Title	信号過程の生成するvon Neumann代数(応用函数解析の研究)
Author(s)	梅垣, 寿春
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 504: 132-146
Issue Date	1983-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/103714
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
504巻 1983年 132-146

信号過程の生成する von Neumann 代数

東工大 理 梅垣 寿春 (Hisaharu Umegaki)

函数解析の或は汎く数学の手法を用いて，その周辺の領域を探索しようという考えの下で，信号という概念について論じると，どの様な数学が展開されるであろうか。

信号とは光・音・形など，或はこれらの組み合わせを用いて，意志を伝達する方法をいい，これら光・音などは一種の記号であると考え，信号はこれら記号の系列によって形成されると考えられる。 これらの系列とは，ある物理的な観測の結果（時刻に沿っての）の量的表示と考えるのが自然であり，これは通常，波形としてグラフ表示される。 一般に信号 $\xi_t = \xi(t)$ は決定的な場合とランダムな場合に大別される。つまり，$t=t_0$ における信号の表示が $\xi(t_0)$ として確定される場合と，ランダムさが伴って決定的でない場合の２者に分けられる。 前者の場合は，信号 $\xi(\cdot)$ は Hilbert 空間 $L^2(-\infty, \infty)$ とか，ある特定の確率測度空間上の L^2 や Banach 空間 $L^\infty(-\infty, \infty)$ に属する函数として，後者の場合は２次のモーメントをもつランダム信号過程として論ぜられる。 決定的な信号解析を論ずる場合は Fourier 解析的手法が大いに活用され，興味ある数学的理論が構成される。例えば Shannon の標本化定理などは，そのクライマックスと言えるものであろう。 ランダム信号の解析は確率論や pure な函数解析――数理解析と言う方がより正確か――の手法が用いられ，Mercer の定理に続いて Karhunen－Loéve 展開定理などは最も重要なものの一つで，信号解析を論ずる上で基本的

なものである。 何れの場合でも信号の理論を数理解析の分野で展開するとき，その基本的手法は L^2 という Hilbert 空間，やその上の作用素・作用素代数の理論が重要な役割を演ずることになる。

この小文においては，情報理論などで基空間として中心的に扱われるメッセイジ空間 A^Z に関する離散的ランダム信号過程の集団が Hilbert 空間をなし，そのある種の有界性を付したものの集団が，まさに von Neumann 代数を形成することを論じ，信号過程が作用素代数と係わりを持ち得ることの一つの論破を試みた。 ここにおける von Neumann 代数の構成は von Neumann 自身の original であるが，それを接合積に関する Nakamura-Takeda [4] に初まる一連の論文によって formulation が完成されたものを，ここでは基本とする。作用素代数の一般論としては接合積は既に周知のものであるが，ランダム信号過程に適応する一つの方法をこの小文で示したものである。詳しい証明は略してある。 連続的なランダム信号過程も数理解析的に，我々の手法の興味ある対象となるが，これは他の機会に譲る。

1． メッセイジ空間と情報源

この節では情報理論や信号解析に基本的な役割を果たすメッセイジ空間の数学構造の導入から初める。

有限集合 $A=\{x^1, x^2, \cdots, x^{|A|}\}$ を一つの alphabet 集合とする。 $Z=\{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ とおき A の可算無限直積集合

$$A^Z = \prod_{k=-\infty}^{\infty} A_k \ (A_k = A,\ \forall k \in Z)$$

の要素を $\Pi x_k, \Pi y_k, \Pi z_k, \cdots (x_k, y_k, z_k \in A_k = A, k \in Z)$ などで表わす。 集合 A に，従って各 A_k に，離散位相を与え，A^Z に Tychonoff 積位相を定義すると，A^Z は完全不連結なコンパクト Hausdorff 空間となる。 また，この位相と同相な距離が次の式で定義される

$$d(\Pi x_k, \Pi y_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x_k, y_k)}{2^{|k|}}, \ \forall \Pi x_k, \Pi y_k \in A^Z,$$

