

多値確率変数に対する大数の強法則

東理大理工 日合文雄 (Fumio Hiai)

§ 1. 序論

大数の法則は中心極限定理と並んで確率論において最も重要な収束定理である。大数の強法則には大別して2通りのものがある。才1は独立同分布な確率変数列に対する大数の強法則であり、才2は平均が等しくある L^p -ノルム条件をもつ独立な確率変数列に対する大数の強法則である。才1の強法則はバナッハ空間に値をとる確率変数列に対しても一般的に成立する。しかし、才2の強法則はバナッハ空間に値をとる確率変数列に対して無条件には成立しなくて、その成立にはバナッハ空間のある種の幾何学的条件が関連する。

(Ω, \mathcal{A}, P) を確率測度空間とし、 \mathcal{X} をバナッハ空間とする。 $L^p(\Omega; \mathcal{X})$ を \mathcal{X} -値の L^p -空間とする ($1 \leq p < \infty$)。つまり $L^p(\Omega; \mathcal{X})$ は強可測な $f: \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ で $\|f(\cdot)\| \in L^p$ を満たすものからなる空間である。バナッハ空間 \mathcal{X} が B-凸 であると

は, ある $\delta > 0$ と整数 $k \geq 2$ が存在して任意の $x_1, \dots, x_k \in \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ に対して

$$\inf_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i \right\| \leq (1-\delta)k$$

が成立することである。 $\{\Gamma_n\}$ をランダム符号の列, i.e., ± 1 の値を確率 $1/2$ ずつでとる独立同分布な確率変数列とする。 X がタイプ p ($1 \leq p \leq 2$) であるとは, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$ を満たす任意の列 $\{x_n\} \subset X$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n x_n$ が a.s. 収束することである。これは, ある $C > 0$ が存在して任意の $x_1, \dots, x_n \in X$ ($n \geq 1$) に対して

$$E \left\| \sum_{i=1}^n \Gamma_i x_i \right\|^p \leq C \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p$$

が成立することと同値である。ヒルベルト空間はタイプ 2 であり, 一様凸なバナッハ空間は B-凸である。また X が B-凸であることと X がタイプ p ($\exists p > 1$) であることは同値である。

バナッハ空間に値をとる確率変数列に対する大数の強法則に関して, 主な結果を次にあげておく。

(I) $\{f_n\} \subset L^1(\Omega; X)$ が独立同分布ならば

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(\omega) - x \right\| \rightarrow 0 \text{ a.s. } (x = E(f_n)).$$

(II) 次の条件は同値である:

(i) $\{f_n\} \subset L^2(\Omega; X)$ が独立で $E(f_n) = 0$ ($n \geq 1$) かつ

$$\sup_n E \|f_n\|^2 < \infty \text{ ならば } \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(\omega) \right\| \rightarrow 0 \text{ a.s.}$$

(ii) \mathcal{X} は B -凸である。

(III) $1 \leq p \leq 2$ のとき, 次の条件は同値である:

(i) $\{f_n\} \subset L^p(\Omega; \mathcal{X})$ が独立で $E(f_n) = 0$ ($n \geq 1$) かつ
 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} E \|f_n\|^p < \infty$ ならば $\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(\omega) \| \rightarrow 0$ a.s.

(ii) \mathcal{X} はタイプ p である。

上の結果(I)-(III)の証明および関連結果については, Beck [4], Hoffmann-Jørgensen [13, 14], Woyczyński [18] などを
 見よ。

本論では多値確率変数に対する大数の強法則について考察する。ここで多値確率変数とはバナッハ空間の閉集合(とくにコンパクト集合)を値とする確率変数のことであり, バナッハ空間に値をとる通常の確率変数を特別の場合として含む。多値の大数の強法則はまず \mathbb{R}^n のコンパクト集合を値とする独立同分布な確率変数列に対して Artstein-Vitale [2] により得られた。その後の研究としては, Cressie [7], Hess [11], Puri-Ralescu [16], Giné-Hahn-Zinn [10] などがあ
 る。これらが扱っている多値の大数の強法則はすべて独立同分布の場合である。本論ではより一般ないくつかの多値の大数の強法則を与える。とくに同分布とは限らない場合も考察する。

