

新しい演算子法と差分方程式

岡山理大 早原四郎 (Sirō Hayabara)

岡山理大 近藤修三 (Shūzō Kondō)

ここでは、新しい演算子法 N.O.M. (New Operator Methods) を紹介する。この新しい方法を用いて定数係数の差分方程式 (例 1) を解く。さらに、代数的微分、積分について述べる。新しい代数的対数関数を導入し、変数係数の差分方程式 (例 2) を解く。

§1. N.O.M. (New Operator Methods)

一次元無限数列 $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ を代表元 a_n を用いて $\{a_n\}$ で表す。 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の和とコーシー積を

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad \{a_n\} \cdot \{b_n\} = \left\{ \sum_{r=0}^n a_r b_{n-r} \right\}$$

と定める。 $\{a_n\}, \{b_n\} \neq \{0\}$ に対して、コーシー積

$$\{x_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n\}$$

の逆算としてコーシー商

$$\{x_n\} = \{a_n\} / \{b_n\}$$

は、数列になる場合とならない場合がある。いずれの場合も順序対 $\{a_n\}/\{b_n\}$ を演算子とよぶ。一次元数列全体の集合 E を数列空間、演算子全体の集合 Q を演算子空間とよぶ。

2つの演算子 a/b と c/d は

$$a \cdot d = b \cdot c$$

で、かつそれに限るとき、2つは同値であるといい

$$a/b = c/d$$

で表す。演算子の和、差、積、商はつぎの通り定義する。

$$\text{I). } (a/b) \pm (c/d) = (a \cdot d \pm b \cdot c) / (b \cdot d)$$

$$\text{II). } (a/b)(c/d) = (a \cdot c) / (b \cdot d)$$

$$\text{III). } (a/b) / (c/d) = (a \cdot d) / (b \cdot c), \quad (c \neq \{0\})$$

よく用いる演算子として数値演算子と変位演算子などがある。

数値演算子 $[a] = \{a, 0, \dots, 0, \dots\}$ に対して

$$[a] \cdot \{b_n\} = \{ab_0, ab_1, \dots, ab_n, \dots\}$$

変位演算子 $u = \{0, 1, 0, \dots, 0, \dots\}$ に対して

$$u \cdot \{b_n\} = \{0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \dots\}$$

$$u^R = \{ \overbrace{0, \dots, 0}^R, 1, 0, \dots \}$$

$$u^R \cdot \{b_n\} = \{ \overbrace{0, \dots, 0}^R, a_0, a_1, \dots, a_{n-R}, \dots \}$$

数列 $\{a_n\}$ は変位演算子 u を用いて

$$\begin{aligned} \{a_n\} &= a_0 [1] + a_1 u + \cdots + a_n u^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \end{aligned}$$

で表される。右辺を u の関数 $a_n(u)$ で表せば

$$\begin{aligned} a_n(u) b_n(u) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^n a_r b_{n-r} \right) u^n \\ &= \left\{ \sum_{r=0}^n a_r b_{n-r} \right\} \\ &= \{a_n\} \cdot \{b_n\}. \end{aligned}$$

このことから E におけるコーシー積は Q における普通積に対応している。これが N.O.M. の原理である。

n 項がそれぞれ a_n, a_{n+1}, a_{n+2} である数列 $\{a_n\}, \{a_{n+1}\}, \{a_{n+2}\}$ を $\{ \}$ を外して a_n, a_{n+1}, a_{n+2} と略記すれば n 成分について

$$\begin{aligned} a_n &= u a_{n+1} + [a_0] \\ &= u^2 a_{n+2} + u [a_1] + [a_0]. \end{aligned}$$

これから演算子 $P = 1/u$ に関して次の公式 I, II を得る。

公式 I ($E \rightarrow Q$)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P a_n - P [a_0] \\ a_{n+2} &= P^2 a_n - P^2 [a_0] - P [a_1] \end{aligned}$$

公式 II ($Q \rightarrow E$)

$$\begin{aligned} P/(p-\alpha) &= \{\alpha^n\} \quad (\alpha; \text{定数}) \\ P/(p-\alpha)^{R+1} &= \begin{cases} \binom{n}{R} \alpha^{n-R} & (R \leq n) \\ 0 & (n < R) \end{cases}. \end{aligned}$$

例 1. $f(x+2) - 5f(x+1) + 6f(x) = 0 \quad \dots (1)$

をみたす $f(x)$ を求める.