ただし，$\delta(x^i, y^j) = \delta_{ij}$ (Kronecker δ)。 ここで空間 A^Z 上の変換を次のように与える。

$$T: x = \Pi x_k \in A^Z \longrightarrow x' = \Pi x'_k (= Tx) \ \ A^Z,\ x'_k = x'_{k+1} (k \in Z)$$

これは A^Z 上の位相同型変換で，対 $[A^Z, T]$ は所謂 Symbolic Dynamics であり，この T をシフト変換という。

空間 A^Z 上の複素数値連続函数の全体のなす函数環を $C(A^Z)$ で表わす。これは sup-norm と *演算 $(f^* \triangleq \overline{f})$ に関して可環 C^* 代数である。また $f^T(x) = f(Tx)$ とおくと $f \longrightarrow f^T$ は $C(A^Z)$ 上の *自己同型となる。この空間 A^Z において

$$[x_i \cdots x_j] = \{\Pi y_k \in A^Z ; y_k = x_k \ (i \leqq k \leqq j)\}$$

を A^Z のメッセイジと名付くけられる。 これは A^Z の clopen な集合である。 $[x_i \cdots x_j]$ は時刻 $i \in Z$ で $x_i \in A, \cdots$，時刻 $j\ (\geqq i)$ で $x_j \in A$ という alphabet が夫々出現し，時刻 $k = i, i+1, \cdots, j$ 等でのみ alphabet が指定され，他の時刻では全 alphabet 集合

A がとられるような記号列がメッセイジ［$x_i \cdots x_j$］なのである．メッセイジの全体は A^Z の可算基であり，$C(A^Z)$ は全てのメッセイジ［$x_i \cdots x_j$］の定義函数によって生成される．このことから，情報源の構成理論から各メッセイジの数理解析は $C(A^Z)$ の要素の解析に発展する．

次に空間 A^Z 上で Borel 確率測度の全体 $P(A)$ を考える．またシフト変換 T で不変な $p \in P(A)$ の全体を $P_T(A)$ とする．またエルゴード的な p の全体を $P_e(A)$ とする．ここで $C(A^Z)$ 上の線形汎函数に関する Riesz の積分表示定理を用いると，$C(A^Z)$ 上の norm 1 な（正値）汎函数の全体の集合（これを $C(A^Z)$ の state space という）は $P(A)$ と同一視することが出来る．従って $P_T(A)$ は変換 $f \longrightarrow f^T$ によって不変な状態（T－定常状態）の全体と同一視することが出来る．$P_T(A) \neq \phi$ であることは不動点定理から直ちにいえる．さらに $P_T(A)$ は $C(A^Z)$ の dual $C(A^Z)^*$ の弱＊コンパクト凸集合であり，従って Krein－Milman の定理を用いて

$$P_e(A) = \mathrm{ex}\, P_T(A) \quad (= P_T(A) \text{ の端点の全体})$$

が成り立つことが分かる．

以上の説明では単独のシフト変換 T に関する演算のみが表面に出ているが，各 $t \in Z\ (t \geqq 0)$ に対して

$$T_0 = I,\ T_t = \underbrace{T \cdot T \cdots T}_{t\text{個}}\ (t > 0),\ T_{-t} = T_t^{-1}$$

などの記号を導入すると整数の加法群 Z に対してシフト（A^Z 上の位相自己同型）

変換の群 $\{T_t\ ;\ t\quad Z\}$ を対応さすことが出来，これがしかも同型対応をなすのである：

$$s\neq t\Longleftrightarrow T_s\neq T_t\ ;\ T_{s+t}\neq T_sT_t.$$

測度の不変性については $p\in P(A)$ が

$$p\in P_T(A)\ (\text{i.e.},\ p(T^{-1})=p(\cdot))$$
$$\Longleftrightarrow p(T_t^{-1}\cdot)=p(\cdot),\ \forall t\in Z,$$