§2. 多値確率変数

以下常に (Ω, \mathcal{A}, P) を確率測度空間とし, \mathcal{X} を可分な実バナッハ空間とする. \mathcal{X}^* を \mathcal{X} の共役空間とする. 次の記号を用いる:

$$\mathcal{K}(\mathcal{X}) = \{ X \subset \mathcal{X} : \text{空でない閉集合} \},$$

$$\mathcal{K}_c(\mathcal{X}) = \{ X \subset \mathcal{X} : \text{空でない閉凸集合} \},$$

$$\mathcal{C}(\mathcal{X}) = \{ X \subset \mathcal{X} : \text{空でないコンパクト集合} \},$$

$$\mathcal{C}_c(\mathcal{X}) = \{ X \subset \mathcal{X} : \text{空でないコンパクト凸集合} \}.$$

$X, Y \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ に対して

$$h(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X) \right\},$$

$$\|X\| = h(X, \{0\}) = \sup_{x \in X} \|x\|,$$

$$\Delta(X, x^*) = \sup_{x \in X} \langle x, x^* \rangle, \quad x^* \in \mathcal{X}^*.$$

$h(X, Y)$ は X と Y のハウスドルフ距離であり, $\Delta(X, \cdot)$ は X の支持関数といわれる.

多値関数 $F: \Omega \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{X})$ は任意の開集合 $O \subset \mathcal{X}$ に対して

$$F^{-1}(O) = \{ \omega \in \Omega : F(\omega) \cap O \neq \emptyset \} \in \mathcal{A}$$

のとき 可測 といわれる. 可測な多値関数を 多値確率変数 (または 確率集合) と呼ぶ. μ 乗可積分な F の選択関数の全体を S_F^p で表す. すなわち

$$S_F^p = \{ f \in L^p(\Omega; \mathcal{X}) : f(\omega) \in F(\omega) \text{ a.s.} \}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

さて

$\mathcal{L}^p[\Omega; K(X)] = \{F: \Omega \rightarrow K(X) \text{ 可測}, \|F(\cdot)\| \in L^p\}$, $1 \leq p < \infty$
 とすると, $\mathcal{L}^p[\Omega; K(X)]$ は 距離 $H_p(F, G) = \left\{ \int_{\Omega} \rho(F(\omega), G(\omega))^p dP \right\}^{1/p}$
 により完備距離空間となる。ただし $F(\omega) = G(\omega)$ a.s. のとき
 $F = G$ とする。さらに

$$\mathbb{L}^p[\Omega; K_c(X)] = \{F \in \mathcal{L}^p[\Omega; K_c(X)] : \text{強可測}\}$$

とする。ここで F が強可測とは F が単純多値函数列の a.s.
 極限となることである。これは $N \in \mathcal{A}$, $P(N) = 0$ が存在して
 $\{F(\omega) : \omega \in \Omega \setminus N\}$ が $K(X)$ で可分となることと同値である。
 ただし $K(X)$ 上でハウスドルフ距離 ρ から入る位相を考えてい
 る。 $C(X)$ は ρ に関して可分だから $F \in \mathcal{L}^p[\Omega; C(X)]$ はすべて
 強可測である。次の包含関係がある:

$$\mathbb{L}^p(\Omega; X) \subset \mathcal{L}^p[\Omega; C_c(X)] \subset \mathbb{L}^p[\Omega; K_c(X)] \subset \mathcal{L}^p[\Omega; K_c(X)]$$

$$\mathcal{L}^p[\Omega; C(X)] \subset \mathcal{L}^p[\Omega; K(X)]$$

X が無限次元のとき $\mathbb{L}^p[\Omega; K_c(X)] \neq \mathcal{L}^p[\Omega; K_c(X)]$ が普通で
 ある。

