

Title	Banach quasi-sublatticeについて(応用函数解析の研究)
Author(s)	宮島, 静雄
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 504: 54-65
Issue Date	1983-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/103720
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Banach quasi-sublattice について

東京理科大学 宮島静雄 (Shizuo Miyajima)

§1 序

(vector) sublattice の概念の拡張として次のものが自然に考えられる:

定義 1. vector lattice E の部分空間 F が E から自然に導かれる順序に関してまた vector lattice になるとき, F を E の quasi-sublattice といい。

F を E の quasi-sublattice とするとき, $x, y \in F$ の F での上限, 下限をそれぞれ $x \vee_F y$, $x \wedge_F y$ で表わす。 $x, y \in F$ の E での上限と下限を通常のように $x \vee y$ と $x \wedge y$ で表わすと明らかに $x \vee_F y \geq x \vee y$, $x \wedge_F y \leq x \wedge y$ が成り立つ。

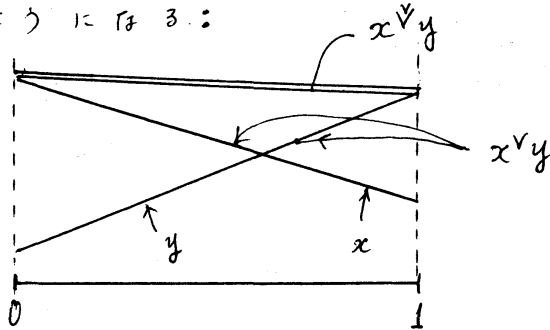
最も簡単な具体例において上記のことを図解してみよう。

$E = C([0, 1])$ を通常のように順序を入れた vector lattice とし,

F を $[0, 1]$ 上の affine 関数の全体とする。すなわち

$$F = \{ f \in E ; \exists a, b \in \mathbb{R} \forall x \in [0, 1] f(x) = ax + b \}.$$

このとき F は E の quasi-sublattice となり $x \vee y$ と $x \vee y$ の関係は下図のようになる:



また一般に E を vector lattice とし, P を E の上で定義された positive projection とする (i.e., $P: E \rightarrow E$ linear, $P^2 = P$, $x \geq 0 \Rightarrow Px \geq 0$). このとき P の値域 F は E の quasi-sublattice である。実際 $x, y \in F$ の F での上限 $P(x \vee y)$ で与えられることがよく分る。

一方上の affine 関数の例において $f \in E$ に対して $f(0)$ と $f(1)$ をそれぞれ $0, 1$ での値とする affine 関数を Pf とすると P は E 上の positive projection となり $F = P$ の値域 となる。

ここでは一例のみ挙げたが, 多くの自然な例においては quasi-sublattice を値域に持つ positive projection が存在している。そこで一般の quasi-sublattice においてその構造は, quasi-sublattice の概念の推移性から, 本物の sublattice をとることと positive projection の値域をとることの組み合わせで与えられるのではな...かと予想される。§2 においてこれを確かめ, §3 で Banach lattice において並行的に定義される Banach

quasi-sublattice の構造を調べる。

§ 2 quasi-sublattice

F を E の quasi-sublattice とする (§ 1 定義 1)。 § 1 で定義した記号 $x \vee y$, $x \wedge y$ に加えて以下で付次の記号を用いる：
 $x^{++} := x \vee 0$, $x^{--} := (-x) \vee 0$, $|x|_F := x \vee (-x)$
 $\Rightarrow x \in F$ 。

lemma 1. F は vector lattice E の quasi-sublattice とする。

F の元の有限族 $\{a_{ij}\}_{i \in I, j \in J}$, $\{t_{kl}\}_{k \in K, l \in L}$ が

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} = \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} t_{kl}$$

をみたすとする。

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} = \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} t_{kl}$$

が成り立つ。

proof) 最初に $a_{ij} \in F$ $\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \geq 0$ のとき $\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \geq 0$

が成り立つことを示そう。実際 E における分配則から

$$\bigwedge_{\sigma \in \Sigma} \bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)} = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \geq 0$$

が成り立つ、 $\Rightarrow \Sigma = J^I$ 。よ、任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し

$$\bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)} \geq 0$$

となり \vee と \wedge の関係から $\bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)} \geq 0$ 。これより F にお

