数理解析研究所講究録
499 巻 1983 年 49-63

ある種の写像のiterationについて

東大理 木村俊房(Tosihusa Kimura)

§1 目的　多変数関数論では1変数関数論と著しく異なる現象が起ることが知られているが，その1つとして，Fatou [1,2] と Bieberbach [1] による次のような例がある．

"写像 $\varphi: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ で次の性質をもつものが存在する：

i) $\varphi: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ は双正型，

ii) $\mathbb{C}^2 \setminus \varphi(\mathbb{C}^2)$ は内点をもつ，

iii) $J\varphi \equiv 1$ （$J\varphi$ は φ のヤコビ行列式）"

このような φ を構成するのに Bieberbach は簡単な整型双有理写像 $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を利用した．このような f に対し，適当な開集合 $U \subset \mathbb{C}^2$ をとると，

$$\varphi(\mathbb{C}^2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$$

となる．ここで $f^n\ (n \in \mathbb{Z})$ は f の n 回の iteration を表わすこととする

他の例については Bochner-Martin [1], 小平 [1], 喜

多[1]を参照されたい.

上記喜多の報告のなかで, $\varphi(\mathbb{C}^2)$のいくつかの性質についての若林の結果が紹介されている. 我々の目的は$\varphi(\mathbb{C}^2)$が$\mathbb{C}^2$のなかにどのように入っているかをより具体的に知りたいということである. しかし, そう簡単に分ることではないので, ここで述べることはかなり中途半端である.

fを$\mathbb{C}^2$から$\mathbb{C}^2$の上への双正則写像とすれば, $\{f^n ; n \in \mathbb{Z}\}$は$\mathbb{C}^2$の離散的力学系とみなされるので, 力学系の用語をも用いる.

§2. Fatou-Bieberbach の写像の構成　前節で述べた写像φの構成法を復習しておく.

f ; $\mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ で$\mathbb{C}^2$の原点$0=(0,0)$の近傍から$\mathbb{C}^2$への正則写像で原点を原点へ移すものを表わす. Taylor 展開を用いて, fを

$$f : \begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta y + 2\text{次以上の項} \\ y_1 = \gamma x + \delta y + 2\text{次以上の項} \end{cases}$$

と表わし, fの線形化を

$$g : \begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta y \\ y_1 = \gamma x + \delta y \end{cases}$$

とする. そのとき, $\varphi : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ に対する方程式

(2,1)　$f\circ\varphi = \varphi\circ g$　（$\circ$は写像の合成を表わす）

は Schröder の方程式といわれる．行列 $\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ の固有値

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ \varphi\uparrow & & \uparrow\varphi \\ & \xrightarrow{g} & \end{array}$$

λ, μ を f の 0 における固有値ということにする．そのとき，次の定理がなりたつ．（Schröder の方程式に関する最も一般的な結果については福原[1]をみられたい）．

定理" 次の条件が成り立つとする．

1')　$|\lambda|, |\mu| > 1$，または，$|\lambda|, |\mu| < 1$，

2)　$\lambda \neq \mu^k$, $\mu \neq \lambda^k$　$(k = 2, 3, \cdots\cdots)$．

そのとき，(2,1)を満たす $\varphi : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ が存在する．φは

(2,2)　$\varphi : \begin{cases} x_1 = x + 2\text{次以上} \\ y_1 = y + 2\text{次以上} \end{cases}$

のもとで一意的に定まる．"

系1．"条件

1)　$|\lambda|, |\mu| > 1$;

と 2)，さらに

3)　$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ は $\mathbb{C}^2$ で整型，

とする．そのとき，(2,1)を満たす $\varphi : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ は $\mathbb{C}^2$ で整型となる"

系2．"条件 1') と 2) と条件

4) $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ は $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ への双正則写像,

のもとで, φ は $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ への双正則写像となる"

系3. "条件 1), 2), 4) と

5) $J\varphi \equiv$ 定数

のもとで, (2,2) を満たす φ に対し $J\varphi \equiv 1$ が成り立つ"

