数理解析研究所講究録
503巻 1983年 47-60

半単純対称空間の Spherical K-type のある種の具体的表示について

東大 理 松本 久義 (Hisayosi Matumoto)

§0 Introduction

半単純対称空間の discrete series については、近年において、Flensted-Jensen, 大島—松本 らによって rank が 2 以上の場合も含めた、一般的な結果が得られている。それによると、半単純対称空間の discrete series は十分 regular な infinitesimal character を持つ場合は Parthasarathy と Zuckerman が独立に構成した Non-trivial $(\mathfrak{g}, K)$-cohomology をもつ表現であり、Schlichtkrull によって Langlands parameter も知られている。しかし、singular な場合には、その存在のための必要十分条件も含めてまだよくわかっていないようである。

ここで G を connected real semi-simple linear Lie group とし、そのある involution σ に対応する半単純対称空間 G/H を考える。K を $\sigma\theta = \theta\sigma$ なる G の Cartan involution θ に対応する maximal compact subgroup とする。このとき、$L = K \cap H$

とすると G/H の discrete series は L-fixed vector をもつ K-type (以下 spherical K-type という) を含むことが知られているが、ここでは、このような spherical K-type の lowest weight vector を"具体的"に表示することを考えることにし、実例として、rank 2 の場合の $SO_0(m+2,n)/SO(2)\times SO_0(m,n)$ を考察する。

§1 半単純対称空間の discrete series

$\mathfrak{g}$ を real semisimple Lie algebra、σ を $\mathfrak{g}$ の involutive automorphism (i.e. $\sigma^2 = id$) とする。さらに θ を σ と可換な $\mathfrak{g}$ の Cartan involution とする。そして σ (resp. θ) による $\mathfrak{g}$ の ± 1 固有空間分解を、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$) とおく。すると、$\theta$ と σ が可換なことより次の直和分解を得る。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}\cap\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{p}\cap\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$$

これから、real Lie algebra の複素化を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のように表わす。そして次のように定める。

$$\mathfrak{g}^d = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h} \oplus \mathbf{i}(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}) \oplus \mathbf{i}(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$$

$$\mathfrak{k}^d = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h} \oplus \mathbf{i}(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}) \qquad \mathfrak{h}^d = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h} \oplus \mathbf{i}(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q})$$

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h}.$$ ここで $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ である。

そして、$G_{\mathbb{C}}$ を、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を Lie algebra に持つ、connected complex Lie group とする。さらに $G, K, H, K^d, \cdots$ などで、$\mathfrak{g}$,

$\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}^d$, … などに対応する $G_{\mathbb{C}}$ の analytic subgroup を表わすことにする。われわれはこれから、半単純対称空間 G^d/H^d の discrete series つまり $L^2(G^d/H^d)$ の既約部分表現を考えることにする。まず次のような結果が知られている。

<u>Theorem</u> (Flensted-Jensen, Matsuki, Oshima)

G^d/H^d が discrete series をもつための必要十分条件は、$\mathrm{rank}(G^d/H^d) = \mathrm{rank}(K^d/K^d \cap H^d)$ となることである。

したがって、以下においては、$\mathrm{rank}(G^d/H^d) = \mathrm{rank}(K^d/K^d \cap H^d)$ という条件を仮定することにする。

ここで $\mathfrak{a}$ をある $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ の maximal abelian subspace とすると、上の仮定により、$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{h}$ においても maximal abelian になる。

次に、$\hat{H}(K^d)$ で、$H_{\mathbb{C}}$ の holomorphic representation の制限になっているような H の有限次元表現の同値類のつくる集合を表わす。 すると、$\hat{H}(K^d)$ と、K^d の有限次元表現の同値類全体は、$H_{\mathbb{C}}$ の holomorphic representation を介して、1対1に対応する。 (ここで K^d (resp. K) は G^d (resp. G) の maximal compact subgroup である。)

次に $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ の complex dual を $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ で表わす。さらに $\mathbb{D}(G^d/H^d)$ (resp. $\mathbb{D}(G/K)$) を G^d/H^d (resp. G/K) 上の不変微分作用素環とする。すると、$\mathbb{D}(G^d/H^d)$ と $\mathbb{D}(G/K)$ は、$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上の holomorphic な微分作用素を介して、自然に同型になる。

