

On the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups

東大. 理 加藤 信一 (Shin-ichi Kato)

Kazhdan-Lusztig 多項式 (以下, $K-L$ 多項式と略す) が, 代数群の表現論に色々形式で入り, ていることはよく知られている。ここではアフィン Weyl 群の $K-L$ 多項式のある公式を与え, その表現論への応用として Lusztig 予想との関連を述べる。

1° Kazhdan-Lusztig 多項式

ここでは $K-L$ 多項式の定義を復習する。

まず (W, S) を Coxeter 系とし, つまり W は生成元 S と関係式

$$\begin{cases} s^2 = e & (\forall s \in S) \\ (st)^{m_{st}} = e & (s \neq t \in S, m_{st} \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

で与えられる群である。例えば対称群 (より一般に Weyl 群, 又後述のアフィン Weyl 群) がその例である。この時,

$l: W \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 長関数 (length fn.)

且つ W 上の半順序 \geq (Bruhat 順序) が標準的に定まる。

すなわち q 環定元, $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を一変数 Laurent 多項式環とする。

(W, S) の Hecke 環 $\mathcal{H}(W)$ とは, $\{T_w\}$ ($w \in W$) なる自由基底を持つ, i.e.

$$\mathcal{H}(W) \simeq \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \cdot T_w$$

($\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -加群として)

で, 乗法が

$$\begin{cases} (T_s - q)(T_s + 1) = 0 & (\forall s \in S) \\ T_w \cdot T_{w'} = T_{ww'} & \text{if } l(w) + l(w') = l(ww') \end{cases}$$

で与えられるように $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 上の多元環である。

$q=1$ と特殊化すると $\mathcal{H}(W) \simeq \mathbb{Z}[W]$ (W の群環) となる

ことに注意しよう。(以上 [B] 参照.)

定理 (Kazhdan-Lusztig [K-L]) 任意の $w \in W$

に対して, 次の 2 条件を満たす $C_w \in \mathcal{H}(W)$ が一意に

存在する:

- ① $\overline{C_w} = q^{-l(w)} C_w$; (但し $\overline{}$ は $\overline{q} = q^{-1}$, $\overline{T_w} = (T_{w^{-1}})^{-1}$ で定まる $\mathcal{H}(W)$ の位相的環自己同型.)
- ② $C_w = \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q) T_y$ と表示される。

$$\begin{aligned}
 & \text{ここで } P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q] \text{ として} \\
 & \begin{cases} \deg P_{y,w}(q) \leq \frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(y) - 1) & \text{if } y \neq w \\ P_{w,w}(q) = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

なるもの。

定義. 1 Γ の定理における C_w の係数 $P_{y,w}(q)$ を $K-L$ 多項式 とよぶ。(これを計算する algorithm がある [K-L])

2° Lusztig 予想

次に、上で定義した $K-L$ 多項式 ($W = \Gamma > \Gamma = \text{Weyl}$ 群の場合) が正標数 p の代数的体 K 上の半単純代数群の既約有理表現の指標公式を記述する、という Lusztig の予想 ([L.1]) を説明する。(このような群の有理表現論については [川澄], [横決] で解説を与えてあるので、詳しくはそちらを参照して頂ければ幸いであります。)

以下、

$$\begin{aligned}
 K &= \text{標数 } p > 0 \text{ の代数的体} \\
 &= \text{連結, 単連結, 擬単純代数群} / K
 \end{aligned}$$

$$B = G \text{ の Borel 部分群}$$

$$T = \text{極大トーラス} \subset B$$

$$W = N_G(T) / T : \text{Weyl 群}$$

$P = \text{Hom}_{\text{alg}}(T, k^*)$: ウェイト格子 (T の指標群)