ける分配則を用いて

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} = \bigwedge_{\sigma \in \Sigma} \bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)} \geq 0$$

を得る。

$$\begin{aligned} \text{次に } \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} &= \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} b_{kl} \text{ にも } \varepsilon \text{ の } i \in I \text{ を固定すると,} \\ \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} b_{kl} &\geq \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \text{ が成り立つ } b_{kl} \text{ である。} \\ \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} (b_{kl} - \bigwedge_{j \in J} a_{ij}) &\geq 0 \end{aligned}$$

可言える。前半の \geq の $b_{kl} - \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \in F$ に注意)

$$\bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} (b_{kl} - \bigwedge_{j \in J} a_{ij}) \geq 0$$

となる。これから

$$\bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} b_{kl} \geq \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij}$$

を得るが対称性から上式で等号が成り立つ。//

Theorem 1. F を vector lattice E の quasi-sublattice とする。
 F_0 を F の生成する E の sublattice とすると、 F_0 上で定義された positive projection P で値域が F となるものが存在する。
 更に P は F_0 から F への写像として lattice homomorphic にとれる。

$$\text{proof) } F_0 = \left\{ \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} ; I, J \text{ finite set, } a_{ij} \in F \right\}$$

と表わされる (Bleier, p. 74) ことと、lemma 1 から

$$P : \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \longmapsto \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \quad (I, J \text{ finite, } a_{ij} \in F)$$

は F_0 上で定義された写像となる。 $P^2 = P$ なることは明らかであり、 $P \geq 0$ も lemma 1 の証明中で示されている。

P が linear であることも分配則を用いて証明される。定理の最後の主張も同様。//

定理 1 の逆を述べておこう。

Proposition 1. E が vector lattice で P が E 上で定義され
 E positive projection とする。このとき P の値域 PE は E の
quasi-sublattice となり PE の元の有限族 $\{a_j\}_{j \in J}$ に対し

$$P\left(\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_j\right) = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_j$$

が成り立つ。

Remark: Theorem 1 は quasi-sublattice が常に sublattice
をとり、更に positive projection の値域をとるといふ二回の操
作で得られることを示している。

§3. Banach quasi-sublattice

quasi-sublattice の概念に Banach lattice のカテゴリ - で対
応するものを次のように定義する:

定義 2. Banach lattice E の閉部分空間 F が E の Banach
quasi-sublattice であるとは F が E から自然に導入される順序
ノルムに関して Banach lattice になることを言う。

明らかに F が E の Banach quasi-sublattice であることは F
が E の quasi-sublattice で $\forall x \in F \quad \| |x|_F \| = \|x\|$ が成り立つ
ことと同等である。これから P を E 上の $\|P\| \leq 1$ なる

positive projection とすると, P の値域は E の Banach quasi-sublattice となる。も, と具体的には Banach quasi-sublattice の例として $E = C(\bar{D})$ ($D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$) としたとき $F = \{f \in E : \Delta f = 0 \text{ in } D\}$ としたときがある。この例において $I = \{f \in E; f = 0 \text{ on } \partial D\}$ とし $\pi: E \rightarrow E/I$ を canonical surjection とすると, $\pi(F)$ は E/I の sublattice であり, $\pi|_F$ は isometric であることに注意しよう (最大値原理)。

Theorem 2. F を Banach lattice E の Banach quasi-sublattice とし, \tilde{F} を F の生成する E の closed vector sublattice とする。このとき次の a), b) は同値:

(a) E の closed ideal I での canonical surjection $\pi: E \rightarrow E/I$ の F への制限が isometric かつ F から E/I への単射同型となるものが存在する。

(b) positive projection $P \in \mathcal{L}(\tilde{F})$ での $\|P\| \leq 1$ かつ値域が F となるものが存在する。

proof) (a) \Rightarrow (b): I を (a) の条件をみたす ideal, π を canonical surjection $E \rightarrow E/I$ とする。 $\{a_{ij}\}_{i \in I, j \in J}$ を F の元の有限族とすると $\|\bigvee_i \bigwedge_j a_{ij}\| \geq \|\pi(\bigvee_i \bigwedge_j a_{ij})\| = \|\bigvee_i \bigwedge_j \pi(a_{ij})\| = \|\pi(\bigvee_i \bigwedge_j a_{ij})\| = \|\bigvee_i \bigwedge_j a_{ij}\|$ が成り立つ。これは,