今 $K_{ec}(X) = \{X \in K_c(X) : \text{有界集合}\}$ とする。 $C(U^*)$ を $U^* =$
 $\{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ 上の有界連続函数からなるバナッハ空
 間とする。 $X \in K_{ec}(X)$ ならば $\rho(X, \cdot) \in C(U^*)$ である。
 $\{\rho(X, \cdot) : X \in K_{ec}(X)\}$ で生成される $C(U^*)$ の閉部分空間を
 \hat{X} で書くと, $X \mapsto \rho(X, \cdot)$ により $K_{ec}(X)$ はバナッハ空間 \hat{X}
 に次のように埋入される:

- (i) 埋入は等距離, i.e., $h(X, Y) = \sup_{x^* \in U^*} |\Delta(X, x^*) - \Delta(Y, x^*)|$,
 (ii) 和は保存される, i.e., $\Delta(\mathcal{d}(X+Y), x^*) = \Delta(X, x^*) + \Delta(Y, x^*)$,
 (iii) 非負の実数倍は保存される, i.e., $\Delta(\alpha X, x^*) = \alpha \Delta(X, x^*)$, $\alpha \geq 0$.

これにより $\mathbb{L}^p[\Omega; K_c(\mathcal{X})]$ は $L^p(\Omega; \hat{\mathcal{X}})$ の中に自然に埋入される。この埋入は等距離であり, 和および非負の実数倍は保存される。従って $\mathbb{L}^p[\Omega; K_c(\mathcal{X})]$ (とくに $\mathcal{L}^p[\Omega; \mathcal{C}_c(\mathcal{X})]$) に属する多値確率変数はバナッハ空間に値をとる通常の確率変数とみなすことができる。

多値確率変数 $F: \Omega \rightarrow K(\mathcal{X})$ の平均値は F の積分

$$\int_{\Omega} F dP = \left\{ \int_{\Omega} f dP : f \in S_F^1 \right\}$$

で定義される。多値可測関数の積分は Aumann [3] により導入された。後で必要となる多値積分の結果を次におげる。さらに詳しくは Debreu [9], Castaing [5], Hiai-Umegaki [12] などを見よ。

$F, G: \Omega \rightarrow K(\mathcal{X})$ は可測で $S_F^1 \neq \emptyset, S_G^1 \neq \emptyset$ とする。

(1°) $\mathcal{d} \int_{\Omega} (F+G) dP = \mathcal{d} \left(\int_{\Omega} F dP + \int_{\Omega} G dP \right)$, $t \in E^+ L(F+G)(\omega)$
 $= \mathcal{d}(F(\omega) + G(\omega))$.

(2°) $\mathcal{d} \int_{\Omega} \bar{c} F dP = \bar{c} \int_{\Omega} F dP$, $t \in E^+ L(\bar{c} F)(\omega) = \bar{c} F(\omega)$.

(3°) $\Delta(\mathcal{d} \int_{\Omega} F dP, x^*) = \int_{\Omega} \Delta(F(\omega), x^*) dP$, $x^* \in \mathcal{X}^*$.

(4°) $F \in \mathbb{L}^1[\Omega; K_c(\mathcal{X})]$ ならば $\mathcal{d} \int_{\Omega} F dP$ は $F \in L^1(\Omega; \hat{\mathcal{X}})$ として t ボルネー積分に等しい。

(5°) $F \in \mathcal{L}^1[\Omega; \mathcal{C}_c(\mathcal{X})]$ ならば $\int_{\Omega} F dP \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$.

(6°) $F \in \mathcal{L}^1[\Omega; K_c(\mathcal{X})]$ で F の値がすべて弱コンパクトならば $\int_{\Omega} F dP$ は弱コンパクト凸集合である。

