

Title	GAUSSIAN MEASURES AND OPERATORS ON HILBELT[HILBERT] SPACES
Author(s)	明石, 重男
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 504: 183-190
Issue Date	1983-10
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/103709">http://hdl.handle.net/2433/103709</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

GAUSSIAN MEASURES AND OPERATORS ON HILBERT SPACES

東工大 理 明石重男 (Shigeo Akashi)

§ 1. 緒論

このノートでは、信号解析を函数解析の分野で議論することも目的とする。ここで扱う信号は実数の閉区間  $[a, b]$  を信号の測定時間間隔とし、この上で有限のエネルギーを持つ信号全体のなす集団を議論の対象とする。すなわち、数学的には区間  $[a, b]$  上で2乗可積分な Lebesgue 可測関数の全体のなす Hilbert 空間が、我々の議論の対象となる。信号の工学的論議を目的とする訳ではないので、直ちに数学的な信号解析に入ることにする。信号解析固有の用語などは既知として話しを進めたい。(例えば、文献 [1~3, 7] などを参照されたい。)

## § 2. 本論

いま,  $\mathcal{H} \triangleq L^2[a, b]$  として, 入力信号空間  $\mathcal{H}$  から出力信号空間  $\mathcal{H}$  への信号の伝送が, 恒等作用素  $I$  によって成される場合を考える. しかし,  $a \in \mathcal{H}$  を入力した時, 出力側では受信信号が  $Ia = a$  として受け取られることは少なく, 一般に雑音  $x \in \mathcal{H}$  が加わり,  $a+x$  として受信される. ここで我々は,  $x$  の分布が  $\mathcal{H}$  上の確率測度  $\mu$  によって決定される場合を取り扱う. この時, 次の問題を考える. Hilbert空間  $\mathcal{H}$  の状態ベクトルの集合を  $S(\mathcal{H}) \triangleq \{\varphi \in \mathcal{H} : \|\varphi\| = 1\}$  とする. いま,  $\varphi \in S(\mathcal{H})$  を 1 つ固定する. 信号を入力する側は,  $\mathbb{C}\varphi \triangleq \{c\varphi : c \in \mathbb{C}\}$  の中から信号を選んで送ることとする. 入力された信号が  $c\varphi$  がある時, 出力信号には雑音  $x$  が加わり  $c\varphi + x$  となる. ここで信号を受信する側は, 出力信号  $c\varphi + x$  の  $\varphi$  方向への射影成分を入力信号と解釈するものとする. すなわち,

$$\begin{array}{ll}
 c\varphi \text{-----} & \text{入力信号} & c\varphi + x \text{-----} & \text{出力信号} \\
 c\varphi + \langle \varphi \otimes \varphi \rangle x \text{-----} & & & \text{受信側が入力された} \\
 & & & \text{信号} \\
 & & & \text{!!} \\
 c\varphi + \langle x, \varphi \rangle \varphi & & & \text{判断する信号}
 \end{array}$$

のようになる. 以上が, 状態ベクトル  $\varphi$  を用いた場合の, 信号のシンプルな伝送システムであるが, この伝送方法は,  $S(\mathcal{H})$  からの  $\varphi$  の選び方に依りて定まるものである. 従って, ここ

では、雑音による影響を受け易い伝送システムを与える  $\varphi$ 、影響を受けにくい伝送システムを与える  $\varphi$  は、どのようなものかについて調べてみる。但し、ここで伝送システムが、雑音による影響を受け易い場合とは、 $|\langle x, \varphi \rangle|$  の値を大きくする  $x$  が高頻度に出る場合も、受けにくい場合とは、 $|\langle x, \varphi \rangle|$  の値を小さくする様な  $x$  しか出現しない場合をいう。

