

Title	Fuglede-Putnamの定理の一つのversion(応用函数解析の研究)
Author(s)	岡安, 隆照
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 504: 110-116
Issue Date	1983-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/103716
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Fuglede-Putnam の定理の \rightarrow version

山形大 理 岡安隆照 (Takateru OKAYASU)

1. A, B が正規作用素ならば任意の作用素 X に対して A
 $X - XB^* = 0$ ならば $A^*X - XB = 0$ が導かれる。このことは
 知られた Fuglede-Putnam の定理 の主たるところである。
 Berberian は A, B が互正規作用素 (hyponormal operator)
 であっても X が Hilbert-Schmidt 作用素であれば同じ結論が
 得られることを示した [1]。現在では X を Hilbert-Schmidt
 作用素に限定したとしてもこのことが知られている (高橋 [3],
 R.L. Moore - D.D. Rogers - T.T. Trent [2])。Berberian の
 議論は不十分であったわけである。

しかし彼の議論は作用素環論的であるに過ぎない。それを更に
 深く読みだすとこの命題が成り立つことがわかる。

ある: A_j, B_j が

$$A_i A_j^* = A_j^* A_i, B_i B_j^* = B_j^* B_i \quad (i \neq j)$$

を満たす互正規作用素で X が Hilbert-Schmidt 作用素ならば

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i X B_i^* = 0$$

ならば

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i^* X B_i = 0$$

が導かれる。——ここでのこの命題の積分形を定式化しよう。

それは作用素積分方程式における一つのきわんだ現象である
とみることが出来る。

2. 目的の定理はつぎのとおりである:

定理 (S, \mathcal{F}) を可測空間, $\mu \in (S, \mathcal{F})$ 上の複素測度, M
を半有限型作用素環, $a, b \in S$ 上の $|\mu|$ に関して本質的に
有界な M 値関数としての条件を満たすものとする:

(1) μ に関してほとんどすべての λ について $a(\lambda), b(\lambda)$ が正
実数。

(2) μ に関してほとんどすべての $\lambda, \lambda' (\lambda \neq \lambda')$ について

$$a(\lambda)a(\lambda')^* = a(\lambda')^*a(\lambda), \quad b(\lambda)b(\lambda')^* = b(\lambda')^*b(\lambda).$$

このとき $\lambda \in L_1(M) \cap M$ (函数 $\lambda \rightarrow a(\lambda) \times b(\lambda)^*$
が Bochner 積分可能, 函数 $\lambda \rightarrow a(\lambda)^* \times b(\lambda)$ が弱可測 (つまり
弱可測) かつ

$$\int a(\lambda) \times b(\lambda)^* d\mu = 0$$

ならば, 函数 $\lambda \rightarrow a(\lambda)^* \times b(\lambda)$ は弱積分可能 (つまり弱積分
可能) である。

$$\int a(\lambda)^* \times b(\lambda) d\mu = 0.$$

特に M が有限型で函数 $\lambda \rightarrow a(\lambda)^* \times b(\lambda)$ が弱積分可能ならば,
 μ を有限型とした複素測度 (しかし μ の分解は必ず
とす) とし $\mu \in \mathcal{M}$, a, b が $|\mu|$ に関して本質的に有界
であるという条件を落してよい。

この定理から部座につきの系が得られる:

系1 (S, \mathcal{F}) を可測空間, $\mu \in (S, \mathcal{F})$ 上の核型測度, $A, B \in S$ 上の行列値関数につきの条件を満足するものとする:

(3) μ によりほとんどすべての λ につき $A(\lambda), B(\lambda)$ が正規.

(4) μ によりほとんどすべての $\lambda, \lambda' (\lambda \neq \lambda')$ につき

$$A(\lambda)A(\lambda')^* = A(\lambda')^*A(\lambda), \quad B(\lambda)B(\lambda')^* = B(\lambda')^*B(\lambda).$$

このときもしも \mathcal{H} 上の関数 $\lambda \rightarrow A(\lambda) \times B(\lambda)^*$, $\lambda \rightarrow A(\lambda)^* \times$

$B(\lambda)$ が積分可能.

$$\int A(\lambda) \times B(\lambda)^* d\mu = 0$$

ならば

$$\int A(\lambda)^* \times B(\lambda) d\mu = 0.$$

系2 (S, \mathcal{F}) を可測空間, $\mu \in (S, \mathcal{F})$ 上の核型測度, A, B はヒルベルト空間 H 上の, $|\mu|$ により本質的に有界な有界作用素値関数につきの条件を満足するものとする:

(5) μ によりほとんどすべての λ につき $A(\lambda), B(\lambda)$ が正規.