$R = (G, T)$ の \mathbb{C} - T 係 $\subset P$

$R^+ = B$ に対応する正 \mathbb{C} - T 係 $\subset R$

$P^{++} =$ 支配的ウェイトのなす半群 $\subset P$

と置く。 G の既約有理表現 (の同値類) 全体は P^{++} に
 1-1 対応を定める: (任意 $\lambda \in P^{++}$ に対して λ を
 最高のウェイトに持つ既約表現 $L(\lambda)$ が同型を除いて唯一
 つ存在する。 即ち

$$L(\lambda) \ni \exists v_\lambda \text{ s.t. } b \cdot v_\lambda = \lambda(b)v_\lambda \quad (\forall b \in B)$$

(但し $B \rightarrow T \rightarrow k^*$ により $\lambda \in P^{++}$ を B の指標と見
 たり。) $L(\lambda)$ は例えげに B の "実現" される。 B^- を
 $B \cap B^- = T$ とする G の Borel 部分群 (B の opposite),
 $\lambda \in P^{++}$ を上と同様に B^- の指標と見て。

$$M(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ind}_{B^-}^G(\lambda) \quad (\text{有理表現の圏 } \mathcal{R} \text{ の} \\ \text{誘導表現})$$

と置く。 別の言い方をすれば,

$$M(\lambda) = \Gamma(G/B^-, \mathcal{L}(\lambda)),$$

ここで $\mathcal{L}(\lambda)$ は λ の定める G/B^- 上の直線束の切断の
 層である。 $M(\lambda)$ は G の有限次元有理表現を与えるが,

$\text{Soc } M(\lambda) = L(\lambda)$, つまり $M(\lambda)$ は唯一の既約部分加
 群を持ち、それが $L(\lambda)$ に等しいことが知られているのである。

さて、表現の最も大切な不変量は、その指標である：

有限次元有理表現 M を極大トーラス T に制限して

$$M|_T \simeq \bigoplus_{\lambda \in P} M^\lambda$$

$$M^\lambda = \{v \in M \mid t \cdot v = \lambda(t)v \quad (\forall t \in T)\}$$

と分解される時、 M の指標、 $\text{ch } M$ を

$$\text{ch } M = \sum_{\lambda \in P} \dim M^\lambda \cdot e^\lambda \in \mathbb{Z}[P] \quad (P \text{ の群環})$$

で定義する。(但し e^λ は $\mathbb{Z}[P]$ の $\lambda \in P$ に対応する標準的基底、 $e^\lambda \cdot e^\mu = e^{\lambda+\mu}$.) 例えば $\lambda \in P^{++}$ に対し、

$$(1) \quad \text{ch } M(\lambda) = \sum_{X \in W} (-1)^{\ell(X)} e^{X(\lambda+\rho) - \rho} / \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) \quad (\text{Weyl の指標公式})$$

である。ここで $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha \in P^{++}$ 。

問題. $\text{ch } L(\lambda)$ を記述せよ。

Lusztig 予想 (以下、 L 予想) は以下に述べらるることにこの問題に対する解答を与える。

Weyl 群 W はラット格子 P , 及びルーツ格子 Q (\mathbb{R} で生成される P の部分加群) に自然に作用するので、

半直積, $\tilde{W} = W \rtimes P \supset W_a = W \rtimes Q$ を構成
 することができ。 W_a は通常 R^\vee (R のデュアル系) \subset
 $Q^\vee = \text{Hom}(P, \mathbb{Z})$ に対応する Γ \supset Weyl 群 とおぼし
 るもので, Coxeter 群 であることが知られている。 (但
 しゆわわわは W_a の生成系, S_a とし \tilde{W} の s を鏡映の
 集合をとる:

$$S_a = \{w_\alpha \mid \alpha: \text{単純ルーツ}\} \cup \{w_{\alpha_0}, t_{\alpha_0}\}.$$

