

Title	情報伝送についての関数解析的一考察(応用函数解析の研究)
Author(s)	渡辺, 昇
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 504: 157-164
Issue Date	1983-10
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/103712">http://hdl.handle.net/2433/103712</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

情報伝送についての関数解析的—考察

東理大 理工 渡辺 昇 ( Noboru Watanabe )

Introduction

Hilbert 空間上の Gauss 測度の研究と、それを通信理論に適用する試みは Rao-Varadarajan (6), Baker (1, 2), Ihara (4), Yanagi (8) 等によってなされており、特に Baker (2) は Skorohod (7) や Rao-Varadarajan らの計算を通し、Gelfand-Yagrom (3) の仕事をもとに、入力を Gauss 測度とし、通信路の雑音を Gauss 測度とする通信路 (Gauss 型通信路) において、相互情報量を定義した。ここでは、この相互情報量が、通常の通信工学的に用いられている微分エントロピーの計算と相いれないことを簡単に述べる。

§1 Hilbert 空間上の Gauss 測度の定義

$\mathcal{H}$  を実可分な Hilbert 空間とし、 $\mathcal{B}$  を  $\mathcal{H}$  の Borel  $\sigma$ -field とする。  $\mu$  を、次を満たす  $\mathcal{H}$  上の Borel 確率測度とする。  
任意の  $x \in \mathcal{H}$  に対して、

$$\int_{\mathcal{H}} \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$$

次に、 $\mathcal{H}$  の平均ベクトル  $m_\mu$  と、 $\mathcal{H}$  上の共分散作用素  $R_\mu$  を定義する。任意

の  $\Phi_1, \Phi_2, \Psi \in \mathcal{H}$  に対して、

$$\langle \Phi_1, m_\mu \rangle = \int_{\mathcal{H}} \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \mu(d\Phi_2)$$

$$\langle \Phi_1, R_\mu \Phi_2 \rangle = \int_{\mathcal{H}} \langle \Phi_1, \Psi - m_\mu \rangle \langle \Phi_2, \Psi - m_\mu \rangle \mu(d\Psi)$$

$\mu$  の特性関数  $\hat{\mu}$  は、任意の  $\Phi \in \mathcal{H}$  に対して、

$$\hat{\mu}(\Phi) = \int_{\mathcal{H}} e^{i\langle \Phi, \Psi \rangle} \mu(d\Psi), \Psi \in \mathcal{H}$$

と与えられる。 $\mu$  が  $\mathcal{H}$  上の Gauss 測度であるとは、次の条件を満たす  $\mathcal{H}$  上の Borel 測度である。各々  $\Phi \in \mathcal{H}$  に対して、次の式を満たす実数  $m_\Phi$ ,

$\theta_\Phi$  が存在する。

$$\mu\{\Psi \in \mathcal{H}; \langle \Psi, \Phi \rangle \leq a\} = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_\Phi}} e^{-\frac{(t-m_\Phi)^2}{2\theta_\Phi}} dt$$

このとき、(5)の結果から、平均ベクトルが 0 の Gauss 測度  $\mu$  と  $\mu$  の共分散作用素は、1対1に対応していることがわかる。以下、平均ベクトルが  $m$ 、共分散作用素が  $R$  の Gauss 測度  $\nu$  を、 $\nu = (m, R)$  と書くことにする。 $\mu_1 = (0, \sigma_1)$ ,  $\mu_2 = (0, \sigma_2)$  を2つの Gauss 測度とすると、 $\mu_1 \sim \mu_2$  又は  $\mu_1 \perp \mu_2$  となっている。また、 $\mu_2 \ll \mu_1$  ならば、

$$I(\mu_1 | \mu_2)$$

$$= \int_{\mathcal{H}} \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\Phi) \log \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\Phi) d\mu_1(\Phi)$$

$\mu_2 \ll \mu_1$  ならば,  $I(\mu_1 | \mu_2) = \infty$  である。

## §2 Gauss 型通信路

$(\mathcal{H}_1, \mathcal{B}_1)$  を入力空間,  $(\mathcal{H}_2, \mathcal{B}_2)$  を出力空間とする。ここで変換  $\lambda$  :

