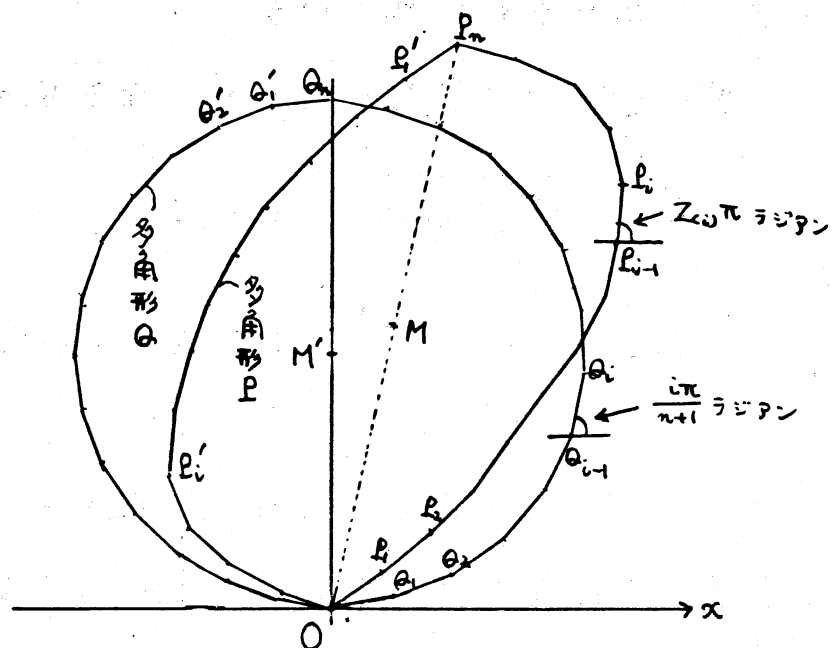


図1. LLC - n

多角形 P , Q の面積をそれぞれ U_n , S_n とすると

$$(2, 1) \quad U_n = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sin |Z_i - Z_j| \pi \quad (U \text{ 統計量})$$

$$(2, 2) \quad S_n = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sin \frac{j-i}{n+1} \pi$$

となる。

U_n の平均と分散はつぎのようになる。ただし、 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 は $[0, 1]$ 上の一様分布をもつ互いに独立な確率変数とする。

$$\begin{aligned} (2, 3) \quad E(U_n) &= \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(\sin |Z_i - Z_j| \pi) \\ &= E(\sin |Z_1 - Z_2| \pi) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sin |z_1 - z_2| \pi \, dz_1 \, dz_2 = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2, 4) \quad V(U_n) &= E(U_n - E(U_n))^2 = E[U_n^2] - (E(U_n))^2 \\ &= \frac{1}{\binom{n}{2}^2} \left[{}_n P_3 \cdot E\{\sin |Z_1 - Z_2| \pi \sin |Z_1 - Z_3| \pi\} \right. \\ &\quad + \binom{n}{2} \cdot E\{(\sin |Z_1 - Z_2| \pi)^2\} \\ &\quad + \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \cdot E(\sin |Z_1 - Z_2| \pi \sin |Z_3 - Z_4| \pi) \Big] \\ &\quad - \frac{4}{\pi^2} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{2}^2} \left\{ {}_n P_3 \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin |z_1 - z_2| \pi \, dz_2 \int_0^1 \sin |z_1 - z_3| \pi \, dz_3 \right) dz_1 \right. \\ &\quad + \binom{n}{2} \int_0^1 \int_0^1 \sin^2 |z_1 - z_2| \pi \, dz_1 \, dz_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \int_0^1 \int_0^1 \sin |z_1 - z_2| \pi dz_1 dz_2 \\
& \quad \cdot \int_0^1 \int_0^1 \sin |z_3 - z_4| \pi dz_3 dz_4 \} \\
& - \frac{4}{\pi^2} \\
& = \frac{1}{\binom{n}{2}^2} \left\{ n(n-1)(n-2) \times \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \right\} - \frac{4}{\pi^2} \\
& = \frac{\pi^2 - 8}{n(n-1)\pi^2}
\end{aligned}$$

また、 S_n は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
(2, 5) \quad S_n &= \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} k \sin \frac{n-k}{n+1} \pi \\
&= \frac{2}{n-2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \sin \frac{k\pi}{n+1} \right) \\
&= \frac{2}{n-2} \left\{ \sin \frac{n\pi}{2(n+1)} \sin \frac{(n-1)\pi}{2(n+1)} / \sin \frac{\pi}{2(n+1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}} - \frac{n \cos \frac{(2n-1)\pi}{2(n+1)}}{2 \sin \frac{\pi}{2(n+1)}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{\pi}$$

注1

n	S_n
10	0.6955
20	0.6672
30	0.6573
40	0.6522
50	0.6491

n	S_n
100	0.6429
500	0.6378
1000	0.6372
2000	0.6369
5000	0.6367
∞	$2/\pi = 0.6366$

