数理解析研究所講究録
504巻 1983年 110-116

Fuglede-Putnam の定理の一つの version

山形大 理 岡安隆照 (Takateru OKAYASU)

1. A, B が正規作用素ならば任意の作用素 X に対して $AX - XB^* = 0$ から $A^*X - XB = 0$ が導かれる. このことはよく知られた Fuglede-Putnam の定理の主張するところである. Berberian は A, B が亜正規作用素 (hyponormal operator) であっても X が Hilbert-Schmidt 作用素であれば同じ結論が得られることを示した [1]. 現在では X を Hilbert-Schmidt 作用素に限定しなくてもよいことが知られている (高橋 [3], R.L. Moore - D.D. Rogers - T.T. Trent [2]). Berberian の議論は不十分であったわけである.

しかし彼の議論は作用素環論的で示唆に富む. それを注意深く読めばたとえばつぎの命題が成り立つことがわかるのである: A_j, B_j が

$$A_iA_j^* = A_j^*A_i, \quad B_iB_j^* = B_j^*B_i \quad (i \neq j)$$

を満たす亜正規作用素で X が Hilbert-Schmidt 作用素ならば

$$\sum_{i=1}^{n} A_i X B_i^* = 0$$

から

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^* X B_i = 0$$

が導かれる. —— ここではこの命題の積分形を定式化しよう.

それは作用素積分方程式における一つのきれいな現象であるとみることができる.

2. 目的の定理はつぎのとおりである:

定理 $(S, \mathfrak{F})$ を可測空間, μ を $(S, \mathfrak{F})$ 上の複素測度, M を半有限型作用素環, a, b を S 上の $|\mu|$ に関して本質的に有界な M 値関数でつぎの条件を満たすものとする:

(1) μ に関し殆んどすべての λ について $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ が正規.

(2) μ に関して殆んどすべての λ, λ' $(\lambda \neq \lambda')$ について

$$a(\lambda)a(\lambda')^* = a(\lambda')^* a(\lambda), \quad b(\lambda)b(\lambda')^* = b(\lambda')^* b(\lambda).$$

このときもし $x \in L_1(M) \cap M$ に対して関数 $\lambda \longrightarrow a(\lambda)xb(\lambda)^*$ が Bochner 積分可能, 関数 $\lambda \longrightarrow a(\lambda)^* x b(\lambda)$ が弱可測 (つまり σ 弱可測) かつ

$$\int a(\lambda)\, x\, b(\lambda)^* \, d\mu = 0$$

ならば, 関数 $\lambda \longrightarrow a(\lambda)^* x b(\lambda)$ は弱積分可能 (つまり σ 弱積分可能) で

$$\int a(\lambda)^* x \, b(\lambda) \, d\mu = 0.$$

特に M が有限型で関数 $\lambda \longrightarrow a(\lambda)^* x b(\lambda)$ が弱積分可能ならば, μ を拡張された複素測度 (しかしハーンの分解はできるとする) としてよいし, a, b が $|\mu|$ に関して本質的に有界であるという条件を落してよい.

この定理から容易につぎの系が得られる:

系1 $(S, \mathfrak{F})$ を可測空間, μ を $(S, \mathfrak{F})$ 上の拡張された複素測度, A, B を S 上の行列値関数でつぎの条件を満たすものとする:

(3) μ に関し殆んどすべての λ について $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ が正規.

(4) μ に関し殆んどすべての λ, λ' $(\lambda \neq \lambda')$ について

$$A(\lambda)A(\lambda')^* = A(\lambda')^*A(\lambda), \quad B(\lambda)B(\lambda')^* = B(\lambda')^*B(\lambda).$$

このときもし行列 X に対して関数 $\lambda \longrightarrow A(\lambda)XB(\lambda)^*$, $\lambda \longrightarrow A(\lambda)^*XB(\lambda)$ が積分可能で

$$\int A(\lambda)XB(\lambda)^*d\mu = 0$$

ならば

$$\int A(\lambda)^*XB(\lambda)\,d\mu = 0.$$

系2 $(S, \mathfrak{F})$ を可測空間, μ を $(S, \mathfrak{F})$ 上の複素測度, A, B をヒルベルト空間 H 上の, $|\mu|$ に関して本質的に有界な有界作用素値関数でつぎの条件を満たすものとする:

(5) μ に関し殆んどすべての λ について $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ が亜正規.

(6) μ に関し殆んどすべての λ, λ' $(\lambda \neq \lambda')$ について

$$A(\lambda)A(\lambda')^* = A(\lambda')^*A(\lambda), \quad B(\lambda)B(\lambda')^* = B(\lambda')^*B(\lambda).$$

このときもし H 上の核型作用素 X に対して関数 $\lambda \longrightarrow A(\lambda)XB(\lambda)^*$ が Bochner 積分可能, 関数 $\lambda \longrightarrow A(\lambda)^*XB(\lambda)$ が弱可

測かつ

$$\int A(\lambda)\times B(\lambda)^* d\mu = 0$$

ならば，関数 $\lambda \longrightarrow A(\lambda)^*\times B(\lambda)$ は弱積分可能で

$$\int A(\lambda)^*\times B(\lambda)\,d\mu = 0.$$

3. 定理の証明の概略を述べよう．

$$x(\lambda) = a(\lambda)\times b(\lambda)^*,\ y(\lambda) = a(\lambda)^*\times b(\lambda) \qquad (\lambda\in S)$$