したがって $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して Harish-Chandra homomorphism によって algebra homomorphism

$$\chi_\lambda : \mathbb{D}(G^d/H^d) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を定義できる。

M が C^ω-manifold であるとき、次のように定める。

$\mathcal{A}(M) = \{ M$ 上の $\mathbb{C}$-valued C^ω function $\}$

$\mathcal{B}(M) = \{ M$ 上の hyperfunction $\}$

ここで $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して次のように定める。

$$\mathcal{A}_{K^d}(G^d/H^d; \mathcal{M}_\lambda) = \{ f \in \mathcal{A}(G^d/H^d) \mid f \text{ は } K^d\text{-finite} \wedge Df = \chi_\lambda(D)f \ (D \in \mathbb{D}(G^d/H^d)) \}$$

次に $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', M, M'$ でそれぞれ $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{k}, \mathfrak{l}, K, L$ における Centerizer を表わすことにし、Σ, Σ' をそれぞれ $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}), (\mathfrak{f}, \mathfrak{a})$ に対応する root system とする。またそれらの positive system Σ^+, Σ'^+ を compatible になるように固定しておく。また $\alpha \in \Sigma$ (resp. Σ') に対応する $\mathfrak{g}$ (resp $\mathfrak{f}$) の root space を $\mathfrak{g}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{f}_\alpha$) で表わし、$m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ (resp. $m'_\alpha = \dim \mathfrak{f}_\alpha$) とおく。次に $\Sigma^+, -\Sigma^+, \Sigma'^+, -\Sigma'^+$ に対応する nilpotent subalgebra をそれぞれ $\mathfrak{n}, \bar{\mathfrak{n}}, \mathfrak{n}', \bar{\mathfrak{n}}'$ で表わし、対応する analytic subgroup を $N, \bar{N}, N', \bar{N}'$ とする。また $\mathfrak{a}$ に対応する analytic subgroup を A とおく。また

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha, \quad \rho_c = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Sigma'^+} m'_\alpha \alpha$$ と定める。

次に $\mathcal{L}$ で L-fixed vector をもつ K^d の有限次元表現の highest weight の集合を表わす。($\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とみなせる。) また $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して. $\mu_\lambda = \lambda + \rho - 2\rho_c$ とおく。

また $P = MAN$ とおくと. これは G の minimal parabolic subgroup になる。そこで $\{\mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_m\}$ を G/P の closed H-orbit の全体とし. $\tilde{\mathcal{O}}_i = \{x \in G \mid xP \in \mathcal{O}_i\}$ $(1 \leq i \leq m)$ と定める。すると $1 \leq i \leq m$ に対して. $x_i \in K$ を. $\tilde{\mathcal{O}}_i = Hx_iP$ および $Ad(x_i)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ をみたすようにとることができる。

$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して. $\lambda^j = \lambda \circ Ad(x_j)^{-1}$, $\Sigma_j^+ = \Sigma^+ \circ Ad(x_j)^{-1}$ と定める。

次に $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して. 次のように定める。

$$\mathcal{B}(G/P, L_\lambda) = \{ f \in \mathcal{B}(G) \mid (\forall x \in G)(\forall m \in M)(\forall a \in A)(\forall n \in N)[\, f(xman) = a^{\lambda-\rho} f(x) \,] \}$$

さらに $1 \leq j \leq m$ として. 次のようにおく。

$$\mathcal{B}^j(G/P, L_\lambda) = \{ f \in \mathcal{B}(G/P, L_\lambda) \mid \operatorname{supp} f \subseteq \tilde{\mathcal{O}}_j \}$$

またさらに $\delta \in \hat{H}(K^d)$ としたとき. 次のようにおく。

$$\mathcal{B}_\delta^j(G/P, L_\lambda) = \{ f \in \mathcal{B}^j(G/P, L_\lambda) \mid f \text{ は } H \text{ の作用のもとで } \delta^{\oplus n} \text{ (} n \text{ は非負整数) に従う} \}$$

$$\mathcal{B}_H^j(G/P, L_\lambda) = \bigoplus_{\delta \in \hat{H}(K^d)} \mathcal{B}_\delta^j(G/P, L_\lambda)$$

すると次のような結果が知られている。

<u>Theorem</u> (Matsuki Oshima [2])