注2 $n \leq 100$ についての U_n の確率分布のパーセント点はシミュレーションにより計算している。

注3 U_n の漸近分布については現在白旗慎吾氏（大阪大学）と共同研究している。

3、K-S検定, L-L C検定のグラフ表示例と比較

検定量 U_n を用いる検定を L-L C 検定とよぶことにする。さて、発生させた $[0, 1]$ 上の一様乱数をはじめから 500 個ずつに区切り、区間 $[0, 1]$ 上を 10 等分して、各区間に入る度数により χ^2 値を順次 30 個算出した値をつぎに示す。

(a) 19.92 3.68 9.24 5.64 5.84 5.64 8.24

12.12 13.24 3.52 12.84 7.08 6.72 6.32

27.96 4.00 6.52 8.80 17.04 19.76 3.64

9.48 5.60 11.64 11.64 11.92 7.28 10.52

7.60 11.24

(b) 9.92 6.30 9.24 4.68 5.84 5.64 8.24

8.12 10.24 8.52 11.84 7.08 10.72 8.32

10.20 9.00 11.52 8.80 7.04 9.76 8.64

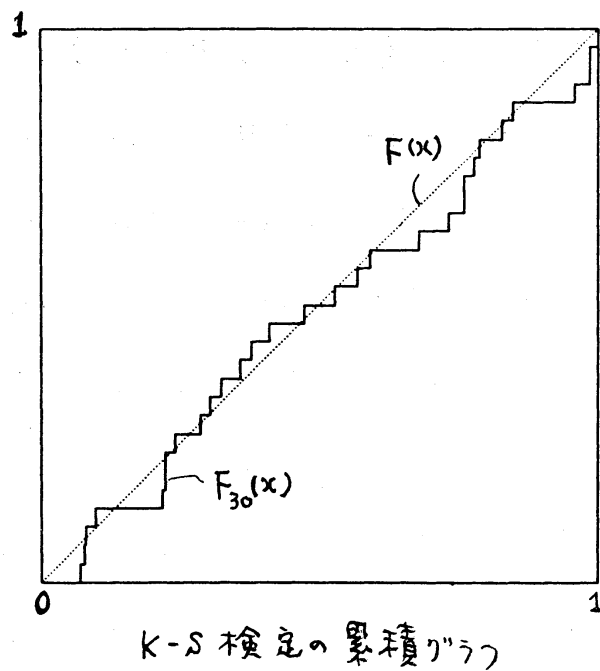
9.48 5.60 6.64 10.64 11.92 7.28 10.52

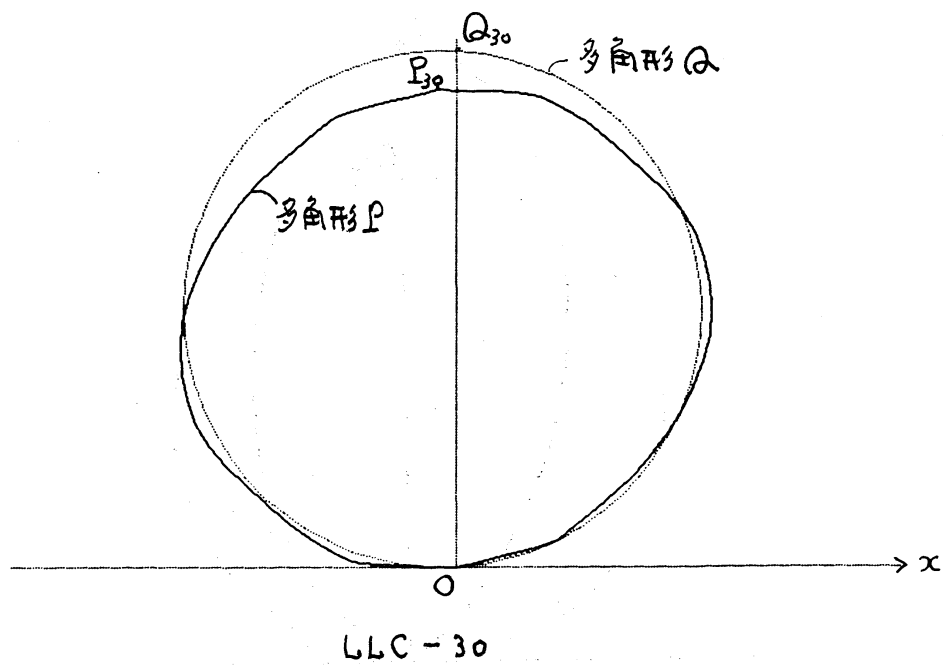
7.60 9.24

グラフ表示

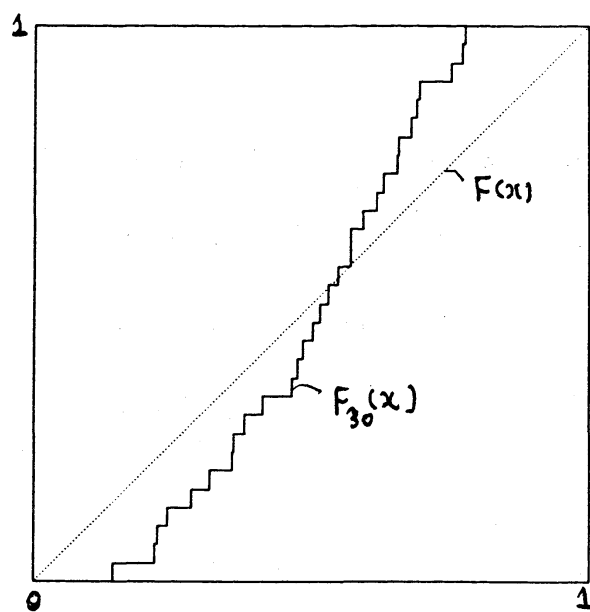
(a), (b) の場合に K-S 検定については累積グラフ $F_n(x)$ を描き $F(x)$ とのずれ具合をみる。この場合、 x 軸を $x \rightarrow F(x)$ と変換して直線とのずれを見るようにする。また、LLC-30 も (a), (b) について描き比較する。なお LLC-30 は、直線からのずれ具合ではなく田からのずれ具合を見るところに特徴がある。