解) x の整数部 $[x] = n$ とおき, 区分的に定数である関数

$$f(x) = f_n \quad (n \leq x < n+1, n=0, 1, \dots)$$

を考えると, $f(x)$ の全体の x 空間と f_n 全体の E 空間のそれぞれ
の元が 1 対 1 に対応する. よって (1) は

$$f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n = 0$$

に対応する. この方程式を Q に移すと

$$P^2 f_n - P^2 [f_0] - P [f_1] - 5(P f_n - P [f_0]) + 6f_n = 0,$$

$$f_n = (3[f_0] - [f_1]) \frac{P}{P-2} - (2[f_0] - [f_1]) \frac{P}{P-3}.$$

E に戻して

$$f_n = (3f_0 - f_1) 2^n - (2f_0 - f_1) 3^n.$$

2^n と 3^n は一次独立だから一般解は

$$f_n = C_1 2^n + C_2 3^n.$$

もとの x の関数空間に戻せば

$$f(x) = C_1 2^x + C_2 3^x.$$

§ 2. 代数的微分, 積分と差分方程式

$n x_n$ は数列空間 E においてコーシー積ではないので直ちに演算子空間 Q の元では表せない. よってつぎの演算 D を導入して利用する.

定義1. 数列空間 E において

$$D\{a_n\} = \{-na_n\} \quad \text{つまり}$$

$$D\{a_n\} = \{0, -a_1, -2a_2, \dots, -na_n, \dots\}$$

となる D は一種の微分法的作用をもつから 代数的微分 という。

定理1. E において

$$D\{a_n + b_n\} = D\{a_n\} + D\{b_n\}$$

$$D(\{a_n\} \cdot \{b_n\}) = (D\{a_n\}) \cdot \{b_n\} + \{a_n\} \cdot (D\{b_n\}).$$

紛れがなければ以下では $\{a_n\} = a_n$ と略記する。

定義2. 演算子に対する演算 D はつぎのように定義する。

$$D(a_n/b_n) = [(Da_n) \cdot b_n - a_n \cdot (Db_n)] / (b_n \cdot b_n), (b_n \neq 0)$$

定理2. Q において

$$D(a_n/b_n + c_n/d_n) = D(a_n/b_n) + D(c_n/d_n)$$

$$D[(a_n/b_n)(c_n/d_n)] = [D(a_n/b_n)](c_n/d_n) + (a_n/b_n)[D(c_n/d_n)]$$

$$D[\alpha] = 0, \quad (\alpha \text{ は数値演算子}).$$

定理3.

$$i) \quad E \text{ において } Dx^r = rx^{(r-1)} \cdot (Dx),$$

$$Q \text{ において } Dx^r = rx^{r-1}(Dx)$$

$$(r \text{ は正整数, } x^r = \overbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}^{r \text{ 回}}.)$$

ii) 変位演算子 u および $P = []/u$ に対し、 Q において

$$Du = -u, \quad Du^r = -ru^r, \quad D^R u^r = (-r)^R u^r \quad (R; \text{正整数})$$

$$DP = P, \quad DP^r = rP^r, \quad D^R P^r = r^R P^r. \quad (R; \text{正負の整数})$$

定義3. E において

$$\exp\{a_n\} = e^{\{a_n\}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\{a_n\}^r}{r!}$$

を指数関数列という.

定理4.

i) E において $e^{\{a_n\}} \cdot e^{\{b_n\}} = e^{\{a_n + b_n\}}$

ii) Q において $D e^{\{a_n\}} = e^{\{a_n\}} (D\{a_n\})$.

べき級数 $\sum_{r=0}^{\infty} a_r \lambda^r$ の係数の作る数列は $\{a_n\}$ であるからこのべき級数の表す関数を数列 $\{a_n\}$ の母関数という. ここに λ は実数でも複素数でもよい. 実際電子工学の理論に用いられる Z 変換では $\lambda = z$ (複素数) である. 数列 $\{a_n\} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \lambda^r$ であるから $\{a_n\}$ の演算子表示を $a_n(p)$ とすればこれは $\{a_n\}$ の母関数である. ゆえにこれまでの u または P を E に関係なく Q においては実数の領域に拡張して考えてもよい. (例えば P^α , $\log P$ 等).