1° $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ が $(\forall \alpha \in \Sigma^{+})$ [$\mathrm{Re}\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$] をみたすとすれば、次のような $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-isomorphism が存在する。

$$\bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{B}_{H}^{j}(G/P, L_\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{K^d}(G^d/H^d, \mathcal{M}_\lambda) \cap L^2(G^d/H^d)$$

2° $\mathcal{B}_{H}^{j}(G/H, L_\lambda) \neq \{0\}$ なら、これは有限個の既約 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module の直和になる。

3° λ が十分 regular なら (i.e. $\langle \lambda, \alpha \rangle \gg 0$ for all $\alpha \in \Sigma^{+}$)

$\mathcal{B}_{H}^{j}(G/H, L_\lambda)$ は既約である。

4° $\mathcal{B}_{H}^{j}(G/H, L_\lambda) \neq \{0\}$ なら次の①,②が成り立つ。

① μ_λ^j は $\mathfrak{L}$ の生成する $\mathbb{Q}$ 上の Lattice に含まれる。

② $\alpha \in \Sigma^{+}$ が Σ の simple root で $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{f}$ をみたすならば、

$$\langle \lambda^{j} - \rho^{j}, \alpha^{j} \rangle \geq 0$$

§2 hyperfunction の拡張

まず次のように定める。

$$G' = \bar{N}MAN \quad , \quad H' = \bar{N}'MAN'$$

すると、G' (resp. H') は G (resp H) の open dense subset である。

次に (τ_ν, V_ν) によって、$\nu \in \mathfrak{L}$ で $-\nu$ が lowest weight になっているような H の有限次元既約表現を表わすことにする。また同じ記号で対応する $\mathfrak{f}_{\mathbb{C}}$ の表現も表わす。

さらに $v_\nu \in V_\nu$ をある non-trivial な $\mathfrak{m}'\oplus\bar{\mathfrak{n}}'$-fixed vector つまり，$H\in\mathfrak{a}$ に対して $\tau_\nu(H)v_\nu = -\nu(H)v_\nu$ となる lowest weight vector とする。ここで Lie algebra $\mathfrak{s}$ に対して，$U(\mathfrak{s})$ でその複素化の universal enveloping algebra を表わすことにして，次のようにおく．

$$\mathcal{B}^\delta_{\mathfrak{l}}(G/P, L_\lambda) = \{ f\in \mathcal{B}^\delta(G/P, L_\lambda) \mid \dim U(\mathfrak{l})f<\infty\}$$

また $\nu\in\mathcal{L}$ に対して次のように定める。

$$\mathcal{B}^\delta_\nu(G/P, L_\lambda) = \{ f\in \mathcal{B}^\delta_{\mathfrak{l}}(G/P, L_\lambda) \mid U(\mathfrak{l})f \simeq V_\nu\}$$

ここで $U(\mathfrak{l})f$ と V_ν の間の同型は $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$-module としてのものである。

次に，以下のように定義する。

$$\Upsilon^\delta(G', L_\lambda) = \{ f\in\mathcal{B}(G') \mid (\forall g\in G')(\forall m\in M)(\forall a\in A)(\forall n\in N)[f(gman)=f(g)a^{\lambda-\rho}] \wedge \operatorname{supp} f\subseteq \tilde{\mathcal{O}}_\delta\cap G' \}$$

$$\Upsilon^\delta_\nu(G', L_\lambda) = \{ f\in\Upsilon^\delta(G', L_\lambda) \mid U(\mathfrak{l})f\simeq V_\nu\}$$

G' は G において open だから，制限によって，

$$p:\mathcal{B}^\delta(G/P, L_\lambda)\longrightarrow \Upsilon^\delta(G', L_\lambda)$$

なる map が定義できる。これは $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-homomorphism になる。

すると次のような結果が成り立つ。

<u>Proposition 2.1</u>　$\nu\in\mathcal{L}$ かつ $1\leq\delta\leq m$ とすると，次が成り立つ。

1°. $p|_{\mathcal{B}^{\delta}_{\emptyset}(G/P,\,L_\lambda)}$ は one-to-one

2°. $\tilde{p}_\nu = p|_{\mathcal{B}^{\delta}_{\nu}(G/P,\,L_\lambda)}$ とおくと.