$\mathcal{H}_1 \times \mathcal{B}_2 \rightarrow (0, 1)$  が Gauss 型通信路であるとは

(1) 任意の  $x \in \mathcal{H}_1$  に対して,  $\lambda(x, \cdot)$  は  $\mathcal{H}_2$  上の Gauss 確率測度;

(2) 任意の  $Q \in \mathcal{B}_2$  に対して,  $\lambda(\cdot, Q)$  は  $(\mathcal{H}_1, \mathcal{B}_1)$  上の可測関数。

$\mu_1$  を入力の Gauss 確率測度とし,  $\mu_0$  を通信路の雑音を表わす Gauss 測度とすると, 出力の Gauss 確率測度  $\mu_2$  は, 通信路  $\lambda$  を用いて次のよ

うに表わせる。任意の  $Q \in \mathcal{B}_2$  に対して,

$$\mu_2(Q) = \int_{\mathcal{H}_1} \lambda(x, Q) \mu_1(dx)$$

ここで,  $\lambda(x, Q) \equiv \mu_0(Q^x)$  であり,

$$Q^x = \{y \in \mathcal{H}_2; Ax + y \in Q\}$$

である。  $\mu_1$  と  $\mu_2$  の合成測度  $\mu_{12}$  は, 任意の  $Q_1 \in \mathcal{B}_1$ , 任意の  $Q_2 \in \mathcal{B}_2$  に

対して,

$$\mu_{12}(Q_1 \times Q_2) = \int_{Q_1} \lambda(x, Q_2) \mu(dx)$$

と書ける。

<考察1> 簡単のために  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{R}^2$  とする。  $\mu_1$  と  $\mu_0$  を次のように定める。 任意の  $x \in \mathcal{H}_1$  に対して、

$$\begin{aligned} & \mu_1 \{x_i \in \mathcal{H}_1; \langle x_i, x \rangle \leq a\} \\ &= \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_{1ii}}} e^{-\frac{t^2}{2\theta_{1ii}}} dt \end{aligned}$$

任意の  $y \in \mathcal{H}_2$  に対して、

$$\begin{aligned} & \mu_0 \{y_j \in \mathcal{H}_2; \langle y_j, y \rangle \leq b\} \\ &= \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_{2jj}}} e^{-\frac{\tau^2}{2\theta_{2jj}}} d\tau \end{aligned}$$

ここで、 $\theta_{1ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ 、 $\theta_{2ij} = \beta_j \delta_{ij}$  とする。  $\mu_1$  の共分散作用素  $\rho_1$  と  $\mu_0$  の共分散作用素  $\rho_0$  は、

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

となる。 更に、 $\mathcal{H}_1$  から  $\mathcal{H}_2$  への線形変換  $A$  を次のように定める。

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi e \beta_1}{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\pi e \beta_2}{\lambda_2}} \end{pmatrix}$$

これらの仮定より、出力測度  $\mu_2$  の共分散作用素  $\rho_2$  は、

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} (\pi e + 1) \beta_1 & 0 \\ 0 & (\pi e + 1) \beta_2 \end{pmatrix}$$

となる。 (1) の定理 2 (B) より  $R_{12} = \rho_1^{1/2} V \rho_2^{1/2}$  と置くと、

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi e}{\pi e + 1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\pi e}{\pi e + 1}} \end{pmatrix}$$

を得る。更に、(2)の命題2より、

$$I(\mu_{12} | \mu_1 \otimes \mu_2) = \log(\pi e + 1)$$

となる。ところで、Gauss 型入力の情報量として、通常の通信工学において、

よく用いられている微分エントロピー (10) を用いてみると、

$$\begin{aligned} S(\mu_1) &= - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mu_1}{dm} \log \frac{d\mu_1}{dm} dm \\ &= \log(2\pi e) \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \\ &\leq \log(\pi e) \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

ここで、 $m$  は  $\mathbb{R}^2$  上の Lebesgue 測度である。従って、伝送容量  $C$  は、

$$\begin{aligned} C &= \sup_{\mu_{12}} \{ I(\mu_{12} | \mu_1 \otimes \mu_2) ; \mu_{12} \sim \mu_1 \otimes \mu_2 \} \\ &\geq I(\mu_{12} | \mu_1 \otimes \mu_2) = \log(\pi e + 1) \\ &> \log(\pi e) \geq S(\mu_1) \end{aligned}$$