定義4. 与えられた $x \in Q$ に対して

$$Dy = x$$

である演算子 $y \in Q$ が存在すれば, y を x の 代数的積分 とい

$$y = \int x + [C]$$

で表す.

定義5. 拡張した領域の整関数 $f(x)$ に対して

$$D \log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} (Dx) = g(x)$$

となる $\log f(x)$ が存在する。これを 代数的対数関数 とい

$$\log f(x) = \int g(x) + [C] = \int g(x) (Dx)^{-1} dx + [C]$$

で表す。

定理5. \mathbb{Q} においてつぎの等式がなりたつ。 ($a_n = \{a_m\}$).

$$1) \log(a_n b_m) = \log a_n + \log b_m, \log a_n^r = r \log a_n$$

$$2) D \log a_n = (D a_n) / a_n$$

$$3) D \log u^r = -r, D \log P^r = r$$

$$D \log (u - \alpha)^r = -r u / (u - \alpha)$$

$$D \log (p - \alpha)^r = r p / (p - \alpha) \quad (\alpha, r; \text{実数}).$$

4) 一般に $f(u), f(p)$ がそれぞれ u または p に関して普通の意味で微分可能ならば,

$$D f(u) = -f'(u) u = -\frac{df}{du} u$$

$$D f(p) = f'(p) p = \frac{df}{dp} p.$$

定理6. 積分定数を略して次の公式がなりたつ。

$$\int (Df) g = fg - \int f(Dg)$$

$$\int f'(u) u = -f(u), \int f'(p) p = f(p)$$

$$\int [\alpha] = -[\alpha] \log u = [\alpha] \log p$$

$$\int \frac{P}{p-a} = \log(p-a)$$

$$\int \frac{P}{(p-a)^{k+1}} = -\frac{1}{k}(p-a)^{-k}.$$

例2. 差分方程式

$$a(x+1)f(x) - xf(x+1) = a^{x+1}, \quad f(0) = 1, \quad (a; \text{定数}) \quad \textcircled{1}$$

をみたす $f(x)$ の一般式を求めよ.

解) $[x] = n$ とおくと, ①に対応する数列方程式は

$$a(n+1)f_n - nf_{n+1} = a^{n+1} \quad \textcircled{2}$$

$$-nf_{n+1} = Df_n, \quad f_{n+1} = Pf_n - P, \quad a^n = P/(p-a) \quad \text{により}$$

$$a(-Df_n) + af_n + D(Pf_n - P) = aP/(p-a)$$

$$Df_n + (p+a)(p-a)^{-1}f_n = P(p-a)^{-1} + ap(p-a)^{-2}. \quad \textcircled{3}$$

③に関する同次方程式

$$Df_n + (p+a)(p-a)^{-1}f_n = 0 \quad \textcircled{4}$$

に対し

$$Df_n/f_n = -(p+a)(p-a)^{-1} = 1 - 2p(p-a)^{-1}.$$

代数的積分して

$$\log f = \log P - 2 \log(p-a) + C.$$

$$\tilde{f} = cp(p-a)^{-2} \quad \textcircled{5}$$

③に対する特解は

$$f_p = \tilde{f} \int \tilde{f}^{-1} [P(p-a)^{-1} + ap(p-a)^{-2}]$$

$$\begin{aligned}
&= P(P-a)^{-2} \int P \\
&= P^2(P-a)^{-2} \\
&= P(P-a)^{-1} + aP(P-a)^{-2}. \quad \textcircled{6}
\end{aligned}$$

⑤, ⑥により E における ② の一般解は

$$f_n = c n a^{n-1} + (n+1) a^n.$$

対応する ① の一般解は

$$f(x) = c x a^{x-1} + (x+1) a^x.$$

$c = -a$ とおけば ① の特解 $f(x) = a^x$ を得る.

同様に, 2 階以上の代数的常微分方程式や偏微分方程式が解ける.

参考文献

- [1] 早原四郎, 春木茂, 新しい演算子法と離散解析関数論, 槇書店 (1981).
- [2] S. Hayabara, z-Transformation by the New Operator Methods, Proc. Japan Acad. 58A (1982) 182-185.
- [3] S. Hayabara, Algebraic Derivative, Integral and Difference Equations (in Japanese), Bull. Okayama Univ. Sci. NO.18 (1983), 17-30.