この問題に対して、次の様に考えることができる。まず  $R$  を、 $\mathcal{H}$  上の作用素で、 $R^* = R \geq 0$ 、 $\overline{\text{range}[R]} = \mathcal{H}$  を満たすものとする。  $S(\mathcal{H})$  から  $\varphi$  を 1 個取り出して固定する。この時、 $\mathcal{H}$  上の確率測度  $\mu$  の  $\varphi$  方向への射影を

$$\mu_\varphi(C) \triangleq \mu\{\psi \in \mathcal{H} : \langle \psi, \varphi \rangle \in C\}$$

(但し、 $C$  は  $\mathbb{R}$  の Borel 集合) で定める。これは雑音の  $\varphi$  方向への分布を表わしていると解釈できる。なお我々が取り扱う確率測度  $\mu$  は、次の条件 (1) ~ (4) を満足するとする：

$$(1) \int_{\mathcal{H}} \|x\|^2 \mu(dx) < \infty$$

$$(2) \mu_\varphi \ll m_0, \quad m_0 \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上の Lebesgue 測度}$$

$$(3) d\mu_\varphi / dm_0 \in L^2(\mathbb{R})$$

$$(4) \mu \text{ の共分散作用素} = R$$

条件 (2) は  $m_0$  に依存し、(4) は作用素  $R$  に依存するので、

(1) ~ (4) を満たす  $\mathcal{H}$  上の確率測度の全体を  $\mathcal{P}(\mathcal{H}, m_0, R)$

が表わす。そして状態ベクトル  $\varphi$  を用いた場合の伝送システムに対する雑音の影響を、 $M_\varphi$  の微分エントロピーを用いて、

$$S(M_\varphi) \triangleq \int_{\mathbb{R}} - \frac{dM_\varphi}{dm_0} \log \frac{dM_\varphi}{dm_0} dm_0.$$

で評価することにする。以下、我々は次の命題を示す。

命題.  $S(\mathcal{H})$  から  $\varphi$  を一つ取り出し固定する。この時、

$$\begin{aligned} N_\varphi &\triangleq \sup \{ S(M_\varphi) : \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{H}, m_0, R) \} \\ &= \frac{1}{2} \log \{ (2\pi e) \langle R\varphi, \varphi \rangle \} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、共分散作用素  $R$  のスペクトル分解を

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \otimes e_k, \quad 0 < \lambda_k \downarrow 0, \quad \{e_k\}: \mathcal{H} \text{ の基底}$$

と表わした時、数列  $\{\lambda_k\}$  は単調減少となる。

以下、準備として補題も述べる。

補題1.  $\mu$  を  $\mathbb{R}$  上の確率測度で、 $\mu \ll m_0$ , 平均 = 0, 分散 =  $\sigma^2$ , かつ  $d\mu/dm_0 \in L^2(\mathbb{R})$  を満たすものとする。この時、常に次の不等式が成立する:

$$S(\mu) = \int_{\mathbb{R}} - \frac{d\mu}{dm_0} \log \frac{d\mu}{dm_0} dm_0 \leq \frac{1}{2} \log (2\pi e \sigma^2)$$

なお、等号を成立させる確率測度  $\mu$  は、平均 = 0, 分散 =  $\sigma^2$  である Gauss 測度であり、かつそれに限られる。つまり、

$$\frac{d\mu_G}{d\mu_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\}$$

を満たす  $\mu_G$ 。

証明.  $\mu, \nu$  を 2 つの確率測度とした時、

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{d\mu_0} \log \frac{d\mu}{d\mu_0} d\mu_0 \geq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{d\mu_0} \log \frac{d\nu}{d\mu_0} d\mu_0$$

が成り立ち、等号が成立するのは  $\mu = \nu$  の場合に限られることを用いる。

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} -\frac{d\mu}{d\mu_0} \log \frac{d\mu}{d\mu_0} d\mu_0 &\leq \int_{\mathbb{R}} -\frac{d\mu}{d\mu_0} \log \frac{d\mu_G}{d\mu_0} d\mu_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}} -\frac{d\mu}{d\mu_0} \left\{ -\frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{t^2}{\sigma^2} \right\} d\mu_0 \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) + \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{2\sigma^2} \frac{d\mu}{d\mu_0} d\mu_0 \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi e\sigma^2) \end{aligned}$$