つまり，単独のシフトによる定常性は全ての T_t $(t\in Z)$ による定常性と同等なのである。

空間 A^Z において，一つの確率測度 $\mu\in P(A)$ を設置したとき，対 $[A^Z,\mu]$ を情報源と名付けられる。 これは丁度，確率測度空間の一つである． もし $\mu\in P(A)$ が T で不変，i．e．，$\mu\in P_T(A)$，であるとき $[A^Z,\mu]$ を定常情報源，特に，μ がエルゴード的（i．e．，$\mu\in P_e(A)$）のときは，これをエルゴード情報源と名付けられる． これは情報源から信号やメッセイジがランダムに出されるときそれの空間平均（すなわち，測度 μ による積分値）と時間平均（すなわち，シフト変換 T を time t による算術平均）が常に一致することを意味する． さらに情報理論の上では具体的な種々な意味付けがなされるが，ここでは一路数学的な展開に進む．

2．ℓ^1－代数 $\ell^1(Z,A^Z)$

整数全体からなる加法群 Z 上で定義され，Banach 空間 $C(A^Z)$ に値をとる函数全体からなる，複素係数な，線形空間を $\mathcal{F}(Z,C(A^Z))$ で表わ

す。 ここで線形性（加法と複素数によるスカラー倍）は

$$(\alpha\xi+\beta\eta)(t, x)=\alpha\xi(t, x)+\beta\eta(t, x), \ \forall t\in Z, \ \forall x\in A^Z,$$

による。 さらに

$$(1) \qquad \sum_{t\in Z}\|\xi(t, \cdot)\|_\infty \ (=\|\xi\|_1 \text{とおく}) <+\infty$$

を満たす函数 $\xi \in \mathcal{F}(Z, C(A^Z))$ の全体を $\ell^1(Z, A^Z)$ で表わす。 これは $\mathcal{F}(Z, C(A^Z))$ の線形部分空間であり，ノルム $\|\cdot\|_1$ に関して Banach 空間でもある。 またこれは丁度テンソル積 Banach 空間：

$$\ell^1(Z, A^Z)=\ell^1(Z)\otimes C(A^Z)$$

でもある。 ここで（1）で定義したノルムは Schatten [6] の sense での γ-norm と一致する。 位相自己同型変換 T_t $(t\in Z)$ が A^Z 上に act していることを合せ考えることにより，Banach 空間 $\ell^1(Z, A^Z)$ 上に ＊代数構造が入る：

$$\xi^*(t, x)=\overline{\xi(-t, T_t x)}$$

$$\xi*\eta(t, x)=\sum_{s\in Z}\xi(t-s, T_s x)\eta(s, x).$$

これにより，$\ell^1(Z, A^Z)$ は Banach ＊代数となる；i. e.,

$$\|\xi^*\|_1=\|\xi\|_1, \ \|\xi*\eta\|_1\leqq\|\xi\|_1\cdot\|\eta\|_1$$

であり，

$$(\xi+\eta)^*=\xi^*+\eta^*, \ \xi*(\eta+\zeta)=\xi*\eta+\xi*\zeta$$

$$(\lambda\xi)^*=\bar{\lambda}\xi^*, \ (\xi*\eta)^*=\eta^**\xi^* \ (=\xi^**\eta^*)$$

$$\xi^{**} \ (=(\xi^*)^*)=\xi, \ (\xi*\eta)*\zeta=\xi*(\eta*\zeta).$$

また，$^\forall x\in A^Z$ で

(2) $\varepsilon_0(t, x) = 1\ (t=0),\ =0\ (t\neq 0)$

とおく． このとき $\varepsilon_0\in\ell^1(Z, A^Z)$ であり，次の定理を得る．

定理 1． $\ell^1(Z, A^Z)$ は単位元 ε_0 をもつ Banach *代数である．

3． ランダム信号過程の生成する Hilbert 空間

初めに，$[A^Z, \mu]$ を情報源，すなわち A^Z が構成され，Borel 確率測度 $\mu\in P(A)$ が設置されるとする． これに対して

$$\tilde{\mu}(\xi) = \int_{A^Z} \xi(0, x)\, d\mu(x),\ \xi\in\ell^1(Z, A^Z)$$

とおくと（以下 $\int_{A^Z}$ を単に $\int$ と記す）．

定理 2． $\tilde{\mu}$ は Banach *代数 $\ell^1(Z, A^Z)$ 上の有界線形汎函数であり，次の性質が $^\forall\xi, \eta\in\ell^1(Z, A^Z)$ に対して満たされる：

