数理解析研究所講究録
504巻 1983年 117-131

Boolean valued analysis とその応用

東工大・理 小澤 正直 (Masanao Ozawa)

§1. 序論.

1963年, P. J. Cohen は強制法という集合論の新しいモデルを構成する方法を開発して, 選択公理と連続体仮説が集合論の他の公理から独立であることを証明した。1966年, D. Scott と R. Solovay は集合論の Boole 値モデルを構成して, Cohen の強制法を再構成すると共に, その解析学への応用として, Boole 値解析学を導入した。本稿では, この Boole 値解析学を用いて, Kaplansky が 1952年に提出して以来30年間未解決であった等質的 AW*-環の基数の一意性の問題が否定的に解決されることを示す。Boole 値解析学の基本的手法については, Takeuti [9] を, 以下の議論の詳細は Ozawa [7] を参照されたい。

§2. 集合論の Boole 値モデル

集合論 ZFC は等号 = と所属関係 ∈ の二つの二項述語をもつ一階の述語理論で, 等号公理の他に, 外延性の公理, 対の

公理，合併集合の公理，巾集合の公理，置換公理，正則性の公理，無限公理，選択公理を公理としてもっている。(cf. [11])．これらすべての公理を満足する対象の集まりをZFCのモデルと呼ぶが，通常のモデル理論ではモデルはある論理式φを満足する（$M \models \varphi$）か，満足しないかのいずれかであると仮定されている（cf. [11; §12]）．ここで考えるBoole価モデルでは，モデルは与えられた論理式を満足するかしないかの他に，与えられたBoole代数Bの任意の値をその論理式φの真理値$[\![\varphi]\!]$としてとるものである。この時，$M \models \varphi$は$[\![\varphi]\!]=1$によって定義される。ZFCのBoole価モデルの構成法としては，D. ScottとR. Solovayによる次のものが知られている（cf. [12; §13]）．

Bを完備Boole代数として，各順序数αに対して，$V_\alpha^{(B)}$を超限帰納法によって次の様に定義する：

$V_0^{(B)} = \phi$，$V_\alpha^{(B)} = \{u \mid u: dom(u) \to B,\ dom(u) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{(B)}\}$.

この時，Scott と Solovay による ZFC の Boole 価モデル $V^{(B)}$ は $V^{(B)} = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha^{(B)}$ で定義される．但し，Onは順序数全体のなす類である．$V^{(B)}$の元をBoole価集合とよぶ．次に，$u, v \in V^{(B)}$に対して，B-価の真理値$[\![u \in v]\!]$，$[\![u = v]\!]$を次の様に$V^{(B)}$の構成による帰納法で定義する．

(1) $[\![u \in v]\!] = \bigvee_{y \in dom(v)} [v(y) \wedge [\![u = y]\!]]$.

(2) $[\![u=v]\!] = \bigwedge_{x\in dom(u)} [u(x) \Rightarrow [\![x\in v]\!]]$

$\wedge \bigwedge_{y\in dom(v)} [v(y) \Rightarrow [\![y\in u]\!]]$.

但し，$b_1, b_2 \in B$ に対して，$(b_1 \Rightarrow b_2) = (\neg b_1) \vee b_2$ である．各 u よりも $dom(u)$ の元の方がより小さい α に対する $V_\alpha^{(B)}$ に属しているので，(1)，(2) からすべての $u, v \in V^{(B)}$ に対して，$[\![u\in v]\!]$, $[\![u=v]\!]$ が定義されることが示される。集合論のすべての論理式 $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ $(a_1, \cdots, a_n \in V^{(B)})$ に対して，その B-値の真理値 $[\![\varphi(a_1, \cdots, a_n)]\!]$ が，次の様に論理式の長さに関する帰納法により定義される。

(1) $[\![\neg\varphi]\!] = \neg[\![\varphi]\!]$,

(2) $[\![\varphi\wedge\psi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]$,

(3) $[\![\varphi\vee\psi]\!] = [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]$,

(4) $[\![(\forall x)\varphi(x)]\!] = \bigwedge_{a\in V^{(B)}} [\![\varphi(a)]\!]$,

(5) $[\![(\exists x)\varphi(x)]\!] = \bigvee_{a\in V^{(B)}} [\![\varphi(a)]\!]$.