条件 4), 5) を満たす f に対し, $p=(a,b)$, $p'=(a',b')$ は f の不動点, すなわち, $f(p)=p$, $f(p')=p'$ とする. f の p における固有値を λ, μ; f の p' における固有値を λ', μ' とする. λ, μ に対し条件 1), 2) が成り立てば, $\varphi: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ で §1 の i), ii), iii) と $\varphi(p)=p$ を満たすものが存在する. そのとき,

$$\varphi(\mathbb{C}^2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U) = \{ q \in \mathbb{C}^2 ; \lim_{n\to\infty} f^{-n}(q) = p \}$$

が成り立つ. ここで U は p の適当な近傍である. もし, p' が f の源点 (source), すなわち, $|\lambda'|, |\mu'| > 1$ であれば, p' の適当な近傍 U' に対し

$$U' \subset \mathbb{C}^2 \setminus \varphi(\mathbb{C}^2)$$

となる. したがって, このような φ が求めるものである.

以上述べたことから, φ を求めることは, 上の性質をもつ f を求めることに帰着された. このような f として Bieberbach は

$$\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = 2x - 3y^2 + 2y^3, \end{cases}$$

喜多は

$$\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = -4x + 15y^2 - 10y^3 \end{cases}$$

を使っている. Bieberbach と喜多による f は3個の不動点 $(0,0)$, $(1,1)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ を持つ. 最初の2つは源点, 最後の1つは鞍点 (saddle point), すなわち, 固有値の絶対値の1つは >1, 他の1つは <1, $\neq 0$ である. 対称性を利用するため, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ を原点に移すことにする. そのとき, Bieberbach, 喜多の f はそれぞれ,

$$\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = 2x - \frac{3}{2}y + 2y^3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = -4x + \frac{15}{2}y - 10y^3 \end{cases}$$

となる.

この2つを含む写像

$$f_c \quad : \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = cx - \frac{3}{2}(c-1)y + 2(c-1)y^3 \end{cases}$$

を考える. ここで c は複素パラメータとする. f_c が原点に関して対称であることは明らかであろう.

§3. 不動点, 周期点　　$c \neq 0$ ならば, f_c は明らかに $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ の上への整型双有理写像で, $Jf_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & -\frac{3}{2}(c-1) + 6(c-1)y^2 \end{vmatrix} = -c$ を満たす. $c \neq 0, 1$ ならば, f_c の不動点は

$$(0,0), \quad (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), \quad (-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})$$

の3点で，不動点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ における固有値は $\rho^2-c=0$ の根 $\pm\sqrt{c}$ であり，不動点 $(0,0)$ における固有値は $2\rho^2+3(c-1)\rho-2c=0$ の根 $(-3(c-1)\pm\sqrt{9c^2-2c+9})/4$ である．

周期kの周期点をk-周期点ということにする．

2周期点は次の3組である：

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{\sqrt{7}+i}{4},\frac{\sqrt{7}-i}{4}\right),\ \left(\frac{\sqrt{7}-i}{4},\frac{\sqrt{7}+i}{4}\right),$$
$$\left(-\frac{\sqrt{7}+i}{4},-\frac{\sqrt{7}-i}{4}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{7}-i}{4},-\frac{\sqrt{7}+i}{4}\right)$$

これらの点はf^2の不動点で，f^2の不動点 $(\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$ における固有値は $18(c-1)^2+c\pm\sqrt{(18(c-1)^2+c)^2-c^2}$ であり，他の不動点における固有値はすべて $(9(c-1)^2+4c\pm\sqrt{(9(c-1)^2+4c)^2-16c^2})/4$ である．

3-周期点は8組あるが，まだ具体的に求めていない．一般にk-周期点の個数はkとともに増加する．

$|c|>1$, $c\in\mathbb{C}$ ならば，fの不動点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ は源点で，明らかに§2の条件2)を満たす．したがって，$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ と $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ に対応する写像 $\varphi_+,\varphi_-:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ が得られる．

$$G_+=\varphi_+(\mathbb{C}^2),\quad G_-=\varphi_-(\mathbb{C}^2)$$

とおけば，G_+, G_- は互に素な$\mathbb{C}^2$と双整型な$\mathbb{C}^2$の領域である．

$|c|>1$, $c\in\mathbb{C}$ならば，$(0,0)$はfの鞍点であることは分る．しかし，2-周期点がf^2の源点か鞍点などを調べるのはやや

面倒である.