$K(\mathcal{X})$ 上の σ -集合体としてすべての開集合 $O \subset \mathcal{X}$ に対する $\{X \in K(\mathcal{X}) : X \cap O \neq \emptyset\}$ の全体で生成される σ -集合体を採用し, それを \mathcal{G} とする。多値函数 $F: \Omega \rightarrow K(\mathcal{X})$ が可測であることは $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ に関して可測であることを意味する。 $\mathcal{G} | \mathcal{C}(\mathcal{X})$ は $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ のボレル σ -集合体と一致し, またすべての開集合 O に対する $\{X \in \mathcal{C}(\mathcal{X}) : X \subset O\}$ の全体でも生成される ([6, Theorem II-10] を見よ)。 $\{F_n\}$ を多値確率変数 $F_n: \Omega \rightarrow K(\mathcal{X})$ の列とする。 $\{F_n\}$ が 独立 (または 同分布) であるとは $\{F_n\}$ が (Ω, \mathcal{A}, P) から $(K(\mathcal{X}), \mathcal{G})$ への可測函数列として独立 (または同分布) であることである。 F_n がすべて $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ に値をとるときは, $\{F_n\}$ の独立性はすべての開集合 $O_1, \dots, O_n \subset \mathcal{X}$ ($n \geq 1$) に対して

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\omega : F_i(\omega) \subset O_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(\{\omega : F_i(\omega) \subset O_i\})$$

が成立することと同値である。

$K(\mathcal{X})$ の中の列に対して, 距離 $\|\cdot\|$ による収束とは別に, Mosco [15] により導入されたより弱い収束を考える。 $\{X_n\} \subset K(\mathcal{X})$ に対して次のように定める:

$$s\text{-}\liminf X_n = \{x \in \mathcal{X} : \|x_n - x\| \rightarrow 0, \exists x_n \in X_n, n \geq 1\},$$

$w\text{-}\limsup X_n = \{x \in X : x_k \xrightarrow{w} x, \exists x_k \in X_{n_k}, n_1 < n_2 < \dots\}$,
 $X \in K(X)$ が存在して $\Delta\text{-}\liminf X_n = w\text{-}\limsup X_n$ のとき
 $X_n \rightarrow X$ と書く。

§3. 大数の強法則

まずいくつかの補題を用意する。

補題1 $\{X_n\} \subset \mathcal{C}(X)$ とする。ある $X \in \mathcal{C}_c(X)$ が存在して
 $h(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overline{co} X_i, X) \rightarrow 0$ ならば, $h(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, X) \rightarrow 0$.

証明 この補題は X が有限次元のとき [2] で与えられた。

$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とおく。 $h(\overline{co} Y_n, X) \rightarrow 0$ であるから $C \in \mathcal{C}_c(X)$ が
 存在して $Y_n \subset C (n \geq 1)$. よって $\{Y_n\}$ は $\mathcal{C}(X)$ で相対コンパクト
 であることが容易にわかる。 $Y \in \mathcal{C}(X)$ を $\{Y_n\}$ の任意の
 集積点とし, $h(Y_n, Y) \rightarrow 0$ とする部分列 $\{Y_{n_k}\} \subset \{Y_n\}$
 をとる。 X の点を分離する X^* の列 $\{x_k^*\}$ を $\|x_k^*\| \leq 2^{-k}$ のよ
 うにとり, 有界線形写像 $\Phi, \Phi_k (k \geq 1) : X \rightarrow \ell^1$ を次のよ
 うに定める:

$$\Phi(x) = (\langle x, x_1^* \rangle, \langle x, x_2^* \rangle, \dots),$$

$$\Phi_k(x) = (\langle x, x_1^* \rangle, \dots, \langle x, x_k^* \rangle, 0, 0, \dots), \quad x \in X.$$

$\Phi_k(X)$ は有限次元で,

$$\begin{aligned}
 h\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overline{co} \Phi_k(X_i), \Phi_k(X)\right) &= h(\Phi_k(\overline{co} Y_n), \Phi_k(X)) \\
 &\leq h(\overline{co} Y_n, X) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

だから $h(\overline{\Phi}_k(Y_n), \overline{\Phi}_k(X)) \rightarrow 0$ ($k \geq 1$). さらに

$h(\overline{\Phi}_k(Y_n), \overline{\Phi}_k(Y)) \leq h(Y_n, Y) \rightarrow 0$. よって $\overline{\Phi}_k(Y) = \overline{\Phi}_k(X)$