(i) $\tilde{\mu}(\varepsilon_0) = \mu(A^Z) = 1,\ \tilde{\mu}(\xi^*) = \overline{\tilde{\mu}(\xi)},\ |\tilde{\mu}(\xi)| \leqq \|\xi\|_1,$

(ii) $\tilde{\mu}(\xi^* * \eta) = \sum_{t\in Z}\int \overline{\xi(t, x)}\,\eta(t, x)\, d\mu(x),$

従って $\tilde{\mu}(\xi^* * \eta) \geqq 0$，さらに

(iii) $[A^Z, \mu]$ が定常情報源，i．e．，$\mu\in P_T(A^Z)$

$\Longleftrightarrow\ \mu(\xi * \eta) = \mu(\eta * \xi)$．

証明．（i）は明らかである．（ii）を示す：

$$\xi^{*}(-t, T_{t}x) = \overline{\xi(t, T_{-t}T_{t}x)} = \xi(t, x)$$

を用い，

$$\tilde{\mu}(\xi^{*} * \eta) = \int (\xi^{*} * \eta)(0, x)\, d\mu(x)$$

$$= \int \sum_{t} \xi^{*}(-t, T_{t}x)\, \eta(t, x)\, d\mu(x)$$

$$= \sum_{t} \int \overline{\xi(t, x)}\, \eta(t, x)\, d\mu(x),$$

この級数が絶対収束することは $\ell^{1}(Z, A^{Z})$ についての条件と $\xi, \eta \in \ell^{1}(Z, A^{Z})$ から容易である．（iii）を示そう，

（⇒）：$\mu(T_{t}^{-1}\cdot) = \mu(\cdot)$（$\forall t \in Z$）のとき

$$\mu(\xi * \eta) = \int (\xi * \eta)(0, x)\, d\mu(x)$$

$$= \int \sum \xi(-t, x)\, \eta(t, T_{-t}x)\, d\mu(x)$$

$$= \int \sum \eta(-t, T_{t}x)\, \xi(t, x)\, d\mu(x)$$

$$= \tilde{\mu}(\eta * \xi).$$

（⇐）：固定した $s \in Z$ と Borel 集合 $C \subset A^{Z}$ に対して

$$\xi_{s,C}(t, x) = 1_{C}(x)\ (t = -s \text{のとき}),\ = 0\ (t \neq -s \text{のとき})$$

とおく．このとき $s \in Z$ と，Borel 集合 $C, D \subset A^{Z}$ に対して

$$\tilde{\mu}(\xi_{s,C} * \xi_{s,D}) = \int \Sigma\, \xi_{s,C}(-t,\, T_t\, x)\, \xi_{s,D}(t,\, x)\, d\mu(x)$$

$$= \int 1_C(T_s\, x)\, 1_D(x)\, d\mu(x)$$

$$\tilde{\mu}(\xi_{s,C} * \xi_{s,D}) = \int 1_D(T_s\, x)\, 1_C(x)\, d\mu(x)$$

ここで　$D=A^Z$ とおくと

$$\mu(T_s^{-1}C) = \int 1_C(T_s\, x)\, d\mu(x) = \int 1_C(x)\, d\mu(x) = \mu(C)$$

定理２により各確率測度　$\mu \in P(A^Z)$ に対して　Banach*代数　$\ell^1(Z, A^Z)$ 上の有界線形汎函数　$\tilde{\mu}$　が対応し，$\tilde{\mu}$　が　C^* 代数における　state と同様な性質をもっている．従って　C^* 代数における　GNS（Gelfand-Năumark-Segal）construction　と全く同様な構成を行なうことによって　Hilbert　空間　$\ell^2(Z,\, A^Z,\, \mu)$ が得られる：