ここで α_0 は対応するルーツ α_0^\vee が R^\vee の最大ルーツと
 なるようなルーツ, w_α は $\alpha \in R$ に対応する鏡映, また
 $\tilde{W} \supset P$ の元を P 自身と区別するため, $\lambda \in P$ に対し
 t_λ と書いた。一方 \tilde{W} は \tilde{W} の理由で "殆ど" Coxeter 群
 である。 $\Omega = N_{\tilde{W}}(S_a)$ とおくと $\tilde{W} = \Omega \rtimes W_a$
 (半直積)。 Ω は W_a 上の長 2 回転群 Ω , Bruhat 順序 \leq
 を \tilde{W} 上に

$$\ell(\gamma \cdot w) \stackrel{\text{def}}{=} \ell(w) \quad (\gamma \in \Omega, w \in W_a)$$

$$\gamma \cdot \gamma' \leq \gamma' \cdot w \stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma = \gamma', \quad \gamma \leq w$$

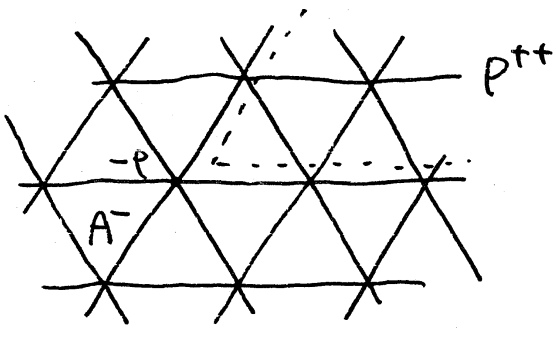
$$(\gamma, \gamma' \in \Omega, \gamma, w \in W_a)$$

で拡張すると ℓ は well-defined となり, Hecke 環
 $\mathcal{H}(\tilde{W})$, K -L 多項式等も W_a と同様に定義される。(実
 は, 直ちに $P_{\gamma \gamma', \gamma w}(\varrho) = P_{\gamma, w}(\varrho)$ ($\gamma \in \Omega, \gamma, w \in$
 W_a) がわかり, 結局 Γ \supset Weyl 群 の K -L 多項式が

わかればよいことにする。)

\tilde{W} 及び W_a は $P \otimes R$ にアフィン変換として二次の様
 に作用する (dot action): $w = t_\lambda \gamma$ ($\lambda \in P, \gamma \in W$)
 とすると, $v \mapsto w \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(N + \rho) - \rho + \rho\lambda$
 ($v \in P \otimes R, \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha, \rho = \text{char. } R$). また,
 $P \otimes R \setminus \cup H$ (H は W_a の全2の鏡映・鏡映面-dot
 actionに關する - をわたる) の任意の連結成分 (alcove)
 は W_a の作用に關する基本領域と看する。勿論 alcoves の
 集合は \tilde{W} で保たれる。特に

$A^- = S_a$ に対応する
 鏡映面に圍まれた
 alcove



とおく (右図参照)。

定義 2 $w \in \tilde{W}$ が 支配的 (dominant)

$$\Leftrightarrow w(A^-) \cap P^{++} \neq \emptyset$$

これは, p (標数) $\geq h$ (ルース係数 R の Coxeter 数)

($\Leftrightarrow A^- \cap P \neq \emptyset$ がすぐにはわかる)

ならば, $w \cdot \lambda \in P^{++}$ ($\lambda \in A^- \cap P$) と同値である
 (標数 p のとり方による)。

(34.1) w_0 を W の長き最大の元, $\mu \in P^{++}$ とすると
 $w_\mu := t_\mu w_0$ は支配的。実際 $\rho \geq h$ ならば,
 $-2\rho \in A^- \bar{v}$.