$$\tilde{p}_\nu : \mathcal{B}^{\delta}_{\nu}(G/P,\,L_\lambda) \xrightarrow{\sim} \Upsilon^{\delta}_{\nu}(G',\,L_\lambda)$$

は. 1対1. onto になる。

☆ このPropositionの証明には次のLemmaを使う。

Lemma 2.2 XをC^ω-manifold. $\tilde{G}$をXに実解析的に作用するLie groupとする。$\tilde{\mathfrak{g}}$を$\tilde{G}$のLie algebraとし. $\tilde{\mathcal{O}}$を$\tilde{G}$のある closed orbitとする。ここで. $u \in \mathcal{B}(X)$が. $\operatorname{supp} u \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$ かつ $\dim U(\tilde{\mathfrak{g}})u < \infty$ をみたし. PがX上のC^ω-係数微分作用素ならば、

$$\operatorname{supp} Pu \subsetneq \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow Pu = 0$$

☆ Proposition 2.1 により. われわれは G'上の hyperfunction について考えればよいことがわかる。特に $\Upsilon^{\delta}(G',L_\lambda)$ の元は. $\overline{N}$上で考えれば十分であり. $\overline{N}$の適当な globalな座標によって具体的に書き下せることが期待される。

§3 Some Techenical Lemma

$\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{m}' + \mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{n}}' \subseteq \mathfrak{g}$ とおく。これは $\mathfrak{g}$の minimal parabolic subalgebra である。

Lemma 3.1 non-trivial $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module W が、次の①〜④をみたすような元 $v \in W$ を含むとする。

① $U(\mathfrak{g}) \cdot v = W$

② $(\forall X \in \mathfrak{m}' + \bar{\mathfrak{m}}')\ [\ X \cdot v = 0\ ]$

③ $(\exists \nu \in \mathcal{L})(\forall H \in \mathfrak{a})[\ H \cdot v = -\nu(H) v\ ]$

④ すべての simple root $\alpha \in \Sigma'^{+}$ に対して、

$$\dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}_{2\alpha} + \mathfrak{g}_{\alpha}) \cdot v < \infty$$

この時、Wは、non-trivial $\mathfrak{l}$-fixed vector をもつ有限次元既約 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module になる。つまり W は V_ν と、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module として同型になり、この同型によって、v は v_ν の scaler 倍に対応する。

☆ この Lemma によって $v \in \mathcal{Y}^{\delta}(G', L_\lambda)$ が $\mathcal{Y}^{\delta}_{\nu}(G', L_\lambda)$ に入るかどうかをたしかめることができる。

§4 The case of $SO_0(m+2, n)/SO(2) \times SO_0(m, n)$ $(m \geq 3)$

この場合

$$G^d/H^a = SO_0(m+2, n)/SO(2) \times SO_0(m, n)$$

に対して、

$$G/H = SO_0(n+m, 2)/SO(n) \times SO_0(m, 2)$$

となる。

ここで Lie algebra を行列によって以下のように表わす。

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\qquad}^{m+n}\ \overbrace{\quad}^{2} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline {}^tB & A_2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, m+n \\ \}\, 2 \end{array} \end{array} \in M(m+n+2, \mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{c} {}^tA_i = -A_i \\ (i=1,2) \end{array} \right\}$$

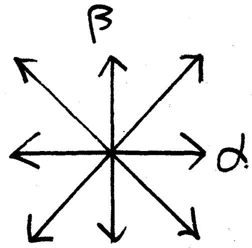
$$\mathfrak{f} = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\ }^{n}\ \overbrace{\ }^{m}\ \overbrace{\ }^{2} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & O & O \\ \hline O & A_2 & B \\ \hline O & {}^tB & A_3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, m \\ \}\, 2 \end{array} \end{array} \in M(m+n+2, \mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{c} {}^tA_i = -A_i \\ (i=1,2,3) \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{a} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} & t_1 \\ t_2 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & t_2 \\ t_1 & \end{matrix} & \end{array}\right) \in M(m+n+2, \mathbb{R}) \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{array}{c} \qquad\overbrace{\ }^{2}\ \overbrace{\ }^{2} \\ \left(\begin{array}{c:c|c} S & & \\ \hdashline & \begin{matrix} \varepsilon & \\ & \varepsilon \end{matrix} & \\ \hline & & \begin{matrix} \varepsilon & \\ & \varepsilon \end{matrix} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \}\, 2 \\ \}\, 2 \end{array} \end{array} \in Gl(m+n+2, \mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{c} S \in SO(m+n-2) \\ \varepsilon = \pm 1 \end{array} \right\}$$