(6) μ によりほとんどすべての $\lambda, \lambda' (\lambda \neq \lambda')$ につき

$$A(\lambda)A(\lambda')^* = A(\lambda')^*A(\lambda), \quad B(\lambda)B(\lambda')^* = B(\lambda')^*B(\lambda).$$

このときもしも H 上の核型作用素 X につき $\lambda \rightarrow A(\lambda) \times B(\lambda)^*$ が Bochner 積分可能, 関数 $\lambda \rightarrow A(\lambda)^* \times B(\lambda)$ が弱可

測 ν 上

$$\int A(\lambda) \times B(\lambda) d\mu = 0$$

ならば、函数 $\lambda \rightarrow A(\lambda)^* \times B(\lambda)$ は弱積分可能で

$$\int A(\lambda)^* \times B(\lambda) d\mu = 0.$$

3. 定理の証明の概略を述べよう。

$$x(\lambda) = a(\lambda) \times b(\lambda)^*, \quad y(\lambda) = a(\lambda)^* \times b(\lambda) \quad (\lambda \in S)$$

とある。任意の $\varphi \in \mathcal{M}^*$ を定めよう。函数 x は Bochner 積分可能、函数 $\varphi \circ y$ は可測かつ $|\mu|$ に関して本質的に有界である

から、任意の自然数 n に対して S のある分割 $\Delta_n = \{S_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して、 $\lambda_k \in S_n^k$ を選んで

$$x_n(\lambda) = x(\lambda_k), \quad y_n(\lambda) = y(\lambda_k) \quad (\lambda \in S)$$

と定めるとき x_n は Bochner 積分可能で

$$\begin{aligned} \int \|x_n(\lambda) - x(\lambda)\| d|\mu| &< \frac{1}{n} \quad \text{よって} \\ |\varphi(y_n(\lambda)) - \varphi(y(\lambda))| &< \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \int \bigcup_{k=m+1}^{\infty} S_n^k x_n(\lambda) d\mu &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \\ \int \bigcup_{k=m+1}^{\infty} S_n^k \varphi(y_n(\lambda)) d\mu &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

よって

$$\left\| \int \bigcup_{k=m+1}^{\infty} S_n^k x_n(\lambda) d\mu \right\| < \frac{1}{n} \quad \text{と}$$

$$\left| \int \bigcup_{k=m_n+1}^{\infty} S_n^k \varphi(y_n(\lambda)) d\mu \right| < \frac{1}{n}$$

と満たす自然数 m_n と定数 ϵ がとれる。 $\epsilon = \frac{1}{n}$ と

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\| &= \left\| \int (x(\lambda) x_n(\lambda) - x(\lambda)) d\mu \right\| \\ &\leq \left\| \int (1-x(\lambda)) x_n(\lambda) d\mu \right\| + \left\| \int \|x_n(\lambda) - x(\lambda)\| d\mu \right\| \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

ただし X は $\bigcup_{k=m_n+1}^{\infty} S_n^k$ の特性関数である。

いま $\varphi = \psi + \psi'$ ($\psi \in M$, $\psi' \in M_{\neq}$) とする。 $\exists \tau \in \{a, i\}$
 $(L_1(M), M, \varphi - a, \tau \rightarrow 0)$ とする (τ は M の trace)。

このとき

$$\begin{aligned} &\psi \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right)^* \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \\ &\leq (\psi - a, \tau) \left(\left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right)^* \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \right) \\ &\quad + \tau \left(a \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right)^* \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \right) \\ &\leq \|\psi - a\| \left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right\|_2^2 + \|a\| \left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right\|_2^2. \end{aligned}$$

ここで ψ (1), (2) の不等式

$$\left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right\|_2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\|_2$$

を示すことが出来る。この計算は長谷川らの2次割愛法だが、
 この方法は本格的に Barberian [1] の方法と同じである。

更に

$$\left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\|_2^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\| \left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\|_1$$

$$< \frac{2}{n} \left\| \sum_k \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\|_1.$$

$$\text{L 2.1} = \left\| \sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right\|^2, \left\| \sum_k \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\|_1 \quad \text{I 2-1 2}$$

存在 2. あり 3. あり 4. あり 1. あり 2. あり

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi \left(\left(\sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right)^* \left(\sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \right) \leq \|y - a_1\| < \epsilon,$$

ただし K は $\left\| \sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right\|^2 \rightarrow 0$ の上界 2. あり. ϵ あり

存在 2. あり 3. あり 4. あり

$$\varphi \left(\left(\sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right)^* \left(\sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

L 2. あり 3. あり

$$\varphi \left(\sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

あり 2

$$\varphi \left(\sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

L 2. あり 3. あり

$$\begin{aligned} \left| \int \varphi(y_n(\omega)) d\mu \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \mu(S_n^k) \varphi(y(\lambda_k)) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) \varphi(y(\lambda_k)) \right| + \left| \sum_{k=m_n+1}^n \mu(S_n^k) \varphi(y(\lambda_k)) \right| \\ &< \left| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) \varphi(y(\lambda_k)) \right| + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

- あり

$$\int \varphi(y_n(\omega)) d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \varphi(y(\omega)) d\mu$$

2. あり 3. あり

$$\int \varphi(y(\omega)) d\mu = 0.$$

定理の証明) の部分は上の議論を少し変更すれば済みます。

4. 定理の積方を作用素環の強位相に用いる積方として議論したいところである (M は有限型に限定以上の technique が適用する).

References

[1] S. K. Berberian, Extensions of a theorem of Fuglede and Putnam, Proc. AMS 71 (1978), 113 - 114.

[2] R. L. Moore, P. D. Rogers and T. T. Trent, A note on intertwining M -hyponormal operators, Proc. AMS 83 (1981), 514 - 516.

[3] K. Takahashi, On the converse of the Fuglede-Putnam theorem, Acta Sci. Math. 43 (1981), 123 - 125