但し，左辺の $\neg, \wedge, \vee$ は論理記号で，右辺の $\neg, \wedge, \vee$ は Boole代数の演算記号である。以上によって，集合論のすべての閉論理式 φ に対して，その真理値 $[\![\varphi]\!] \in B$ が定義されたことになる．$V^{(B)}$ が，ZFC の Boole 値モデルであることは，次の定理で保証される．

<u>定理1．(Scott-Solovay, [12; Theorem 13.12, Theorem 14.25])</u>
<u>φ が ZFC の定理ならば，$[\![\varphi]\!] = 1$.</u>

上の定理の証明は，論理式φがψから演繹されれば$[\![\varphi]\!] \geq [\![\psi]\!]$，また論理式$\varphi$がZFCの公理ならば$[\![\varphi]\!]=1$を示すことによって行なわれる．$V$を通常の集合の普遍類とする．各$x \in V$に対して，$V^{(B)}$の元$\check{x}$を対応させて，$[\![\check{x}=\check{y}]\!]=1 \Leftrightarrow x=y$, $[\![\check{x}=\check{y}]\!]=0 \Leftrightarrow x \neq y$, $[\![\check{x} \in \check{y}]\!]=1 \Leftrightarrow x \in y$, $[\![\check{x} \in \check{y}]\!]=0 \Leftrightarrow x \notin y$, が成立するようにさせることができる．つまり，$\check{x}$の全体は$V^{(B)}$の中における$V$の複製になっている．各$\check{x}$は$\check{x}=\{\check{y} \mid y \in x\} \times \{1\}$という関係によって，$V$の構成に関する（正則性の公理）帰納法で定義される．この時，任意の$x \in V^{(B)}$に対して，

$$[\![x\text{は順序数である}]\!] = \bigvee_{\alpha \in On} [\![x=\check{\alpha}]\!]$$

が成立する．これは，$V^{(B)}$において，順序数の概念が絶対的である事を示している (cf. [12; Theorem 13.22]).

§3. $V^{(B)}$における実数

数学で用いられる数はすべてZFCで定義される．例えば，各自然数nに対して，nを定義する集合論の論理式$\varphi_n(x)$がある．$0=\emptyset$, $1=\emptyset \cup \{\emptyset\}$, …として，$(\exists! x)\,\varphi_n(x) \wedge \varphi_n(n)$が証明可能である．この時，$[\![(\exists! x)\,\varphi_n(x) \wedge \varphi_n(\check{n})]\!]=1$である．即ち，$V^{(B)}$における自然数$\check{n}$は$V$における自然数$n$の複製品である．また，$\varphi(x)$が'$x$は自然数である'を意味する論理式で，$\mathcal{N}=\{x \mid \varphi(x)\}$とすると，$[\![\mathcal{N}=\check{\mathcal{N}}]\!]$が成立する．同様に有理数

の集合 $\mathbb{Q}$ に対して，$[\![\check{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}]\!] = 1$ が成立する．これらは，$V^{(B)}$ において，自然数や有理数の概念が絶対的であることを示している．ところが，実数や複素数の概念は一般に $V^{(B)}$ で絶対的ではない．（cf. [9; §2]）．

集合論 ZFC で実数を定義するにはいくつかの同等な方法があるが，ここでは Dedekind の切断によって実数を定義することにしよう．つまり，実数とは有理数の切断の端点をもたない下組のことであると定義する．形式的には 'a は実数である' という論理式は次の様に表現される．

$$a \subseteq \mathbb{Q} \wedge (\exists s \in \mathbb{Q})[s \in a] \wedge (\exists s \in \mathbb{Q})[s \notin a]$$
$$\wedge (\forall s \in \mathbb{Q})[s \in a \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{Q})[s < t \wedge t \in a]].$$

集合論 ZFC で実数の全体を表わす記号を $\mathbb{R}$ とする．また，$V^{(B)}$ の中で，実数であるものの全体を $\mathbb{R}^{(B)}$ で表わす．即ち，

$$\mathbb{R}^{(B)} = \{u \in V^{(B)} \mid [\![u \in \mathbb{R}]\!] = 1\}.$$

以下では，B が位相空間 Ω の正則開集合のなす完備 Boole 代数（cf. [2; §4, §21], [12; §1]）の場合に，$\mathbb{R}^{(B)}$ がどんなものになっているか調べることにする．尚，B が Hilbert 空間上の射影のなす完備 Boole 代数の場合及び，B が測度代数の場合の $\mathbb{R}^{(B)}$ については [9] を参照されたい．任意の完備 Boole 代数は必ずある位相空間の正則開集合のなす完備 Boole 代数と同型だから，すべての完備 Boole 代数 B に対する $\mathbb{R}^{(B)}$ を調

べるためには，以下の議論が必要かつ十分なものとなる．

各$a \in \mathbb{R}^{(\mathcal{B})}$に対して，拡張実数値関数$f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$を次の様に定義する．

(1) $f(\omega) = \sup\{s \in \mathbb{Q} \mid \omega \in \bigcup_{s<t\in\mathbb{Q}} [\![\check{t} \in a]\!]\}$, $\omega \in \Omega$.