$w_\mu \cdot (-2\rho) = w_0(-\rho) - \rho + \rho\mu = \rho\mu \in P^{++}$
 である。

(34.2) $\rho \geq h$ を仮定し, $\lambda \in A^- \cap P$ を固定する。
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $P \times Q^\vee$ 上の自然な pairing とする。

予想 (Lusztig [L.1]) 支配的元, $w \in \tilde{W}$ が
 Jantzen 条件

$$(2) \quad \langle w \cdot \lambda + \rho, \alpha_0^\vee \rangle \leq \rho(\rho - h + 2)$$

を満足するならば,

$$(3) \quad \text{ch } L(w, \lambda) = \sum_{\substack{\gamma \in \tilde{W}, \text{ 支配的} \\ \gamma \leq w}} (-1)^{l(w) - l(\gamma)} P_{\gamma, w}(1) \text{ch } M(\gamma, \lambda)$$

(3) の右辺は全計算可能であることを注意 ($k-L$ 多項式
 の $q=1$ の値, Weyl の指標公式 (1))。

この予想 (以下 L 予想) が正しいならば,

(a) translation principle (Jantzen [J])

(b) $\bar{\tau}$ -リール積定理 (Steinberg [S])

によつて $\text{ch } L(\lambda)$ が 全 $\lambda \in P^{++}$ について計算できる ($P \geq \lambda$ の場合に) ことに存する: 実際.

(i) 公式 (3) は, alcove の内部にある $\lambda \in P^{++}$ についての $\text{ch } L(\lambda)$ の公式を与えてゐるが, (a) によつて, "translation" することによつて, alcove の境界上の $\lambda \in P^{++}$ についても指標公式が得られる。

(ii) L は Jantzen 条件 (2) を満たす最高の $\lambda \in P^{++}$ について指標公式を与えてゐる。一方

$$D = \{ \lambda \in P^{++} \mid 0 \leq \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < p \text{ (} \forall \alpha \in \Phi^+ \text{)} \}$$

(制限の $\lambda \in P^{++}$)

とよくと, (b) ($\bar{\tau}$ -リール積定理) は,

$$(4) \quad \text{ch } L(\lambda + p\tau) = \text{ch } L(\lambda) \cdot \text{ch } L(\mu)^{(p)}$$

($\lambda \in D, \mu \in P^{++}$)

を主張する。但し

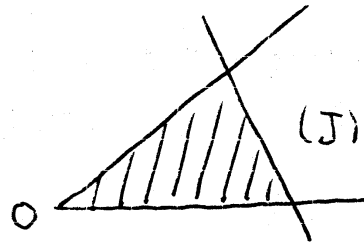
$$\text{ch } M = \sum_{\lambda} m_{\lambda} \cdot e^{\lambda}$$

の時,

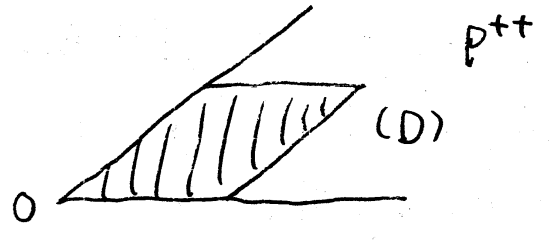
$$\text{ch } M^{(p)} = \sum_{\lambda} m_{\lambda} \cdot e^{p\lambda}$$

とよいた。これより, 制限の $\lambda \in P^{++}$ について指標公式がわかれば, (4) を順に適用することにより全 $\lambda \in P^{++}$ の指標公式がわか

かることになる。Jantzen条件をみたすウイトの範囲は



図(I)



図(II)

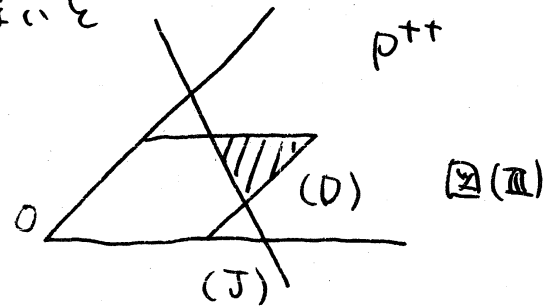
図(I), 制限ウイトは図(II)のようになる。標数

p が長に対してあまり大きくなると

図(III)の様になる。斜線部の指標公式は了解からわかる

ない。(これは元々了解の少

しあかしの所: 3節の了解, 注意参照.)