任意の対　$\xi,\, \eta \in \ell^1(Z,\, A^Z)$ に対して

$$\langle \xi,\, \eta \rangle \triangleq \tilde{\mu}(\xi^* * \eta)$$

$$= \sum_{t \in Z} \int \overline{\xi(t,\, x)}\, \eta(t,\, x)\, d\mu(x)$$

とおくと，$\langle \cdot,\, \cdot \rangle$　は　$\ell^1(Z,\, A^Z)$ 上に内積を与える．ただし，　$\xi = \eta$ $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ $\xi(t,\, x) = \xi(t,\, x)$，$\mu$-a.e. $x \in A^Z$ かつ　$\forall t \in Z$．　各　$\xi \in \ell^1(Z,\, A^Z)$ の　norm　は

$$\| \xi \|_2 = \sqrt{\langle \xi,\, \xi \rangle} = \left(\sum_t \int |\xi(t,\, x)|^2\, d\mu(x)\right)^{1/2}.$$

$\ell^1(Z, A^Z)$ を norm $\|\cdot\|_2$ で完備化することにより Hilbert 空間 $\ell^2(Z, A^Z\ \mu)$ を得る．これは丁度 tensor 積 Hilbert 空間と一致する：

$$\ell^2(Z, A^Z, \mu) = \ell^2(Z) \otimes L(A^Z, \mu)。$$

これはまた，情報理論的な解釈を与えれば，一つの情報源上で，エネルギー有限な信号の離散的なランダム信号過程の全体からなる Hilbert 空間と考えられる．

さらに，任意の $\xi \in \ell^1(Z, A^Z)$ と $\eta \in \ell^2(Z, A^Z, \mu)$ に対してランダム過程

$$\xi * \eta(t, x) = \sum_{s \in Z} \xi(t-s, T_s x)\, \eta(s, x), \quad \mu\text{-a.e. } x \in A^Z$$

は $\ell^2(Z, A^Z, \mu)$ の要素であり，通常の群上の調和解析と同じ不等式

$$(3)\quad \|\xi * \eta\|_2 \leqq \|\xi\|_1 \cdot \|\eta\|_2, \quad \xi \in \ell^1(Z, A^Z), \eta \in \ell^2(Z, A^Z, \mu)$$

が成立する．

以下 Hilbert 空間 $\ell^2(Z, A^Z, \mu)$ を $\mathbb{H}_\mu$ で表わそう．

4. Hilbert 空間 $\mathbb{H}_\mu = \ell^2(Z, A^Z, \mu)$ 上の作用素代数

各 $\xi \in \ell^1(Z, A^Z)$ に対して

$$L_\xi \eta \triangleq \xi * \eta, \quad \forall \eta \in \mathbb{H}_\mu$$

とおくと，(3) により

$$\|L_\xi \eta\|_2 \leqq \|\xi\|_1 \cdot \|\eta\|_2$$

であり，$L_\xi \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_\mu)$（$\mathbb{H}_\mu$ 上の有界作用素の全体）である． このとき，対応

$$\xi \in \ell^1(Z, A^Z) \longrightarrow L_\xi \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_\mu)$$

は Banach *代数 $\ell^1(Z, A^Z)$ の $\tilde{\mu}$ による GNS 表現の一種である．

Hilbert 空間 $\mathbb{H}_\mu$ の元の対 ξ, η に対つても *演算 ξ^* と対合 $\xi * \eta$（$\xi^*(t, x) = \overline{\xi(-t, T_t x)}$，$\xi * \eta(t, x) = \sum_s \xi(t-s, T_s x)\eta(s, x)$）が A^Z の μ − 零集合を除外して定義される． しかし，$\xi^* \in \mathbb{H}_\mu$ であるが $\xi * \eta \in \mathbb{H}_\mu$ とは限らない． 特に，const $M>0$ が存在して

$$\|\xi * \eta\|_2 \leqq M \cdot \|\eta\|_2, \quad \forall \eta \in \mathbb{H}_\mu$$

である． $\xi \in \mathbb{H}_\mu$ を $\mathbb{H}_\mu$ の有界元（詳しくは作用素有界なランダム信号過程）という． これらの全体を $\mathbb{B}_\mu$ で表わす． 明らかに $\ell^1(Z, A^Z) \subset \mathbb{B}_\mu$． このとき，

$$B_\xi \eta = \xi * \eta, \quad (\xi \in \mathbb{B}_\mu, \ \eta \in \mathbb{H}_\mu)$$