この時，

(2) $\{\omega \in \Omega \mid s < f(\omega)\} = \bigcup_{s<t\in\mathbb{Q}} [\![\check{t} \in a]\!]$, $s \in \mathbb{Q}$

(3) $[\![\check{s} \in a]\!] = \{\omega \in \Omega \mid s < f(\omega)\}^{-\circ}$

が成立して，fは下半連続関数である．更に，このfは次の性質をもつ，

(4) $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = -\infty\}$は疎集合．

(5) $\bigcup_{n\in N} \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \le n\}^{\circ}$は$\Omega$で稠密．

そこで，$LC(\Omega)$によって，(4), (5)をみたす$\overline{\mathbb{R}}$-値下半連続関数の全体とすると，$\Phi(a) = f$によって，対応$\Phi : \mathbb{R}^{(\mathcal{B})} \to LC(\Omega)$が得られる．任意の$f \in LC(\Omega)$に対して，$a \in V^{(\mathcal{B})}$を$\mathrm{dom}(a) = \mathrm{dom}(\check{\mathbb{Q}})$，$a(\check{s}) = \{\omega \in \Omega \mid s < f(\omega)\}^{-\circ}$ $(s \in \mathbb{Q})$，で定義すると，$\Phi(a) = f$となる．従って，Φは$LC(\Omega)$の上への写像で，次の意味で本質的に一対一である．

$[\![a_1 = a_2]\!] = 1 \iff \{\omega \in \Omega \mid \Phi(a_1)(\omega) \ne \Phi(a_2)(\omega)\}$が第一類集合．

更に，Φが$\mathbb{R}^{(\mathcal{B})}$における代数演算と順序を$LC(\Omega)$上の代数演算と順序が第一類集合の外で成立するように保存することが示される．さて，$\mathbb{R}^{(\mathcal{B})}$の有界部分$\mathbb{R}^{(\mathcal{B})}_{\infty}$を

$$\mathbb{R}^{(B)}_{\infty} = \{a \in \mathbb{R}^{(B)} \mid \exists M \in \mathbb{R},\ [\![|a| \le \check{M}]\!] = 1\},$$

で定義する。この時，"$a \in \mathbb{R}^{(B)}_{\infty} \Leftrightarrow \Phi(a)$が有界" が成立する。

よって，ΩがBのStone表現空間の場合には，この対応を用いて，次の同型定理が成立する。

<u>定理2. $\mathbb{R}^{(B)} \cong B_{\mathbb{R}}(\Omega)$，$\mathbb{R}^{(B)}_{\infty} \cong C_{\mathbb{R}}(\Omega)$.</u>

但し，$B_{\mathbb{R}}(\Omega) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\Omega) / \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\Omega)$で，ここに，$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\Omega)$は$\Omega$上のBorel関数の全体，$\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\Omega)$は第一類の集合の外で0となるBorel関数の全体である。また，$C_{\mathbb{R}}(\Omega)$はΩ上の連続関数の全体である。

同様にして，$V^{(B)}$の複素数についても

<u>定理3. $\mathbb{C}^{(B)} \cong B_{\mathbb{C}}(\Omega)$，$\mathbb{C}^{(B)}_{\infty} \cong C_{\mathbb{C}}(\Omega)$</u>

が成立する。

詳しくは，[7; §3] を参照されたい。

<u>§4. $V^{(B)}$におけるHilbert空間.</u>

Hを$V^{(B)}$におけるHilbert空間，即ち，$[\![H$はHilbert空間である$]\!] = 1$，とする。$H^{(B)}$及び，$H^{(B)}$の有界部分$H^{(B)}_{\infty}$を次の様に定義する。

$$H^{(B)} = \{u \in V^{(B)} \mid [\![u \in H]\!] = 1\},$$

$$H^{(B)}_{\infty} = \{u \in H^{(B)} \mid \exists M \in \mathbb{R},\ [\![\|u\| \le \check{M}]\!] = 1\}.$$