$c>1$ または $c<-1$ の場合に不動点, 2-周期点を調べてみる.

不動点	固有値	$c>1$	$c<-1$
$(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$\lambda=\sqrt{c},\ \mu=-\sqrt{c}$	$\lambda>1,\ \mu<-1$	λ,μ:純虚数
$(0,0)$	$\lambda=\frac{1}{4}\left(-3(c-1)+\sqrt{9(c-1)^2+16c}\right)$	$0<\lambda<1$	$1<\lambda$
	$\mu=\frac{1}{4}\left(-3(c-1)-\sqrt{9(c-1)^2+16c}\right)$	$\mu<-1$	$0<\mu<1$

2-周期点	f^2の固有値	$c>1$ または $c<-1$
$(\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2})$ $(-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$	$\lambda=18(c-1)^2+c+\sqrt{(18(c-1)^2+c)^2-c^2}$ $\mu=18(c-1)^2+c-\sqrt{(18(c-1)^2+c)^2-c^2}$	$0<\mu<1<\lambda$
その他	$\lambda=\frac{1}{4}\left(9(c-1)^2+4c+\sqrt{(9(c-1)^2+4c)^2-16c^2}\right)$ $\mu=\frac{1}{4}\left(9(c-1)^2+4c-\sqrt{(9(c-1)^2+4c)^2-16c^2}\right)$	$0<\mu<1<\lambda$

§4 安定曲線, 不安定曲線. $f:\mathbb{C}^2,0\to\mathbb{C}^2,0$ とし, f の原点での固有値の1つを ρ とする. そのとき, 次の定理が成り立つ (Poincaré [1], Picard [1]).

定理 " $|\rho|\neq 0,1$ かつ $\rho^k\ (k=2,3,\cdots)$ はもう1つの固有値にならないとする. そのとき, $\psi:\mathbb{C},0\to\mathbb{C}^2,0$ で

(4.1) $\qquad \psi(\rho t)=f\circ\psi(t)$

を満たすものが存在する."

(4.1) は Poincaré の方程式といわれる.

系1 " 上記仮定のもとで, さらに $|\rho|>1$, f は $\mathbb{C}^2$ で整型

とする．そのとき，ψは$\mathbb{C}$で整型である．"

系2　"上記仮定のもとで，fはさらにfは$\mathbb{C}^2$から$\mathbb{C}^2$への双整型写像とする．そのとき，ψは$\mathbb{C}$から$\mathbb{C}^2$への埋め込みである"．

$f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$が双整型のとき，上のような$\psi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$を$|\rho| < 1, > 1$に従って，$f$の安定曲線，不安定曲線という．$k$-周期点$p$に対しては，$f^k$の$p$における安定，不安定曲線を$f$の$p$における安定，不安定曲線という．

写像

$$f_c : \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = cx - \frac{3}{2}(c-1)y + 2(c-1)y^3 \end{cases} \qquad (|c| > 1)$$

の鞍点$0 = (0,0)$における安定，不安定曲線を求めてみよう．固有値の1つをρとする．$\psi = (u, v)$とおけば，(4.1)は

$$\begin{cases} u(\rho t) = v(t) \\ v(\rho t) = cu(t) - \frac{3}{2}(c-1)v(t) + 2(c-1)v(t)^3 \end{cases}$$