Theorem 1 の写像 P が \tilde{F} から F への上への contractive positive projection に一意的に拡張できることを示しているのだから (b) が成り立つ。

(b) \Rightarrow (a): P を \tilde{F} から F へ作用素として見ると, § 2 Proposition 1 から lattice homomorphic である。従って $\text{Ker } P$ は \tilde{F} の closed ideal となり明らかに $\forall x \in F$ に対し $x^{++} - x^+$, $|x|_F - |x|$ は $\text{Ker } P$ に属する。 $I = \text{Ker } P$ として (a) が成立することを示すには上記のことから $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$ ($x \in F$, $\pi: E \rightarrow E/I$ は natural map) が成り立つことを見ればよい。
また $x \in F$ に対して

$$\|\pi(x)\| = \|\pi(|x|)\| = \|\pi(|x|_F)\|$$

から $\|x\| = \||x|_F\|$ だから $F \ni x \geq 0$ に対し $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$ が言えれば十分である。そこで $F \ni x \geq 0$ とし任意の $y \in I$ をとると $(x+y)^+ \geq (x-|y|)^+$ より

$$\|x+y\| \geq \|(x+y)^+\| \geq \|(x-|y|)^+\| \geq \|P(x-|y|)^+\| = \|(P(x-|y|))^{++}\|$$

となり最後の項は $\|x\|$ に等しい。これより $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$ が示された。 //

次に positive linear functional の拡張可能性を示すための補題を示そう。

lemma 2. F を Banach lattice E の Banach quasi-sublattice

とすると任意の $x \in F$ に対し $\|x^{++}\| = \|x^+\|$ が成り立つ。

proof) $x \in F$ と $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し $x_n := nx^{++} + x \in F$

とおく。 $x_n = (n+1)x^{++} - x^- = nx^{++} + x^+ - x^-$ と書けるか

ら $|x_n|_F \geq (n+1)x^{++} + x^- \geq nx^{++} + x^+ + x^-$ と

$|x_n| \leq nx^{++} + x^+ + x^-$ が成り立つ。故に

$$\| |x_n|_F \| \geq \| (n+1)x^{++} + x^- \| \geq \| nx^{++} + x^+ + x^- \| \geq \| |x_n| \| = \| |x_n|_F \|$$

が言える。 $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ で $\| nx^{++} + x^+ + x^- \| = \| (n+1)x^{++} + x^- \|$

が成立する。これから帰納的に $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ で

$$\| nx^{++} + x^- \| \leq n \| x^+ \| + \| x^- \|$$

が証明される。上式を n で割り、 $n \rightarrow \infty$ とすれば $\| x^{++} \| \leq$

$\| x^+ \|$ を得るが、 $\| x^{++} \| = \| x^+ \|$ が示された。 //

Proposition 2. F を Banach lattice E の Banach quasi-

sublattice とすると、 F 上の任意の positive linear functional φ

はノルムを保って E 上の positive linear functional に拡張できる。

proof) $p(x) := \|\varphi\| \|x^+\|$ ($x \in E$) とおくと p は E 上

の positively homogeneous, subadditive function で、lemma 2 から

$\forall x \in F$ で $\varphi(x) \leq p(x)$ が成り立つ。Hahn-Banach の定理より

φ の E 上への linear extension ψ で $\forall x \in E$ $\psi(x) \leq p(x)$ を満

たすものが存在するが、これが条件をみたす拡張であること

は容易に分る。 //

Remark: Prop. 2 は sublattice の場合によく知られている結果 (Schaefer, p 86 Prop. 5.6) の拡張である。

特に AM-space の Banach quasi-sublattice については次のような事が分っている。

Proposition 3 F が AM-space E の Banach quasi-sublattice であれば F も AM-space となる。

(この証明は簡単なので略す。詳しくは Miyajima を見よ)