Hの$V^{(B)}$における内積を$\langle \cdot, \cdot \rangle_B$，normを$\| \cdot \|_B$で表わすと，$u, v \in H^{(B)}_{\infty}$ならば，$\langle u, v \rangle_B \in \mathbb{C}^{(B)}_{\infty}$，$\|u\|_B \in \mathbb{R}^{(B)}_{\infty}$となる。よって，

B の Stone 表現空間を Ω として，$Z = C_\infty(\Omega)$ とすると，Z は可換な AW^*-環で，B は Z の射影のなす完備 Boole 代数と同型になる。また，定理3から $Z \cong \mathbb{C}^{(B)}_\infty$ であるから，$H^{(B)}_\infty$ は Z-値の内積をもつ Z-加群である。

Z-値の内積をもつ Z-加群 X は，次の条件をみたす時，AW^*-加群とよばれる。

(1) 関係 $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{1/2}$ $(x \in X)$ で定義される X 上の norm $\|\cdot\|$ に関して，X は Banach 空間である。

(2) X の vector の任意の族 (x_i) と B の単位の分解 (b_i)，即ち，$\vee_i b_i = 1$ かつ $b_i \wedge b_j = 0$ $(i \neq j)$，に対して，ある $x \in X$ が存在して，任意の i に対して $b_i x = b_i x_i$ が成立する。

二つの AW^*-加群は一方から他方の上への Z-値内積を保存する Z-線型写像が存在する時，同型であるという。

さて，$V^{(B)}$ における Hilbert 空間と Z 上の AW^*-加群の間には，次の様な一対一対応（関手としての同値対応）がある。

定理4.（[7; Theorem 5.5]）H を $V^{(B)}$ における Hilbert 空間とすると，$H^{(B)}_\infty$ は Z 上の AW^*-加群であり，逆に任意の Z 上の AW^*-加群 X に対して，$X \cong H^{(B)}_\infty$ となる $V^{(B)}$ における Hilbert 空間 H が構成される。

§5. 強制法(forcing)

強制法(forcing)とは，P. J. Cohenが連続体仮説及び選択公理の独立性を証明するために開発した，集合論のモデルを構成する方法である。ここでは，D. ScottとR. Solovayによって，Boole値モデルを用いて強制法を再構成する議論の概要を示そう。

Mを集合論ZFの推移的標準モデルとする([11; Definition 12.7])．強制概念とは，半順序集合$\langle P, \leq \rangle$のこととする．実際には，Pはある種の集合論のモデルに関する条件の集合と考えられるが，一般論のためには抽象的な半順序集合で十分である。強制法とは，P上の生成filterとよばれるfilter Gを用いて，Mの生成拡大とよばれる拡大モデル$M[G]$を構成する方法である。これをBoole値モデルを通して行うには次の様にする。Pに順序位相(切片を開集とする位相)を導入して，Pを位相空間とし，その正則開集合から成る完備Boole代数をBとする。B-値モデル$M^{(B)}$を，Vから$V^{(B)}$を構成した方法をMに相対化して，構成する。Bのultra filter Gで次の性質をもつものを生成filterとよぶ。

$$X \subseteq G \cap M \Rightarrow \sup X \in G.$$

但し，$\sup X$はXのGにおける上限である。与えられた生成filter Gに対して，Mの生成拡大(generic extension) $M[G]$は

集合論 ZFC の 2-価モデルで，次の様に構成される。$M^{(B)}$ 上の <u>G-解釈</u> とよばれる関数 i_G を

$$i_G(x) = \{ i_G(y) \mid x(y) \in G \}, \qquad x \in M^{(B)}$$

によって，帰納的に定義して，$M[G] = \{ i_G(x) \mid x \in M^{(B)} \}$ とすれば，$M[G]$ が得られ，$x_1, \cdots, x_n \in M^{(B)}$ を定項にもつ論理式の解釈を

$$M[G] \models \varphi(x_1, \cdots, x_n) \iff [\![\varphi(x_1, \cdots, x_n)]\!] \in G$$

によって定めれば，M の生成拡大 $M[G]$ は ZFC の 2-価モデルになる。（cf. [3; §18]）.