となり、この  $S(\mu_1)$  は Shannon の通信理論 (9) を考えた場合に、

Baker 流の伝送容量の定義と矛盾する。Gauss 型入力の情報量

$S(\mu_1)$  を

$$S(\mu_1) = \sup_{\tilde{A}} \{ - \sum_{A \in \tilde{A}_1} v_1(A) \log v_1(A) ; \tilde{A} \in \mathcal{P}(\beta_2) \}$$

とする。ここで  $\mathcal{P}(\beta_2)$  は、 $\beta_2$ -分割の全体を表わす。このように定めると、

$S(\mu_1)$  は発散してしまうことがわかる。故に、伝送容量は、 $S(\mu_1)$  より小さ

くなるが、通信工学的な情報伝送を考える場合において、入力の情報量が無限大というのは意味をもたない。

<考察2>  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  を上記と同じとする。入力の Gauss 測度  $\mu_1$  の共分散作用素  $\rho_1$  と通信路の雑音  $\mu_0$  の共分散作用素  $\rho_0$  を次のように定める。

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \rho_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

ここで、 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  とする。また、 $\mu_1 \rightarrow \mu$  への線形変換  $A$  を、

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2\beta_1}{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2\beta_2}{\lambda_2}} \end{pmatrix}$$

と取る。すると、出力の Gauss 測度  $\mu$  の共分散作用素  $\rho$  は、

$$\rho = \begin{pmatrix} 3\beta_1 & 0 \\ 0 & 3\beta_2 \end{pmatrix}$$

となり、更に  $V$  は、

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

となる。従って、 $I(\mu_{12} | \mu_1 \otimes \mu_2) = \log 3$  を得る。ところで、 $\rho_1$  は、 $\mathcal{H}_1$  の力学系の状態とみることができるので、入力の情報量として、状態  $\rho_1$  の持つ von Neumann エントロピー (11)  $S(\rho_1)$  を採用する。この値は、

$$\begin{aligned} S(\rho_1) &= -\text{tr}(\rho_1 \log \rho_1) \\ &= -\sum_{n=1}^2 \lambda_n \log \lambda_n \\ &\leq \log 2 \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

この通信路の伝送容量  $C$  は,

$$\begin{aligned} C &= \sup_{\mu} \{ I(\mu | \mu_{\Delta}) ; \mu \text{ が合成 Gauss 測度で } \mu \sim \mu_{\Delta} \} \\ &\geq I(\mu_{12} | \mu_1 \times \mu_2) = \log 3 \\ &> \log 2 \geq S(\rho_1) \end{aligned}$$

となり, Shannon の通信理論の伝送容量の定義と矛盾する。

これらの考察より, 共分散作用素を Gauss 測度で近似してやる方法は良い近似ではないことがわかり, また, Gauss 測度から Kullback-Leibler の方法で伝送容量を計算するという方法は, 工学的な通信を考えた場合に妥当でないこともわかった。詳しい考察は後の論文に書く予定である。

## 参考文献

1. C.R. Baker, Joint measures and cross-covariance operators, Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1973), 273-289.
2. \_\_\_\_\_, Capacity of the Gaussian channel without feedback, Infor. and Control 37 (1978), 70-89.
3. I.M. Gelfand and A.M. Yaglom, Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function, Uspehi Mat. Nauk 12 (1957), 3-52.
4. S. Ihara, On the capacity of the discrete time Gaussian channel with feedback, Trans. Prague Conf. Vol. C, Czechoslovak Academy Sci. (1979), 175-186.
5. H.H. Kuo, Gaussian Measures in Banach Spaces, Springer, Berlin (1975).
6. C.R. Rao and V.S. Varadarajan, Discrimination of Gaussian processes, Sankhyā, Ser. A, 25 (1963), 303-330.
7. A.V. Skorohod, Integration in Hilbert Space, Springer-Verlag Berlin, New York, (1974).



8. K. Yanagi, On some properties of Gaussian channels, J. Math. Anal. Appl. 88 (1982), 364-377.
9. 国沢清典, 情報理論I, 共立出版(情報科学講座), (1983).
10. 梅垣寿春・大矢雅則, 確率論的エントロピー, 共立出版(情報科学講座), (1983).
11. 梅垣寿春・大矢雅則, 量子論的エントロピー, 共立出版(情報科学講座), (1984).