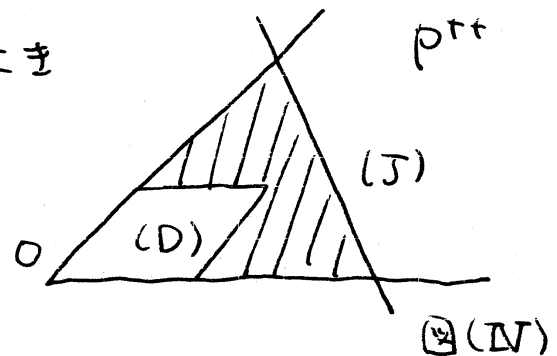
図(III)

が, 標数 p が長に対して十分大き

ければ, 図(IV)の様になる

制限ウイトは図(IV)の様になる。指標が

得られ, 全ての指標公式が得られることになる。



図(IV)

ちなみに, 斜線部の指標公式は2通りのやり方で, 即ち

① 了解から直接,

② 了解を(D)に適用した後, テニール補定理を用いて

得られることに注意しよう。もしも了解が正しければ,

この①②は一致しなければならないのである。

3° 結果. 前節最後の注意に因りて次がわかる。

定理 1. L 理想はテニリル性定理と両立する。つまり

①, ② の指標公式は一致する。

これによつて, L 理想に 1 つ evidence が与えられたこととなる。さて, 定理 1 は次の定理 2 から導かれる:
 $A \cap P \ni \lambda$ に対して ($P \geq \lambda$ は仮定していい) $W \in \tilde{W}$ が $W \cdot \lambda \in D$ を満たす時, W を 制限的 とおぼす。これは P や λ によるまい。一般に支配的なる $W \in \tilde{W}$ に対して, 制限的なる $z \in \tilde{W}$ と $\lambda \in P^{++}$ の組が一意的に存在して,
 $W = t_\lambda z$ となる。

例 2. W_0 (W_0 は長き最大元) は, $W_0(-2\rho) = 0 \in D$ であり制限的。 $\lambda \in P^{++}$ に対し $W_\lambda = t_\lambda W_0$ はちやうど上記の分解を与えている。(例 1 参照)

定理 2. $W \in \tilde{W}$ を制限的なる元, $\mu \in P^{++}$ とする。

(よつて $t_\mu W$ は支配的) なる時, 次の等式が \tilde{W} の群環 $\mathbb{Z}[\tilde{W}]$ 内で成立する。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\gamma \leq t_{\mu} w} P_{\gamma, t_{\mu} w}(1) \cdot \gamma \\
 (5) \quad & = \prod_{\alpha > 0} (1 - t_{-\alpha})^{-1} \left(\sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)} t_{x(\mu + \rho) - \rho} \right) \\
 & \quad \times \left(\sum_{z \in W} P_{z, w}(1) \cdot z \right)
 \end{aligned}$$

定理 2 \Rightarrow 定理 1 の略証. まず $t_{\mu} w$ ($\mu \in P^{++}$, $w \in \tilde{W}$ 制限的) が Jantzen 条件 (2) を満たすならば.

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \text{ch } L(t_{\mu} w \cdot \lambda) (= \text{ch } L(w \cdot \lambda + \rho \mu)) \\
 & = \text{ch } L(w \cdot \lambda) \cdot \text{ch } M(\mu)^{(\rho)}
 \end{aligned}$$

であることが, フェニッル種定理 (4) と linkage principle [A] より簡単にわかる. ところで $\text{ch } L(w \cdot \lambda)$ に対して L 予想が成立しているとする. (6) と Weyl の指標公式 (1)

$$\begin{aligned}
 & \text{より,} \\
 & \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\alpha}) \cdot \text{ch } L(t_{\mu} w \cdot \lambda) \\
 & = \left(\sum_{\substack{\gamma \in \tilde{W}, \text{ 支配的} \\ \gamma \leq w}} (-1)^{\ell(w) - \ell(\gamma)} P_{\gamma, w}(1) \sum_{z \in W} (-1)^{\ell(z)} e^{\ell(z) z \gamma \cdot \lambda} \right) \\
 & \quad \times \left(\sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)} e^{x(\mu + \rho) - \rho} \right) \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\rho \alpha})^{-1}.
 \end{aligned}$$