(a) の場合

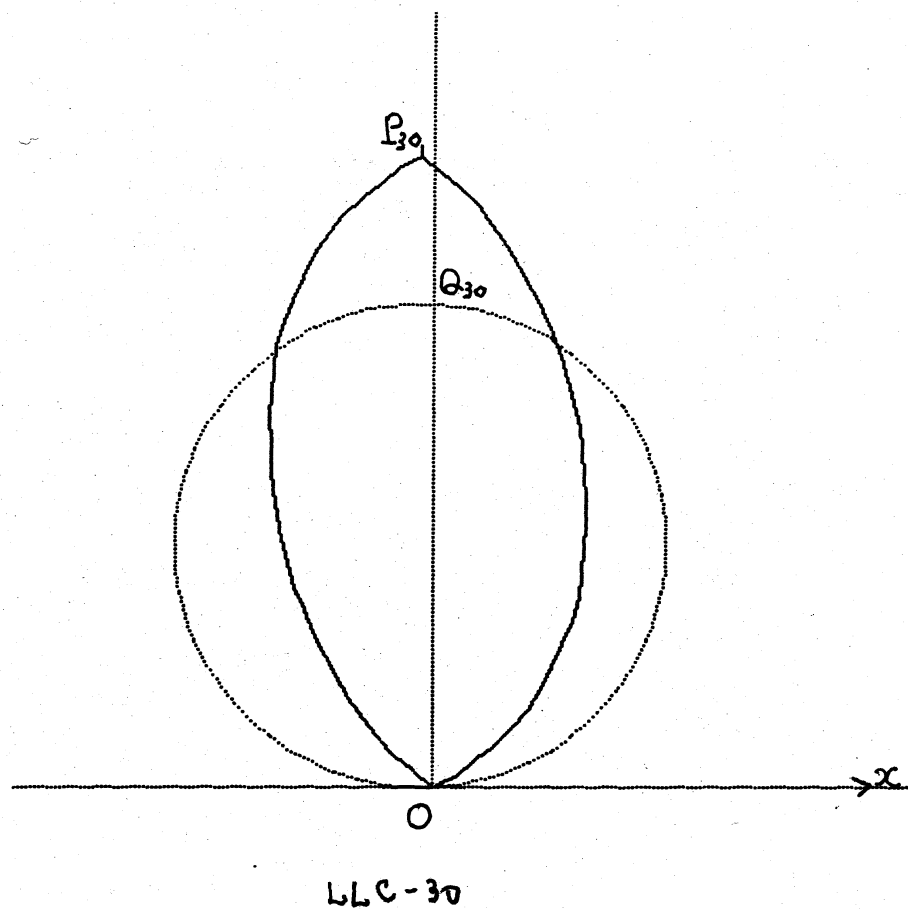




(b)の場合



K-S 検定の累積グラフ



考察

(a)と(b)の場合、累積グラフと $LLC-30$ はよく似た傾向を示すが、 $LLC-30$ の方が円からのずれで、対称性がは、よりする。また、分布の裾のずれ具合は $LLC-30$ の方がは、よりわかり、確率プロットとして知られる $Q-Q$ プロットの特徴を備えているように思われる。

現在、検定量として LLC 検定の $K-S$ 検定に対する効率を研究しているが、いずれにせよ、 $K-S$ 検定、 LLC 検定、そ

れにグラフ表示を合わせて用いると $F_n(x)$ の $F_0(x)$ への適合度の確率の評価，また視覚処理により適合度合の様子がよく把握できる。

参 考 文 献

- [1] Capon, J.(1965). On the asymptotic efficiency of the Kolmogorov-Smirnov test, JASA, 60, 843-853.
- [2] Feller, W.(1948). On the Kolmogorov-Smirnov limit theorems for empirical distributions, A.M.S., 19, 177-189.
- [3] Hoeffding, W.(1948). A class of statistics with asymptotically normal distribution, A.M.S., 19, 293-325.
- [4] Miller, L.H.(1956). Table of percentage points of Kolmogorov statistics, JASA, 51, 111-121.