α と β を二つの無限基数として，P を次の条件をみたす一対一写像の全体とする。

$$\mathrm{dom}(p) \subseteq \alpha, \quad \mathrm{ran}(p) \subseteq \beta, \quad \mathrm{card}(\mathrm{dom}(p)) < \alpha.$$

更に，P に

$$p \leq q \iff p \text{ は } q \text{ の拡張}$$

という関係で順序を入れ，$[p] = \{ q \in P \mid q \leq p \}$ $(p \in P)$ として，$\{[p] \mid p \in P\}$ を開基とする位相を導入する。この強制概念 $\langle P, \leq \rangle$ に関して，次の結果が知られている。

<u>定理 5.（[3; Lemma 19.9]） B を P の正則開集合からなる完備 Boole 代数とすると，次の (1), (2) が成立する.</u>

<u>(1) 任意の推移的標準モデル M と任意の生成 filter G に対して，$M[G] \models \mathrm{card}(\alpha^M) = \mathrm{card}(\beta^M)$. 但し，α^M, β^M</u>

は基数 α, β の M への相対化である。

(2) $V^{(B)}$ において, $[\![\mathrm{card}(\check{\alpha}) = \mathrm{card}(\check{\beta})]\!] = 1$.

(1) の型の結論は強制法特有の結論の型であり, (2) の型の結論は Boole 値モデル特有の結論の型である。強制法と Boole 値モデルの二つの方法は互に同等なので, 一方から他方を導く標準的な方法が存在する。(2) から (1) を導くには, 前述の強制法の Boole 値モデルによる再構成から明らかである。(1) から (2) を導くには, Löwenheim-Skolem の定理によって, M が可算モデルと仮定しても一般性を失わない事と, Rasiowa-Sikorski の定理によって, M が可算ならば, generic filter が十分に存在する事を用いる。尚, 生成 filter の概念は P だけに依存して決定するもので, 強制法は勿論 B を用いずに定式化することができる。

§6. 等質的 AW*-環における基数の一意性の問題

§4 において, AW*-加群の問題を $V^{(B)}$ における Hilbert 空間論に帰着させる事を示し, §5 において, 強制法で得られた結果を $V^{(B)}$ に対する結論に変換する方法を示した。従って, この事を用いて, 強制法という非常に実りの多いモデル論の手法を解析学の問題に応用する道が開けた事になる。この §では, これらの道具を用いて, 1952年に Kaplansky が提出し

て以来未解決であった等質的 (homogeneous) AW^*-環における基数の一意性の問題に応用することにしよう。

AW^*-環 A は，その単位元が同値な可換射影の直交族の上限である時，<u>等質的</u>であるとよばれ，その様な直交族の基数が $\aleph$ の時，<u>$\aleph$-等質的</u>であるとよばれる (cf. [1; §18])．基数の一意性の問題とは，この様な射影の直交族の基数が A に対して一意に定まるかという問題である。A が W^*-環の場合には，この基数は一意的であって，この基数は$*$同型の不変量となる。更に，任意の I 型 W^*-環は等質的 W^*-環の直和に分解されるので，その直和因子の等質的 W^*-環のもつ基数によってその構造が決定される。Kaplansky はこの様な I 型の構造理論を AW^*-環に拡張する事を意図したのであるが，I 型 AW^*-環が等質的 AW^*-環に直和分解される事は示す事が出来たが，その基数の一意性は中心が局所的可算分解可能な場合に証明できたのみで，一般の場合には未解決であった。(cf. [4])．更に，彼は，[5; p. 843, Footnote] で問題は否定的であろうと予想している。以下で，この問題が否定的に解決されることを示そう。

さて，[5] で示されたように，中心が可換 AW^*-環 Z に同型な任意の I 型 AW^*-環 A は，ある Z 上の AW^*-加群 X 上の有界 Z-線型写像のなす AW^*-環 $\mathrm{End}_Z(X)$ と同型になる。この事から，基数の

一意性の問題は，次の様にAW*-加群の問題に帰着される。
AW*-加群 X の vector の族 $\{e_i\}$ が次の条件 (1)−(3) をみたす時，それは X の基底であるとよばれる。

(1) 任意の i に対して，$\langle e_i, e_i \rangle = 1$.