となる．vを消去して

$$u(\rho^2 t) + \frac{3}{2}(c-1)u(\rho t) - cu(t) = 2(c-1)u(\rho t)^3.$$

$$u(t) = \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \cdots$$

を代入することにより，ξ_1は任意にとれ，ξ_n $(n > 1)$は

$$(\rho^{2n} + \frac{3}{2}(c-1)\rho^n - c)\xi_n = 2(c-1)\sum_{j+k=n} \xi_j \xi_k$$

によって順次定まることが分る．（Ushiki [1]）．

tを消去して，この曲線が $x=0$ 近傍で $y=\phi(x)$ で表わされるとすれば，ϕ は

$$\phi(\phi(x)) = cx - \frac{3}{2}(c-1)\phi(x) + 2(c-1)\phi(x)^3$$

を満たす．$\phi(x) = \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \cdots$ とおいて，未定係数法により $\eta_1, \eta_2, \cdots$ を順次求めることができる．

不動点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ における2つの不安定曲線も同様にして求めることができる．

k-周期点 $p=(a, b)$ における安定または不安定曲線を求めるには次のようにすればよい．f^k, $\psi=(u, v)$ を

$$f^k : \begin{cases} x_1 - a = \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \cdots \\ y_1 - b = \gamma(x-a) + \delta(y-b) + \cdots \end{cases}, \quad \psi : \begin{cases} x - a = \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \cdots \\ y - b = \eta_1 t + \eta_2 t^2 + \cdots \end{cases}$$

とおいて，未定係数法で $\xi_1, \eta_1, \cdots, \xi_n, \eta_n, \cdots$ を求めればよい．

§5. f_c （$c>1$ または $c<-1$）の R^2 への制限．$c>1$ または $c<-1$ ならば，f_c は R^2 を R^2 の上へ移す．また，φ_+, φ_- は R^2 から R^2 への写像となる．ここでは $\varphi_+(R^2) = G_+ \cap R^2$, $\varphi_-(R^2) = G_- \cap R^2$ の形を求めてみよう．

まず，$c>1$ とする．

不動点 $(0,0)$ における安定，不安定曲線は $(0,0)$ の近傍でそれぞれ

(5,1) $\qquad y = \lambda x + \eta_3 x^3 + \cdots, \quad 0<\lambda<1, \quad \eta_3>0$

(5,2) $$y=\mu x+\eta_3' x^3+\cdots, \quad \mu<-1, \quad \eta_3'>0$$

で与えられる. 源点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ における2本の不安定曲線は

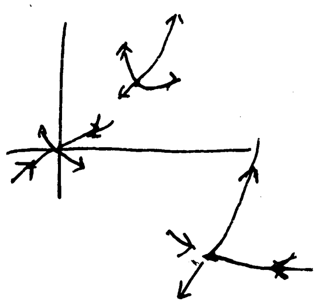
(5,3) $$\begin{cases} x_1-\frac{1}{2} = t+\xi_2 t^2+\xi_3 t^3+\cdots, & \xi_n>0,\ n=2,3,\cdots \\ y_1-\frac{1}{2} = \sqrt{c}\,t+c\xi_2 t^2+\cdots, \end{cases}$$

(5,4) $$\begin{cases} x_1-\frac{1}{2} = t+\xi_2' t^2+\cdots & , \ \xi_2'>0 \\ y_1-\frac{1}{2} = -\sqrt{c}\,t+c\xi_2' t^2+\cdots \end{cases}$$

で与えられる. (5,3) で与えられる曲線の $t>0$ の部分を $y=\phi(x)$ とすれば, $x>0$ でそこで ϕ は単調増加である.

2-周期点 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ から右に出る不安定曲線, 安定曲線はそれぞれ単調に $x, y\to\infty$, $x, y\to-\infty$ となる.

以上を図示すると次のようになる.



これ以上詳しく調べるために数値計算に頼ることとする. $(0,0)$ から右に出る不安定曲線と $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ へ左から入る安定曲線は横断的に交わる. すなわち, 異質二重漸近点 (hetroclinic point) が現われる. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ から出る不安定曲線と $(0,0)$ へ入る安定曲線も交わると思われるが, まだ確認していない.