とおくと，$B_\xi \in \mathcal{B}(H_\mu)$． ここで函数 $f \in L^\infty(A^Z, \mu)$ に対して

$$\tilde{f}(t, x) \triangleq \varepsilon_0(t, x) f(x) = \delta_0(t) f(x)$$

とおく． ただし ε_0 は（2）で定義されたもの，δ_0 は $\delta_0(t) = 1\ (t=0) = 0\ (t \neq 0)$ である． このとき $\tilde{f} \in \mathbb{B}_\mu$ で，$\forall f, g \in L^\infty(A^Z, \mu)$ に対して

$$\tilde{f} * \tilde{g}(t, x) = f \cdot g(x) = \tilde{g} * \tilde{f}(t, x), \quad \tilde{f}^* = \tilde{\bar{f}}$$

が成立する． 一方，群における正則表現と同様に，全ての $t \in Z$ に対して

$$(U_t \eta)(s, x) = \eta(s-t, x), \ \mu\text{-a.e. } x \in A^Z, \ \forall \eta \in \mathbb{H}_\mu$$

とおくと

$$t \in Z \longrightarrow U_t \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_\mu)$$

は unitary 表現である。以上の準備の下で次の一連の定理を得る。

定理 3. (i) $B_{(\alpha_t f)^\sim} = U_t B_{\tilde{f}} U_{-t}^{-1}$,

(ii) $U_t B_{\tilde{f}} \varepsilon_0(s, x) = \delta(s, t) f(x)$, μ-a. e. $x \in A^Z$,

(iii) $\{U_t B_{\tilde{f}} \varepsilon_0 ; t \in Z, f \in L^\infty(A^Z, \mu)\}$ は $\mathbb{H}_\mu$ で稠密。

定理 4. (i) $\mathbb{B}_\mu$ は演算 $\lambda\xi + \eta$, $\xi \to \xi^*$, $\xi * \eta$ によって *代数であり，$\{\tilde{f} ; f \in L^\infty(A^Z, \mu)\}$ ($= \tilde{L}^\infty(A^Z, \mu)$ とおく) は $\mathbb{B}_\mu$ の $*$部分代数である，

(ii) 対応 $f \longleftrightarrow \tilde{f}$ によって $L^\infty(A^Z, \mu)$ と $\tilde{L}^\infty(A^Z, \mu)$ は $*$同型である，

(iii) $\{B_\xi ; \xi \in \mathbb{B}_\mu\} = \{L_\xi ; \xi \in \ell^1(Z, A^Z)\}''$

$$= \{U_t, B_{\tilde{f}} ; t \in Z, f \in L^\infty(A^Z)\}'' \ (\triangleq \mathcal{L}(\mathbb{H}_\mu) \text{ とおく}).$$

ここで $\{-\}''$ はカッコ $\{\ \}$ 内の作用素全体によって生成される von Neumann 代数である。

積作用素の環 $L^\infty(A^Z, \mu)$ は常に $\mathcal{B}(L^2(A^Z, \mu))$ で極大可環であるが，これに対して次の定理が成立つ：

定理 5. $*$部分代数 $\tilde{L}^\infty(A^Z, \mu)$ が $\mathbb{B}_\mu$ で極大可環であるための必要十分条件は

(＊) $\mu(\{x \in A^Z ; T_t x = x\}) = 0$, $\forall t \in Z\ (t \neq 0)$.