こゝで定理2の公式(5) ($\in \mathbb{Z}[\tilde{W}]$ の自己同型 $y \mapsto (-1)^{\ell(y)} y$, v を ω の), 及び $K-L$ 多項式の性質 $[K-L; (2.3.9)]$ を前式に適用すると,

$$\prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\alpha}) \cdot \text{ch } L(t_{\mu} \omega \cdot \lambda) \\ = \sum_{\substack{y \in \tilde{W}, \text{ 支配的} \\ y \leq t_{\mu} \omega}} (-1)^{\ell(t_{\mu} \omega) - \ell(y)} P_{y, t_{\mu} \omega}(1) \sum_{z \in W} (-1)^{\ell(z)} e^{z y \cdot \lambda}$$

つまり, L 予想が $\text{ch } L(t_{\mu} \omega \cdot \lambda)$ に対して成り立つことがわかる。(証明終)

結局, L 予想は,

予想': 制限的 $\omega \in \tilde{W}$ に対し

$$(7) \quad \text{ch } L(\omega \cdot \lambda) = \sum_{\substack{y \in \tilde{W}, \text{ 支配的} \\ y \leq \omega}} (-1)^{\ell(\omega) - \ell(y)} P_{y, \omega}(1) \text{ch } M(y \cdot \lambda)$$

に帰着させることにする。(この予想'の形ならば, 任意の $P \geq \omega$ に対して, 2節の最後で述べた“おかしな”事態は起らない。)

注意. Lusztig が [L.1] で彼の予想 (より自然な形の) 予想' よりも "強い" 形で提出した理由として [L.2] が挙げられる。彼は [L.2] で "一般の位置" にある $\lambda \in P^{++}$ に対して $M(\lambda)$ の既約分解の (1つ- n) を与える予想, (generic decomposition pattern 予想) を与えた後、 L 予想 \Rightarrow g.d.p. 予想を示している。しかしこのための結果 (定理2) を用いると, 逆に g.d.p. 予想 \Rightarrow 予想' (但し標数 \neq 2) を証明することが出来る。 ([Ka.2; Theorem 5.6] 参照)

さて, 定理2は, 支配的 $w \in \tilde{W}$ の $k-L$ 多項式 $q = 1$ の値 $P_{y,w}(1)$ が制限的 $w' \in \tilde{W}$ の $P_{y',w'}(1)$ より得られることを示しているが, 寧ろ q の多項式として, $P_{y,w}(q)$ が $P_{y',w'}(q)$ より計算されることがわかる, ([Ka.2; Theorem 4.2])。しかしこの結果を述べるにはいささか煩わしい準備が必要なので, 詳細は [Ka.2] にゆだねる。ここではこの特別な場合として, $w = w_\lambda$ ($\stackrel{\text{def}}{=} t_\lambda w_0$, $\lambda \in P^{++}$) の場合 (Kostant 重複度公式の q -類似 [Ka.1]) を説明する。定理2で $w = w_0$ とおく。

$$P_{z, w_0}(q) = 1 \quad (\forall z \leq w_0, \text{ i.e. } z \in W)$$
 であること ([K-L]) より, Weyl の指標公式 (1) を

用い2

(Lusztig [L.3]) $\nu, \mu \in P^{++}$ に対し

$$(7) \quad P_{\nu, \mu}(1) = \dim M(\mu)^\nu$$

($M(\mu)$ の μ の重数)