ここで. $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ を次のように定める。

$$\left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} & t_1 \\ t_2 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & t_2 \\ t_1 & \end{matrix} & \end{array}\right) \xmapsto{\alpha} t_1 \quad , \quad \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} & t_1 \\ t_2 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & t_2 \\ t_1 & \end{matrix} & \end{array}\right) \xmapsto{\beta} t_2$$



すると. $\Sigma = \{\pm\alpha \pm \beta\}$ である。

ここで $\Sigma^+ = \{\alpha, \beta, \beta-\alpha, \alpha+\beta\}$ と.

おいて. 次のように定める。

$$\overline{N}^{(i)}_{-\alpha} = \left(\begin{array}{c|cc|cc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \hline 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array}\right)(i \qquad \overline{N}^{(i)}_{\beta} = \left(\begin{array}{c|cc|cc} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ -1 & & & & \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array}\right)(i$$

$$\overline{N}_{-\alpha-\beta} = \left(\begin{array}{c|cc|cc} & & & & \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad \overline{N}_{\alpha-\beta} = \left(\begin{array}{c|cc|cc} & & & & \\ \hline & 0 & -1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & -1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

すると、

$$\mathfrak{g}_{-\alpha} = \sum_{i=1}^{n+m-2} \mathbb{R}\,\overline{N}^{(i)}_{-\alpha}, \quad \mathfrak{g}_{-\beta} = \sum_{i=1}^{n+m-2} \mathbb{R}\,\overline{N}^{(i)}_{-\beta}$$

$$\mathfrak{g}_{-\alpha-\beta} = \mathbb{R}\overline{N}_{-\alpha-\beta}, \quad \mathfrak{g}_{\alpha-\beta} = \mathbb{R}\overline{N}_{\alpha-\beta}$$

となる。また

$$\rho = \frac{n+m-2}{2}\alpha + \frac{n+m}{2}\beta, \quad \rho_c = \frac{m-2}{2}\alpha + \frac{m}{2}\beta$$

$$\mathcal{L} = \{\, l\alpha + k\beta \mid l = 0,1,2,\cdots,\ k-l = 0,2,4\cdots \,\}$$

となる。またこの場合 G/P の closed orbit はただ1つであり $x_1 =$ identity element ととれる。

ここで $\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_{n+m-2}) \in \mathbb{R}^{n+m-2}$, $\eta = (\eta_1,\cdots,\eta_{n+m-2}) \in \mathbb{R}^{n+m-2}$, $z, u \in \mathbb{R}$ に対して、次のように $\overline{N}$ の第1種標準座標系を定める。

$$\overline{N}(\xi,\eta,z,u) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n+m-2}\big(\xi_i \overline{N}^{(i)}_{-\alpha} + \eta_i \overline{N}^{(i)}_{-\beta}\big) + z\overline{N}_{\alpha-\beta} + u\overline{N}_{-\alpha-\beta}\Big)$$

次に A の global coordinate を以下のように定める。

$t_1, t_2 > 0$ に対し、$\theta_i = \log t_i$ とおき、

$$A(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & \mathrm{ch}\,\theta_1 & & & \mathrm{sh}\,\theta_1 \\ & & \mathrm{ch}\,\theta_2 & \mathrm{sh}\,\theta_2 & \\ & & \mathrm{sh}\,\theta_2 & \mathrm{ch}\,\theta_2 & \\ & \mathrm{sh}\,\theta_1 & & & \mathrm{ch}\,\theta_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \}\,2 \\ \\ \}\,2 \\ \end{matrix}$$

とする。

ここで、ch, sh はそれぞれ hyperbolic cosine, sine である

ここで. $h > l > 0$ なる自然数 h, l に対して.

$$F_{l,h} \in \Upsilon^1(G', L_{l\alpha+h\beta})$$

を. 次によって定める。 (δ は delta function)

$$F_{l,h}(\bar{N}(0,\eta,z,u)\bar{N}(\xi,0,0,0)\, m A(t_1,t_2)\, n)$$
$$= \delta(\xi_1)\cdots\delta(\xi_n)\delta(\eta_1)\cdots\delta(\eta_n)\, t_1^{l-\frac{n+m-2}{2}}\, t_2^{h-\frac{n+m}{2}}$$
$$(m \in M,\ n \in N)$$