条件(*)は von Neumann の sense で m-group property のことであり，Rokhlin [5] は後年エルゴード定理の関連で a-periodic property という名で呼んでいる．さらに次のことが言える．

定理 6．［A^Z，μ］がエルゴード情報源であるための必要十分条件は $\mathcal{L}(\mathbb{H}_\mu)$ が factor であることである．さらに μ が non-atomic であることと $\mathcal{L}(\mathbb{H}_\mu)$ が II_1-factor とは同等である．

5．結び

これまでの議論では変換群 $\{T_t ; t \in Z\}$ について考えたが，抽象的に群 G とコンパクト Hausdorff 空間 X を与え，G をパラメータとする X 上の自己同型変換群 $\{T_t ; t \in G\}$ を考えることによって $\ell^1(G, X)$ や $\ell^2(G, X, \mu)$ が同様に構成され，これまで議論して来た殆んど全てが，この一般形にした場合でも平行して論ずることが可能であり，その上で von Neumann 代数 $\mathcal{L}(G, X, \mu)$ が構成される．ただし，μ の定常という条件は μ の G-不変性の条件に置き換える．この場合で，特に $X = A^Z$ とし，

$$t = \begin{pmatrix} \cdots k_{-n-2} k_{-n-1} k_{-n} \cdots k_{-1} 0 \;\; k_1 \cdots k_n \;\; k_{n+1} k_{n+2} \cdots \\ \cdots k_{-n-2} k_{-n-1} k_{-n'} \cdots k_{-1'} 0 \;\; k_{1'} \cdots k_{n'} k_{n+1} k_{n+2} \cdots \end{pmatrix}$$

の型の置換全体のなす群を G_n とし，G_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 全体によって生成される群を G とする．各 $t \in G$ に対して $T_t(\Pi x_k) = \Pi x_{t(k)}$ とおく

すると $\{T_t ; t\in G\}$ が A^Z 上の位相自己同型群となる。このとき構成される von Neumann 代数 $\mathcal{L}(G, X, \mu)$ は hyperfinite となる。この議論は情報理論の見地に立てば符号化理論に発展させていく全く新たな手法の可能性が見られる。

一方，本文で論じたランダム信号過程は離散パラメータの場合に限定したが，これを Fourier 変換（級数展開による）すると離散パラメータは連続パラメータに変換され，信号解析における常套的な手法が，調和解析に乗り，さらに作用素代数の接合積における duality の議論（cf Takesaki [7]）に関係付けられるであろう。数学分野には無縁であろうと思われる「信号」という概念を純然たる作用素代数の理論の中に導入したのであるが，これらを具体的に，例えば，ランダム性をもつ正弦波とか帯域制限された信号過程などの解析の上に発展さすことがこれからの問題となると筆者は考える。

この論文は函数解析の人々には信号や情報源などというなじみ薄い単語に多く出合い，奇異な感を抱かれるかも知れないが境界領域に踏み出す初めの段階と思って頂きたい。信号や情報理論を数学的に扱った文献は大変少ないが，References に揭げた書物や論文 [2，3，8，9，10] などを参考にして頂きたい。また作用素代数の文献は数多いが References に挙げた [1，4，7，8，10] を参照されたい。

REFERENCES

[1] J. Dixmer, Von Neumann algebras, North-Holland, (1981).

[2] 国沢清典・梅垣寿春編，情報理論の進歩，岩波書店，（１９６５）．

[3] 国沢清典，情報理論Ｉ（エントロピーと情報量），共立出版，（１９８３）．

[4] M. Nakamura and Z. Takeda, On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras, Proc. Japan Acad. 34 (1958), 489-494.

[5] V.A. Rokhlin, On the fundamental ideals of measure theory, Math. Sbornik. 25 (67), (1949), 107-150.

[6] R. Schatten, A theory of cross-spaces, Ann. Math. Study, No.26, Priceton Univ. (1950).

[7] M. Takesaki, Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math. 131 (1973), 249-310.

[8] H. Umegaki, (a) Representations and extremal properties of averaging operators and their applications to information channels, J. Math. Anal. Appl. 25 (1970), 41-73; (b) Banach space-valued random variable and tensor product of Banach spaces(with A.T. Bharucha-Reid), Ibid, 31 (1970), 49-67; (c) Von Neumann algebras consisting of random functions, Third Seminar on Appl. Functional Analysis (1980), 1-10, Tokyo Instit. Tech.

[9] 梅垣寿春・大矢雅則，確率論的エントロピー（情報理論の函数解析的基礎Ｉ），共立出版，（１９８３）．

[10] 梅垣寿春・大矢雅則，量子論的エントロピー（情報理論の函数解析的基礎II），共立出版，（１９８４）．