($k \geq 1$). $k \rightarrow \infty$ のとき $h(\overline{\Phi}_k(Y), \overline{\Phi}(Y)) \rightarrow 0$, $h(\overline{\Phi}_k(X), \overline{\Phi}(X))$

$\rightarrow 0$ だから $\overline{\Phi}(Y) = \overline{\Phi}(X)$. $\overline{\Phi}$ が 1 対 1 だから $Y = X$ を得

る. よって X は $\{Y_n\}$ の唯一つの集積点となるから, $h(Y_n, X)$

$\rightarrow 0$. ■

$W_c(\mathfrak{X}) = \{X \subset \mathfrak{X} : \text{空でない弱コンパクト凸集合}\}$ とおく.

各 $X \in W_c(\mathfrak{X})$ と $x^* \in \mathfrak{X}^*$ に対して, $T(X, x^*) \in W_c(\mathfrak{X})$ を

$$T(X, x^*) = \{x \in X : \langle x, x^* \rangle = \Delta(X, x^*)\}$$

で定める.

補題 2 任意の $x^* \in \mathfrak{X}^*$ に対して, $T(\cdot, x^*) : W_c(\mathfrak{X}) \rightarrow W_c(\mathfrak{X})$

は $(\mathcal{G}_0 | W_c(\mathfrak{X}), \mathcal{G}_0 | W_c(\mathfrak{X}))$ -可測である.

証明 $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0 | W_c(\mathfrak{X})$ とおく. \mathfrak{X} の任意の開集合は閉球の

可算和で書けるから, 任意の開球 $V = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$ に

対して $\{X \in W_c(\mathfrak{X}) : T(X, x^*) \cap V \neq \emptyset\} \in \mathcal{G}_0$ を示せばよい.

$W_c(\mathfrak{X})$ から \mathbb{R} への写像 $X \mapsto \Delta(X, x^*)$ は \mathcal{G}_0 -可測である.

$O_n = \{x : \|x - x_0\| < r + \frac{1}{n}\}$ ($n \geq 1$) とおいて, $X \in W_c(\mathfrak{X})$

の弱列的コンパクト性から

$$\{X \in W_c(\mathfrak{X}) : X \cap V \neq \emptyset\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \in W_c(\mathfrak{X}) : X \cap O_n \neq \emptyset\} \in \mathcal{G}_0.$$

さらに任意の開球 V' に対して同様に $\{X \in W_c(\mathfrak{X}) : X \cap V \cap V' \neq \emptyset\}$

$\in \mathcal{G}_0$. よって $W_c(\mathfrak{X})$ から $W_c(\mathfrak{X})$ への写像 $X \mapsto X \cap V$ は

$(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_0)$ -可測である。故に

$$\begin{aligned} & \{X \in \mathcal{W}_c(\mathfrak{X}) : \tau(X, x^*) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{X \in \mathcal{W}_c(\mathfrak{X}) : X \cap V \neq \emptyset, \rho(X \cap V, x^*) = \rho(X, x^*)\} \\ & \in \mathcal{G}_0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

補題3 $F \in \mathcal{L}^1[\Omega; K(\mathfrak{X})]$ で " $\int_{\Omega} F dP = \{x\}$ ならば", $f \in L^1(\Omega; \mathfrak{X})$ が存在して $F(\omega) = \{f(\omega)\}$ a.s.

証明 \mathfrak{X} の点を分離する列 $\{x_k^*\} \subset \mathfrak{X}^*$ をとると, (3°) から

$$\int_{\Omega} \rho(F(\omega), x_k^*) dP = \langle x, x_k^* \rangle = \int_{\Omega} \inf_{x \in F(\omega)} \langle x, x_k^* \rangle dP$$

が成立する。よって $\rho(F(\omega), x_k^*) = \inf_{x \in F(\omega)} \langle x, x_k^* \rangle$ a.s.