以上のことから, $\varphi_+(\mathbb{R}^2)$, $\varphi_-(\mathbb{R}^2)$ は次の図のようになる.

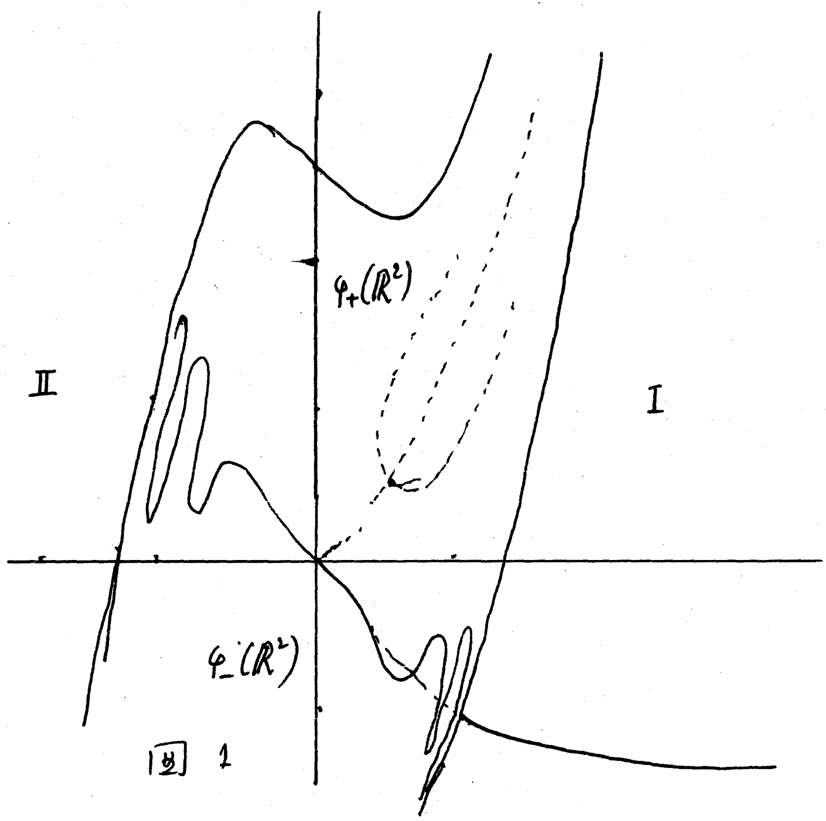


図 1

つぎに $c<-1$ の場合を考える.

原点における不安定曲線は

$$y=\lambda x-\gamma_3 x^3+\cdots \quad , \ \lambda>1, \ \gamma_3>0$$

と表わされ,

$$-cx \leqq y \leqq \lambda x \quad \left(0\leqq x\leqq \tfrac{1}{2}\right)$$

を満たすことが分る. 安定曲線は

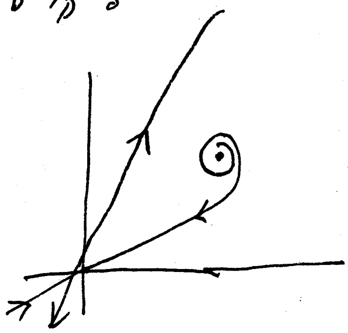
$$y=\mu x+\gamma_3' x^3+\cdots \quad , \ 0<\mu<1, \ \gamma_3'>0$$

と表わされ, $\frac{1}{3}x \leqq y \leqq x \quad \left(0\leqq x\leqq \frac{1}{2}\right)$ を満たす.