Theorem 3. F が AM-space E の Banach quasi-sublattice とすると, E の closed ideal I の natural map $\pi: E \rightarrow E/I$ の F への制限が F から E/I への isometric lattice homomorphism となるものが存在する。

proof) $X := \{f \in E'; f \geq 0, \|f\| \leq 1\}$, $Y := \{\varphi \in F'; \varphi \geq 0, \|\varphi\| \leq 1\}$ とおくと X, Y はそれぞれ E', F' の w^* -compact convex subset で, 各々の 0 でない端点全体を X_0, Y_0 とおくと, X_0, Y_0 の元は E, F 上の lattice homomorphic functional から成る。Proposition 2 は restriction

$$r: \begin{cases} X & \longrightarrow Y \\ f & \longmapsto f|_F \end{cases}$$

が全射であることを示している。ここで $\varphi \in Y_0$ に対して

$r^{-1}(\varphi)$ は X の空でない face となるから $r^{-1}(\varphi) \cap X_0 \neq \emptyset$ であることに注意しよう。

そこで $X_1 := r^{-1}(Y_0) \cap X_0$ とし, $I := \{x \in E; \forall f \in X_1, f(x) = 0\}$ とおくと I が定理の条件を満たすことを見よう。

まず $\pi: E \rightarrow E/I$ を natural map として $x \in F$ に対し $\|x\| = \|\pi(x)\|$ となることは次の 2 つのことから分る:

$$(i) \quad x \in F, y \in I, f \in X_1 \quad \text{とすると} \quad \|x+y\| \geq |f(x+y)| = |f(x)|$$

$$(ii) \quad x \in F \quad \text{とすると} \quad \|x\| = \|x|_F\| = \sup\{|f(x)|; \varphi \in Y_0\}$$

$$= \sup\{|f(x)|; f \in X_1\}, \quad (\text{2 つめの等号は } \varphi \in Y_0 \text{ が}$$

lattice homomorphism であることから出, 最後の等号は $r(X_1) = Y_0$

から従う。)

また $\pi|_F$ が F から E/I への lattice homomorphism であることは

は $x, y \in F, f \in X_1$ に対し

$$f(x \vee y - x \wedge y) = r(f)(x \vee y) - f(x \wedge y) = 0$$

であることから言える。 //

Corollary 4. F が AM-space E の Banach quasi-sublattice であるための条件は E の closed sublattice \widehat{F} と positive contractive projection $P \in \mathcal{L}(\widehat{F})$ で $P\widehat{F} = F$ を満たすものが存在すること。

Proof) 十分性は定義のあとに注意から明らか。必要性は \widehat{F} を F の生成する E の closed sublattice とすると, 定理

2, 3 から $P\hat{F} = F$ なる contractive positive projection $P \in L(\hat{F})$ が存在することが出るのでよい。 //

Remark. Cor. 1 は Theorem 1 の Banach lattice version が E が AM-space のとき成り立つことを示している。一般の E に対して同じことが成り立つかどうかは分っていない。

定理 3 より, E が最初から $C(K)$ (K : compact Hausdorff) の closed sublattice として実現されている場合, この E の最初にあげた例における "Poisson の積分公式" と同じようなことが言える:

Corollary 2. K が compact Hausdorff space, E は $C(K)$ の closed sublattice とする。このとき E の任意の Banach quasi-sublattice F に対して closed subset $K_0 \subset K$ として $F|_{K_0} := \{x|_{K_0}; x \in F\}$ が $C(K_0)$ の sublattice として $\forall x \in F$ に対し $\|x\| = \|x|_{K_0}\|$ が成り立つものが存在する。更に F が定数関数を含めば, 次の条件 (i), (ii) をみたす compact Hausdorff 空間 K_1 , 連続写像 $p: K_0 \rightarrow K_1$, $\mu: K \rightarrow M_1^+(K_1)$ が存在する:

$$(i) \text{ 写像 } p^* : \begin{cases} C(K_1) \rightarrow C(K_0) \\ g \mapsto g \circ p \end{cases} \text{ は } C(K_1) \text{ から } F|_{K_0}$$

ϕ is an isometric lattice isomorphism

(ii) $\forall x \in F, \forall s \in K$

$$x(s) = \int p^{*-1}(x|_{K_0}) d\mu_s$$

が成り立つ。(μ_s は μ の s での値)

References

- [1] Bleier, R.D.: Free vector lattices, Trans. A.M.S., 176 (1973), 73-78
- [2] Miyajima, S.: Structure of Banach quasi-sublattices, Hokkaido Math. J., 12 (1983), 83-91
- [3] Schaefer, H.H. : Banach Lattices and Positive Operators, Springer (1974)