(2) $i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$

(3) 任意の $x \in X$ に対して，$\langle x, e_i \rangle = 0$ が任意の i に対して成立すれば，$x = 0$ である。

定理6. ([5; Theorem 7, Theorem 8]) AW*-環 A が α-等質的であるための必要十分条件は，$A \cong \mathrm{End}_Z(X)$ となる濃度 α の基底をもつ AW*-加群 X が存在することである。

従って，問題は，AW*-加群の基底の濃度の一意性の問題に帰着される。そこで，この問題を $V^{(B)}$ における Hilbert 空間の問題に帰着させると次の様になる。

定理7. ([7; Theorem 6.2]) 可換 AW*-環 Z 上の AW*-加群 X が濃度 α の基底をもつための必要十分条件は，Z の射影からなる完備 Boole 代数を B として，$X \cong H^{(B)}_{\infty}$ となる $V^{(B)}$ の Hilbert 空間 H に対して，$[\![\dim(H) = \mathrm{card}(\check{\alpha})]\!] = 1$ が成立することである。

以上により，問題は $V^{(B)}$ における基数の問題に帰着された。そこで，§5において，強制法によって得られた，$V^{(B)}$ の基数に関する定理5を利用すると，次の結論が得られる。

定理8. ([7; Theorem 6.3]). α, βを任意に与えられた二つの無限基数で$\alpha < \beta$とする。この時，$\alpha \leq \gamma \leq \beta$となる任意の基数$\gamma$に対して，同時に$\gamma$-等質的となる一つのAW*環が存在する。

証明は，定理3から定理7をつなげていけばよい。つまり，定理5によって，与えられた強制概念$\langle P, \leq \rangle$から構成された完備Boole代数をBとして，$Z = \mathbb{C}_{\infty}^{(B)}$とする。定理3から，$Z$は射影の全体が$B$と同型な可換AW*環である。定理5から$V^{(B)}$で$[\![\mathrm{card}(\check{\alpha}) = \mathrm{card}(\check{\beta})]\!] = 1$が成立している。従って，$\alpha \leq \gamma \leq \beta$ならば$[\![\mathrm{card}(\check{\alpha}) = \mathrm{card}(\check{\gamma})]\!] = 1$でもある。そこで，$V^{(B)}$におけるHilbert空間$\ell^2(\check{\alpha})$を$V^{(B)}$で構成して，これを$H$とする。すると，定理1から$[\![\dim(H) = \mathrm{card}(\check{\alpha}) = \mathrm{card}(\check{\gamma})]\!] = 1$である。よって，$Z$上のAW*-加群$X$を定理4により$X = H_{\infty}^{(B)}$と定義すると，定理7から，$X$は濃度$\gamma$の基底をもつことになる。従って，定理6から，AW*環$\mathrm{End}_Z(X)$つまり，$\mathrm{End}_{\mathbb{C}_{\infty}^{(B)}}(\ell^2(\check{\alpha})_{\infty}^{(B)})$は$\alpha \leq \gamma \leq \beta$なる任意の$\gamma$に対して，$\gamma$-等質的である。

文献[7]では更に，Boole値解析学を用いて，I型AW*環の完全な分類が与えられている。[8]では，定理8の直接的な証明が与えられている。[6]と[9]には，Boole値解析学の重複度理論への応用とvon Neumann環への応用が述べられている。

References.

[1] Berberian, S. K., Baer *-rings, Springer, Berlin, 1972.

[2] Halmos, P. R., Lectures on Boolean algebras, Van Nostrand, New York, 1963.

[3] Jech, T., Set theory, Academic Press, New York, 1978.

[4] Kaplansky, I., Algebras of type I, Ann. of Math., 56(1952), 460-472.

[5] Kaplansky, I., Modules over operator algebras, Amer. J. Math., 75(1953), 839-858.

[6] Ozawa, M., Boolean valued interpretation of Hilbert space Theory, J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 609-627.

[7] Ozawa, M., A classification of type I AW*-algebras and Boolean valued analysis, preprint.

[8] Ozawa, M., Non-uniqueness of the cardinality attached to homogeneous AW*-algebras, preprint.

[9] Takeuti, G., Two applications of logic to mathematics, Iwanami and Princeton University Press, Tokyo and Princeton, 1978.

[10] Takeuti, G., Von Neumann algebras and Boolean valued analysis, J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 1-21.

[11] Takeuti, G. and Zaring, W. M., Introduction to axiomatic set theory, Springer, New York, 1971.

[12] Takeuti, G. and Zaring, W. M., Axiomatic set theory, Springer, New York, 1973.