($k \geq 1$)。故に a.s. $\omega \in \Omega$ に対して $F(\omega)$ は 1 点集合となり, 補題が示される。 \blacksquare

多値確率変数に対する大数の強法則を与える。独立同分布の場合から始める。

定理1 $\{F_n\} \subset \mathcal{L}^1[\Omega; C(\mathfrak{X})]$ が独立同分布ならば

$$h\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i(\omega), X\right) \rightarrow 0 \text{ a.s. } (X = \overline{\omega} \int_{\Omega} F_n dP).$$

証明 $\{\overline{\omega} F_n\}$ は $L^1(\Omega; \hat{\mathfrak{X}})$ の中の確率変数列とみて独立同分布である。 $\overline{\omega} F_n$ の $L^1(\Omega; \hat{\mathfrak{X}})$ における平均値は (2°), (4°) から X に等しい。よって §1 の (I) により $h\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overline{\omega} F_i(\omega), X\right) \rightarrow 0$ a.s. 従って補題1から $h\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i(\omega), X\right) \rightarrow 0$ a.s. \blacksquare

定理2 $\{F_n\} \subset \mathcal{L}^1[\Omega; K_c(\mathfrak{X})]$ が独立同分布で各 F_n の

値がすべて弱コンパクトならば

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i(\omega) \rightarrow X \text{ a.s. } (X = \int_{\Omega} F_n dP).$$

証明 $G_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i(\omega)$ ($n \geq 1$) とおく。(6°)から $\int_{\Omega} F_n dP$ は弱コンパクト凸集合である。任意の $x^* \in \mathfrak{X}^*$ に対して $\{\Delta(F_n(\cdot), x^*)\}$ は同分布だから (3°) より $X = \int_{\Omega} F_n dP$ は n に関係なく一定である。まず $X \subset s\text{-lim inf } G_n(\omega)$ a.s. を示す。 X がその *strongly exposed points* の閉凸包であり ([8, p. 106]) また $s\text{-lim inf } G_n(\omega)$ が閉凸だから、 X の任意の *exposed point* が a.s. $\omega \in \Omega$ に対して $s\text{-lim inf } G_n(\omega)$ に属することを示せばよい。 x を X の任意の *exposed point* とすると、 $T(X, x^*) = \{x\}$ とする $x^* \in \mathfrak{X}^*$ がとれる。補題 2 から $\{T(F_n(\cdot), x^*)\} \subset \mathcal{L}^1[\Omega; K_c(\mathfrak{X})]$ は独立同分布である。 $f \in S_{T(F_n(\cdot), x^*)}^1$ ならば $\int_{\Omega} f dP \in X$ で $\langle \int_{\Omega} f dP, x^* \rangle = \Delta(X, x^*)$ とするから $\int_{\Omega} f dP \in T(X, x^*) = \{x\}$ 。よって $\int_{\Omega} T(F_n(\omega), x^*) dP = \{x\}$ 。補題 3 から $f_n \in L^1(\Omega; \mathfrak{X})$ が存在して $T(F_n(\omega), x^*) = \{f_n(\omega)\}$ a.s. 従って $\{f_n\} \subset L^1(\Omega; \mathfrak{X})$ は独立同分布で $\int_{\Omega} f_n dP = x$ ($n \geq 1$)。§1の (I) により $\|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(\omega) - x\| \rightarrow 0$ a.s. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(\omega) \in G_n(\omega)$ a.s. から $x \in s\text{-lim inf } G_n(\omega)$ a.s. を得る。

次に $w\text{-lim sup } G_n(\omega) \subset X$ a.s. を示す。列 $\{x_j^*\} \subset \mathfrak{X}^*$ を $\langle x, x_j^* \rangle \leq \Delta(X, x_j^*)$ ($j \geq 1$) ならば $x \in X$ が成立す

るように選べる。各 j に対して $\{\Delta(F_n(\cdot), x_j^*)\} \subset L^1$ は独立同分布で (3°) から $\int_{\Omega} \Delta(F_n(\omega), x_j^*) dP = \Delta(X, x_j^*)$ ($n \geq 1$)。

よって $N \in \mathcal{A}$, $P(N) = 0$ が存在して $\Delta(G_n(\omega), x_j^*) \rightarrow \Delta(X, x_j^*)$ が任意の $j \geq 1$ と $\omega \in \Omega \setminus N$ に対して成立する。