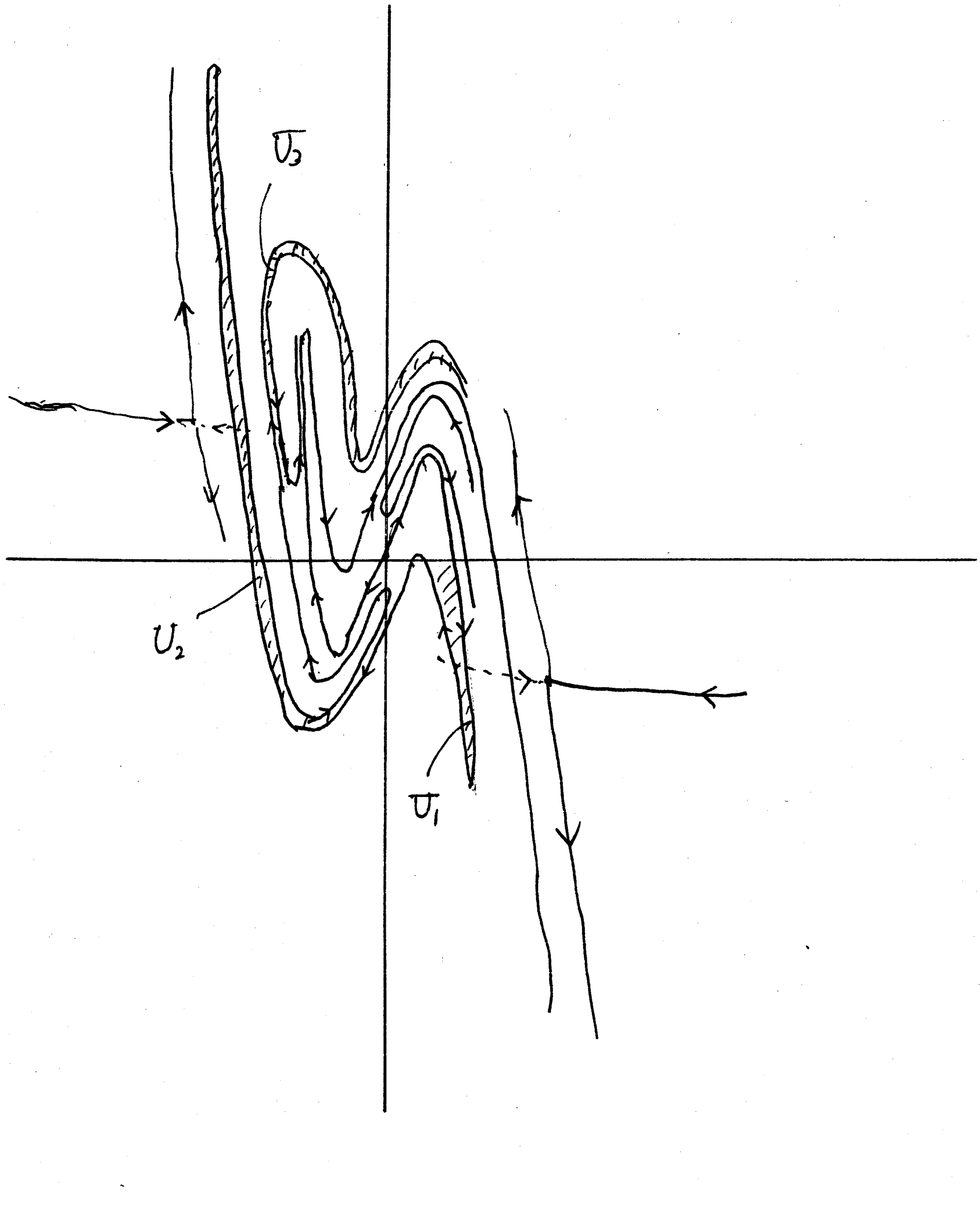
不動点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ における固有値は純虚数であるから, 渦状点である