ここで $\bar{N}(0,\eta,z,u)\bar{N}(\xi,0,0,0)$ は $\bar{N}$ の global coordinate を与えている。

次に Ψ を. 定係数微分作用素

$$P = \sum_{p,q} C_{p,q} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^{p_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^{p_n}\left(\frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)^{q_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial \eta_n}\right)^{q_n}$$
$$(C_{p,q} \in \mathbb{C},\ p = (p_1\cdots p_n)\ q = (q_1\cdots q_n))$$

で次の $1^\circ \sim 5^\circ$ をみたすもの全体のつくる集合とする。

1° $(\exists p_\xi, p_\eta \in \{0,1,2\cdots\})$
$$[C_{p,q} \neq 0 \to p_1+\cdots+p_n = p_\xi,\ q_1+\cdots+q_n = p_\eta]$$

2° $A \in O(n)$ に対して. P は座標変換
$$(\xi_1\cdots\xi_n, \eta_1\cdots\eta_n) \mapsto ((\xi_1\cdots\xi_n)A, (\eta_1\cdots\eta_n)A)$$
に対して不変

3° $l + \frac{n-m+2}{2} + p_\xi \in \{0,1,2,\cdots\}$

4° $h - l - 1 + q_\xi - p_\xi \in \{0,2,4,\cdots\}$

5° $$(2z)^{k-\ell-1}\sum_{p,q} c_{p,q}\prod_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k_i=0}^{p_i}\sum_{r_i=0}^{q_i+k_i}\binom{p_i}{k_i}\binom{q_i+k_i}{r_i}\times(-)^{k_i+r_i+q_i}\,\delta^{(p_i-k_i+r_i)}(\eta_i)\,\delta^{(q_i+k_i-r_i)}(\xi_i)\,(2z)^{r_i-k_i}\Big]$$

は. z に関して多項式になる。

☆この場合についての結果は次のようになる。

Theorem　$k>\ell>0$ かつ $\mu_{\ell\alpha+k\beta}\in\mathcal{L}$
　$\left(\Longleftrightarrow \ell+\frac{n+m+2}{2}\in\mathbb{Z}\ \wedge\ k-\ell-1\in 2\mathbb{Z}\right)$　とする。

このとき. $\Upsilon^1(G/L_{\ell\alpha+k\beta})$ の spherical K^d-type の lowest weight vectors の全体は.

$$\{P\cdot F_{\ell,k}\mid P\in\Psi\}$$

に一致する。　さらに $P\in\Psi$ に対して

$$PF_{\ell,k}\in\Upsilon^1_{\left(\ell+\frac{n+m+2}{2}+p_\xi\right)\alpha+\left(k+\frac{n-m}{2}+q_\xi\right)\beta}(G/L_\lambda)$$

となる。

☆ Proposition 2.1 によって. $PF_{\ell,k}$ は. $\mathcal{B}^1_H(G/P, L_\lambda)$ の spherical K^d-type の lowest weight vector に対応している。

☆ $n=1$ のとき. つまり

$$G^d/H^d = SO_0(m+2,1)/SO(2)\times SO_0(m,1)$$

のときは.

$$\Psi=\left\{c\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)^q \;\middle|\; \begin{array}{l} c\in\mathbb{C},\ k-\ell-1\geq p\geq -\ell-\frac{n-m+2}{2}\\ p+q:\text{even}\end{array}\right\}$$

となる。

☆ $\Delta_\eta = \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial \eta_n}\right)^2$ と定めると、$\Psi \cdot \Delta_\eta \subseteq \Psi$

☆ もし、$\mathbf{1} \in \Psi$ なら、$\mathcal{V}(g) F_{e,n}$ は、Flensted-Jensen が [1] で構成した表現になる。

- Acknowlegements -

この場を借りて、いろいろ重要な助言をいただいた大島・松木両先生に感謝の意を表させていただきます。

References

[1] M. Flensted-Jensen : Discrete series for semisimple symmetric spaces. Ann of Math 111 (1980) 253-311

[2] T. Oshima and T. Matsuki : A complete description of discrete series for semisimple symmetric spaces (1983) preprint