$\omega \in \Omega \setminus N$, $x \in W\text{-}\limsup G_n(\omega)$ とすると, $x_k \in G_{n_k}(\omega)$ ($n_1 < n_2 < \dots$) がとれて $x_k \xrightarrow{W} x$ とする。

$$\langle x, x_j^* \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x_k, x_j^* \rangle \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(G_{n_k}(\omega), x_j^*) = \Delta(X, x_j^*),$$

$j \geq 1$

により $x \in X$ を得る。従って $W\text{-}\limsup G_n(\omega) \subset X$ a.s. ▀

次に同分布を仮定しない場合を考える。

定理3 \mathfrak{X} はタイプ p ($1 < p \leq 2$) とする。 $\{F_n\} \subset L^p[\Omega; \mathfrak{K}_c(\mathfrak{X})]$ が独立で各 F_n の値がすべて弱コンパクトであり $\int_{\Omega} F_n dP = X$ ($n \geq 1$) かつ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \int_{\Omega} \|F_n(\omega)\|^p dP < \infty$ ならば

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i(\omega) \rightarrow X \text{ a.s.}$$

証明 $G_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i(\omega)$ とおく。 X の任意の exposed point x に対して, 定理2の証明と同様にして, 独立な $\{f_n\} \subset L^1(\Omega; \mathfrak{X})$ が存在して $f_n(\omega) \in F_n(\omega)$ a.s., $\int_{\Omega} f_n dP = X$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \int_{\Omega} \|f_n(\omega)\|^p dP < \infty$. \mathfrak{X} がタイプ p であるから §1の(III) により $\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(\omega) - x \| \rightarrow 0$ a.s. よって $x \in S\text{-}\liminf$

$G_n(\omega)$ a.s. 従って $X \subset \lambda\text{-}\liminf G_n(\omega)$ a.s. を得る。また $\omega\text{-}\limsup G_n(\omega) \subset X$ a.s. の証明も定理2と同様である。 ■

定理4 \mathfrak{X} は有限次元とし, $1 < p \leq 2$ とする。 $\{F_n\} \subset \mathcal{L}^p[\Omega; K(\mathfrak{X})]$ が独立で $\omega \int_{\Omega} F_n dP = X$ ($n \geq 1$) から $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \int_{\Omega} \|F_n(\omega)\|^p dP < \infty$ ならば

$$h\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i(\omega), X\right) \rightarrow 0 \text{ a.s.}$$

証明 \mathfrak{X} が有限次元のとき, $\{X_n\} \subset \mathcal{C}_c(\mathfrak{X})$ に対して, $h(X_n, X) \rightarrow 0$ であるための必要十分条件は $X_n \rightarrow X$ から $X \in \mathcal{C}_c(\mathfrak{X})$ ([17]). 従って定理4は定理3と補題1から示される。 ■

最後にいくつかの注意と問題を与えておく。

注意 (1) $\{F_n\} \subset L^1[\Omega; K_c(\mathfrak{X})]$ が $K_c(\mathfrak{X})$ へのボレル可測関数列として独立同分布ならば, $\{F_n\} \subset L^1(\Omega; \hat{\mathfrak{X}})$ とみることにより $h\left(\frac{1}{n} d \sum_{i=1}^n F_i(\omega), X\right) \rightarrow 0$ a.s. ($X = d \int_{\Omega} F_n dP$) が得られる。

(2) \mathfrak{X} が回帰的ならば, 定理2, 3において F_n の値が弱コンパクトであるという仮定は当然不要である。

(3) 定理1は [2, 10, 16] の結果をすべて含む。Artstein [1] は補題1の別証を与え定理1を独立に証明している。

問題 (1) 定理2, 3において F_n の値が弱コンパクトであるという仮定なしに $\frac{1}{n} d \sum_{i=1}^n F_i(\omega) \rightarrow d X$ a.s. が成立する