がわかる。(7)式を右辺はよく知られた Kostant による重数公式で記述されるが、ここで q -類似を考へてみよう。 $\rho: P \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ ($Kostant$ の割出数の q -類似) を、 $R^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ とし

$$\rho(\kappa) = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N \\ \kappa = n_1 \alpha_1 + \dots + n_N \alpha_N}} q^{-n_1 - \dots - n_N}$$

を定義し、 $\text{ht}: P \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ を

$$\text{ht}(\kappa) = \langle \kappa, \rho^\vee \rangle, \quad \rho^\vee = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha^\vee$$

とすれば、

定理3 $\mu, \nu \in P^{++}$ に対し

$$P_{\nu, \mu}(q) = q^{\text{ht}(\mu - \nu)} \sum_{X \in W} (-1)^{\ell(X)} P(X(\mu + \rho) - (\nu + \rho))$$

この定理は $q \rightarrow 1$ とすると、右辺は Kostant 重数公式になる。

また、 \mathfrak{g} を $(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$ の R に対応する単純 Lie 環 \mathfrak{g}/\mathbb{C} , \mathfrak{m} を \mathfrak{g} の中零元全体とする、 \mathfrak{g} の (非) 微分代数多項式、 $\mathbb{C}[\mathfrak{m}]$ を \mathfrak{m} の座標環 とおく。 $\mathbb{C}[\mathfrak{m}]$ は自然な次数付け、
 $\mathbb{C}[\mathfrak{m}] = \bigoplus_{i \geq 0} \mathbb{C}[\mathfrak{m}]_i$ を持つ。 \mathfrak{g} は 各次数部分に作用して (1)。 同様に、 $\lambda \in \mathfrak{p}^{++}$ に対し

$$d_\lambda(q) = \sum_{i \geq 0} q^i \cdot (\mathbb{C}[\mathfrak{m}]_i \text{ 中 } \lambda \text{ の } \lambda \text{ を最高 } \mathfrak{h} \text{ への } \mathfrak{g} \text{ の 既約表現の重複度})$$

とおくと、Hesselink, Peterson ([H]) によれば、

$$d_\lambda(q^{-1}) = \sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} p(x(\lambda + \rho) - \rho).$$

より、定理 3.11.

$$d_\lambda(q^{-1}) = q^{-ht(\lambda)} p_{W_0, \omega_\lambda}(q)$$

がわかることになる。(但しこの式の“意味”はわかっている。

References

- [A] H. H. Andersen, The strong linkage principle, J. Reine. Angew. Math. 315 (1980), 53-59.
- [B] N. Bourbaki, "Groupes et algebres de Lie", Chaps. IV-VI, Hermann, Paris 1968.
- [H] W. H. Hesselink, Characters of the nullcone, Math. Ann.

252 (1980), 179-182.

- [J] J.C. Jantzen, Zur Charakterformel gewisser Darstellungen halbeinfacher Gruppen und Lie-Algebren, Math. Z. 140 (1974), 127-149.
- [Ka.1] S. Kato, Spherical functions and a q -analogue of Kostant's weight multiplicity formula, Invent. Math. 66 (1980), 461-468.
- [Ka.2] S. Kato, On the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups, Preprint.
- [K-L] D. Kazhdan and G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. 53 (1979), 165-184.
- [L.1] G. Lusztig, Some problems in the theory of finite Chevalley groups, Proc. Symp. Pure Math. 37 (1980), 313-317.
- [L.2] G. Lusztig, Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition pattern, Adv. in Math. 37 (1980), 121-164.
- [L.3] G. Lusztig, Singularities, character formulas, and a q -analog of weight multiplicities, Asterisque, to appear.
- [S] R. Steinberg, Representations of algebraic groups, Nagoya Math. J. 22 (1963), 33-56.

[川渡] 加藤, Chevalley 群のモジュラー表現入門.

「川渡ロニ十一(代数群)報告集, 1980, 1-44.

[横決] 加藤, Chevalley 群のモジュラー表現入門'.

「群および環の表現とその応用」シンポジウムの報告集(横決), 1981, 128-159.