とおく．任意の $\varphi\in M^*$ を定める．関数 x は Bochner 積分可能，関数 $\varphi\circ y$ は可測かつ $|\mu|$ に関して本質的に有界であるから，任意の自然数 n に対して S のある分割 $\Delta_n = \{S_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，$\lambda_k \in S_n^k$ を選んで

$$x_n(\lambda) = x(\lambda_k)\ ,\quad y_n(\lambda) = y(\lambda_k) \qquad (\lambda\in S)$$

とおくとき x_n は Bochner 積分可能で

$$\int\|x_n(\lambda) - x(\lambda)\|\,d|\mu| < \frac{1}{n} \quad \text{かつ}$$

$$|\varphi(y_n(\lambda)) - \varphi(y(\lambda))| < \frac{1}{n}.$$

しかるに

$$\int_{\bigcup_{k=m+1}^{\infty} S_n^k} x_n(\lambda)\,d\mu \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

$$\int_{\bigcup_{k=m+1}^{\infty} S_n^k} \varphi(y_n(\lambda))\,d\mu \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

であるから

$$\left\|\int_{\bigcup_{k=m_n+1}^{\infty} S_n^k} x_n(\lambda)\,d\mu\right\| < \frac{1}{n} \quad と$$

$$\left| \int_{\bigcup_{k=m_n+1}^{\infty} S_n^k} \varphi(y_n(\lambda))\, d\mu \right| < \frac{1}{n}$$

を満たす自然数 m_n を定めることができる．したがって

$$\left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k)\, x(\lambda_k) \right\| = \left\| \int (\chi(\lambda) x_n(\lambda) - x(\lambda))\, d\mu \right\|$$

$$\leqq \left\| \int (1-\chi(\lambda)) x_n(\lambda)\, d\mu \right\| + \int \| x_n(\lambda) - x(\lambda) \|\, d|\mu|$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n},$$

ただし χ は $\bigcup_{k=m_n+1}^{\infty} S_n^k$ の特性関数である．

いま $\varphi = \psi + \psi'$ ($\psi \in M_*$, $\psi' \in M_*^{\perp}$) とする．また $\{a_i\} \subset L_1(M) \cap M$, $\psi - a_i\tau \to 0$ とする（τ は M の trace).

このとき

$$\psi\left(\left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k)\right)^* \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k)\right)\right)$$

$$\leqq (\psi - a_i\tau)\left(\left(\sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k)\right)^* \left(\sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k)\right)\right)$$

$$+ \tau\left(a_i \left(\sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k)\right)^* \left(\sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k)\right)\right)$$

$$\leqq \| \psi - a_i \| \left\| \sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k) \right\|^2 + \|a_i\| \left\| \sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k) \right\|_2^2 .$$

ここで条件 (1), (2) から不等式

$$\left\| \sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k) \right\|_2 \leqq \left\| \sum_k \mu(S_n^k)\, x(\lambda_k) \right\|_2$$

を示すことができる．その計算は長くなるので割愛するが，その方法は本質的に Berberian [1] の方法と同じである．

更に

$$\left\| \sum_k \mu(S_n^k)\, x(\lambda_k) \right\|_2^2 \leqq \left\| \sum_k \mu(S_n^k)\, x(\lambda_k) \right\| \left\| \sum_k \mu(S_n^k)\, x(\lambda_k) \right\|_1$$

$$< \frac{2}{n} \left\| \sum_k \mu(S_n^k)\, x(\lambda_k) \right\|_1 .$$

しかるに $\left\| \sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k) \right\|^2$, $\left\| \sum_k \mu(S_n^k)\, x(\lambda_k) \right\|_1$ は一様に有界であるから各 n に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \psi\left(\left(\sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k)\right)^* \left(\sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k)\right)\right) \leqq \|\psi - a_\varepsilon \tau\| \cdot K < \varepsilon,$$

ただし K は $\left\| \sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k) \right\|^2$ の一つの上界である．ε が任意であるから実は

$$\psi\left(\left(\sum \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k)\right)^* \left(\sum \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k)\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

したがって

$$\psi\left(\sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ;$$

よって

$$\varphi\left(\sum_k \mu(S_n^k)\, y(\lambda_k)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

したがって

$$\begin{aligned} \left| \int \varphi(y_n(\lambda))\, d\mu \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_n^k)\, \varphi(y(\lambda_n)) \right| \\ &\leqq \left| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k)\, \varphi(y(\lambda_n)) \right| + \left| \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \mu(S_n^k)\, \varphi(y(\lambda_n)) \right| \\ &< \left| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k)\, \varphi(y(\lambda_n)) \right| + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 . \end{aligned}$$

一方

$$\int \varphi(y_n(\lambda))\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \varphi(y(\lambda))\, d\mu$$

であるから

$$\int \varphi(y(\lambda))\, d\mu = 0 .$$

定理の残りの部分は上の議論を少し変更すれば示される．

4. 定理の積分を作用素環の強位相に関する積分として議論したいところである（Mを有限型に限れば上のtechniqueが通用する）.

References

[1] S. K. Berberian. Extensions of a theorem of Fuglede and Putnam, Proc. AMS 71 (1978), 113 – 114.

[2] R. L. Moore, D. D. Rogers and T. T. Trent, A note on intertwining M-hyponormal operators, Proc. AMS 83 (1981), 514 – 516.

[3] K. Takahashi, On the converse of the Fuglede-Putnam theorem, Acta Sci. Math. 43 (1981), 123-125