以上のことから原点における安定, 不安定曲線は次の図の

ようになることが分る



原点における不安定曲線がどのように伸びていくかは数値計算による。$c=2$ のときの概略の図を示す



まず，$\varphi_+(\mathbb{R}^2)$ と $\varphi_-(\mathbb{R}^2)$ は原点に関して対称で，原点から出る不安定曲線Cによって囲まれた領域であることに注意しよう．図の斜線の部分 U_1 は f により U_2 に，U_2 は U_3 に移り，U_1 は右下に伸び，U_2 は左上により長く伸び，U_3 はさらに長く伸びて右下に行く．このように $\varphi_+(\mathbb{R}^2)$，$\varphi_-(\mathbb{R}^2)$ は無数の腕を出す．さらに，これらは右下から左上へ細長く伸びた領域のなかで互に絡み合っている．$\overline{\varphi_+(\mathbb{R}^2)\cup\varphi_-(\mathbb{R}^2)}$ の境界は2-周期点 $(\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2})$，$(-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$ から出る不安定曲線である．$(\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2})$ から右下へ出る不安定曲線は素直であるが，左上へ出る部分はCと絡み合う．$(\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2})$ へ左から入る安定曲線はCの2つの分枝と横断的に交わる．これから，異質二重漸近点だけではなく同質二重漸近点（homoclinic point）も出現することが分る．

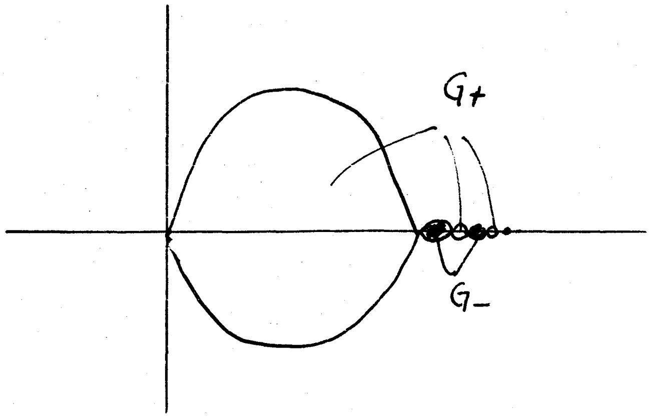
§6　G_+ と G_- の $\mathbb{C}^2$ 内での形状　　G_+ と G_- は原点に関して対称であるから，G_+ についてだけ調べればよい．G_+ の一般的性質として次の若林（喜多[1]）の結果がある

定理"　$L:\ \alpha x+\beta y+\gamma=0$ は $\mathbb{C}^2$ 内の任意の複素直線とする．そのとき，$G_+\cap L$ は有界である"

G_+ の境界は実3次元であるが，原点から出る不安定曲線 — 実2次元解析的曲面 — を含む．このことから，G_+ の境界は実3次元の解析多様体（特異点を含むかも知れない）と想

像されるが、証明のメドは立っていない。

実験的に、$G_+ \cap \{y=0\}$ を求めてみると、$c>1$ のとき次の図のようになる。これから分るように、図 I における領域 I と



II は $\mathbb{C}^2$ のなかではつながっている。

文献

Bieberbach, L

[1] Beispiel zweier ganzen Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volumtreue Abbildung des $\mathbb{R}_4$ auf ein Teil seiner selbst vermitteln, S-B. Preuß. Akad. Wiss., Physikalisch-math. Klasse (1933), 476–479.

Bochner, S & Martin W. T.,

[1] Several complex variables, Princeton U.P., 1948.

Faton, P

[1] Sur les fonctions méromorphes de deux variables, C.R. 175 (1922), 862–865.

[2] Sur certaines fonctions uniformes de deux variables, C.R. 175 (1922), 1030-1033.

福原満洲雄

[1] Schröder の函数方程式について, 九州帝大理学部研究報告, 1 (1945), 190-196

喜多通武

[1] 多変数函数論より見た Riemann 面の一つの問題, 数学, 23 (1971), 219-225.

小平邦彦

[1] Nevanlinna 理論, 東大数学教室セミナリー・ノート, 34, 1974.

Picard. E

[1] Leçons sur quelques équations fonctionnelles, Gauthier-Villars, 1928

Poincaré, H

[1] Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes, Jour. de Liouville, 4e série, 6 (1890), 313-365.

Ushiki, S

[1] Unstable manifolds of analytic dynamical systems, J. Math. Kyoto Univ., 21 (1981), 763-785