補題 2. 状態ベクトル  $\varphi \in S(\mathcal{H})$  と確率測度

$\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{H}, m_0, R)$  を与えられたとする。この時、次のことがいえる：

$\mu$  の  $\varphi$  方向への射影  $\mu_\varphi$  の平均 = 0, 分散 =  $\langle \varphi, R\varphi \rangle$

証明.  $\mu_\varphi$  の平均は,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} t \mu_\varphi(dt) &= \int_{\mathbb{R}} \langle t\varphi, \varphi \rangle \mu_\varphi(dt) = \int_{\mathbb{R}} \langle t\varphi, \varphi \rangle \mu((dt)\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}\varphi} \langle x, \varphi \rangle \mu(dx) = \int_{\mathcal{H}} \langle x, \varphi \rangle \mu(dx) = 0 \end{aligned}$$

$\mu_\varphi$  の分散は,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} t^2 \mu_\varphi(dt) &= \int_{\mathbb{R}} \langle \varphi, t\varphi \rangle \langle \varphi, t\varphi \rangle \mu_\varphi(dt) = \int_{\mathbb{R}} \langle \varphi, t\varphi \rangle^2 \mu((dt)\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}\varphi} \langle \varphi, x \rangle \langle \varphi, x \rangle \mu(dx) = \int_{\mathcal{H}} \langle \varphi, x \rangle^2 \mu(dx) \\ &= \langle \varphi, R\varphi \rangle \end{aligned}$$

以上の補題をもとに命題の証明を行なう。

命題の証明. いま, 平均ベクトル = 0, 共分散作用素 =  $R$  をもつ  $\mathcal{H}$  上の Gauss 測度を  $\mu_G$  とする。この時, 明らかに,  $\mu_G \in \mathcal{P}(\mathcal{H}, m_0, R)$ , また,  $\mu_G$  の  $\varphi$  方向への射影

$(M_G)_\varphi$  は、平均 = 0, 分散 =  $\langle \varphi, R\varphi \rangle$  を持つ  $\mathbb{R}$  上の Gauss 測度であるから、補題 1 より、

$$S(M_\varphi) \leq S(\{M_G\}_\varphi) = \frac{1}{2} \log(2\pi e \langle \varphi, R\varphi \rangle^2)$$

が成り立つことがわかる。上述の式に共分散作用素  $R$  のスペクトル分解の式を代入すると、

$$S(M_\varphi) = \frac{1}{2} \log(2\pi e \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle \varphi, e_k \rangle^2)$$

故に、 $\varphi = e_k$  とすると上の式より、 $N_{e_k} = \frac{1}{2} \log(2\pi e \lambda_k)$  となり、 $\{N_{e_k}\}$  は単調減少数列である。



## References

- [ 1 ] Baker, C. R., Joint measures and cross-covariance operators, Trans. Amer. Math. Soc. 186(1973), 273-289.
- [ 2 ] Baker, C. R., Calculation of the Shannon information, J. Math. Anal. Appl. 69(1979), 115-123.
- [ 3 ] Kuo, Hui-Hsing, Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Math. 463(1975), Springer-Verlag.
- [ 4 ] Schatten, R., Norm ideals of completely continuous operators, Springer-Verlag, 1970.
- [ 5 ] Shannon, C. E., A mathematical theory of communication, Bell System Tech. J. 27(1948), 379-423 and 623-656.
- [ 6 ] Umegaki, H., Absolute continuity of information channels, J. Math. Anal. Appl. 88(1982) 364-377.
- [ 7 ] 梅垣壽春, 大矢雅則; 量子論的イントロピー, 情報理論の函数解析的基礎II, 共立出版, (近刊).