か？

(2) \mathcal{X} はタイプ p ($1 < p \leq 2$) とする. $\{F_n\} \subset \mathcal{L}^p[\Omega; \mathcal{C}(\mathcal{X})]$ が独立で $\overline{\text{co}} \int_{\Omega} F_n dP = X$ ($n \geq 1$) かつ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \int_{\Omega} \|F_n(\omega)\|^p dP < \infty$ ならば $R\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i(\omega), X\right) \rightarrow 0$ a.s. が成立するか？ 補題 1 から $\{F_n\} \subset \mathcal{L}^p[\Omega; \mathcal{C}_c(\mathcal{X})]$ の場合を示せばよい. \mathcal{X} がタイプ p で $\hat{\mathcal{X}}$ (または $\{\|\cdot\|(\mathcal{X}, \cdot) : \mathcal{X} \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})\}$ で生成される部分空間 $\tilde{\mathcal{X}}$) はもはやタイプ p でない (B -凸でない) から, 定理 1 の証明のように $L^p(\Omega; \tilde{\mathcal{X}})$ に埋入する方法はうまくいかない. 例えば \mathcal{X} が無限次元ヒルベルト空間のとき, \mathcal{X} はタイプ 2 であるが $\tilde{\mathcal{X}}$ は B -凸でない.

文献

- [1] Z. Artstein, Convexification in limit laws of random sets in Banach spaces, Preprint.
- [2] Z. Artstein and R.A. Vitale, A strong law of large numbers for random compact sets, Ann. Prob. 3 (1975), 879-882.
- [3] R. J. Aumann, Integrals of set-valued functions, J. Math. Anal. Appl. 12 (1965), 1-12.
- [4] A. Beck, On the strong law of large numbers, in Ergodic Theory (F. B. Wright, Ed.), pp. 21-53, Academic

Press, New York, 1963.

- [5] C. Castaing, Quelques résultats de compacité liés à l'intégration, *Bull. Soc. Math. France* 31 (1972), 73-81.
- [6] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math., No. 580, Springer, 1977.
- [7] N. Cressie, A strong limit theorem for random sets, *Suppl. Adv. Appl. Prob.* 10 (1978), 36-46.
- [8] M. M. Day, *Normed Linear Spaces*, 3rd Edition, Springer, Berlin, 1973.
- [9] G. Debreu, Integration of correspondences, in *Proc. Fifth Berkeley Sympos. on Math. Statist. and Prob.*, 1966, Vol. II, Part I, pp. 351-372.
- [10] E. Giné, M. G. Hahn and J. Zinn, Limit theorems for random sets: An application of probability in Banach space results, in *Probability in Banach Spaces IV* (A. Beck and K. Jacobs, Ed.), Lecture Notes in Math. No. 990, pp. 112-135, Springer, 1983.
- [11] C. Hess, Théorème ergodique e loi forte des grands nombres pour des ensembles aléatoires,

- C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A (1979), 519-522.
- [12] F. Hiai and H. Umegaki, Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions, *J. Multivariate Anal.* 7 (1977), 149-182.
- [13] J. Hoffmann-Jørgensen, Probability in Banach spaces, in *Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour VI-1976*, *Lecture Notes in Math.*, No. 598, pp. 1-186, Springer, 1977.
- [14] J. Hoffmann-Jørgensen, Probability and geometry of Banach spaces, in *Functional Analysis* (D. Butković et al., Ed.), *Lecture Notes in Math.*, No. 948, pp. 164-229, Springer, 1982.
- [15] U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Ad. Math.* 3 (1969), 510-585.
- [16] M. L. Puri and D. A. Ralescu, Strong law of large numbers for Banach space valued random sets, *Ann. Prob.* 11 (1983), 222-224.
- [17] G. Salinetti and R. J.-B. Wets, On the convergence of sequences of convex sets in finite dimensions, *SIAM Review* 21 (1979), 18-33.

[18] W. A. Woyczyński, *Geometry and martingales in Banach spaces - Part II: Independent increments*, in *Probability on Banach Spaces* (J. Kuelbs, Ed.), pp. 267-517, Dekker, New York, 1978.