数理解析研究所講究録
505巻 1983年 116-128

コホモロジーの自己同型の実現について

東工大理　岩佐純巨（Junkyo Iwasa）

§0. 序　　Mを向きづけられた可微分(C^∞)閉多様体とする。Mのコホモロジー環の自己同型写像（graded ring automorphisms）全体のなす群を $\mathrm{Aut}\,H^*(M)$ と表す。また，Mの向きを保つ自己ホモトピー同値写像全体のなす群を $\mathcal{E}(M)$ とし，それらの中でPL-同相写像にホモトピックなもの全体のなす部分群を $\mathcal{E}_{PL}(M)$ とする。$\Phi:\mathcal{E}(M)\longrightarrow \mathrm{Aut}\,H^*(M)$ は，$f: M\to M$ に対して，その誘導写像 $f^*: H^*(M)\longrightarrow H^*(M)$ を対応させる準同型とする。

ここでは，Mが2m球面上の2m球面バンドルの２つの連結和の場合について，$\mathrm{Aut}\,H^*(M)$, $\Phi(\mathcal{E}_{PL}(M))$, $\Phi(\mathcal{E}(M))$ の群構造に関する計算結果を報告する。

定理.　B_{α_i} を特性類（characteristic element）$\alpha_i \in \pi_{2m-1}(SO_{2m+1})$ をもつ2m球面上の2m球面バンドル（$i=1,2$）とし，$M=B_{\alpha_1}\# B_{\alpha_2}$ とする。$m\neq 1,2,4$ と仮定する。

(1)　$\mathrm{Aut}\,H^*(M)\cong\left\{\dfrac{GL_2(\mathbb{Z})\times GL_2(\mathbb{Z})}{\mathbb{Z}_2}\right\}\times_\phi \mathbb{Z}_2$　（半直積）.

(2) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ の場合,

$$\Phi(\mathcal{E}_{PL}(M)) \cong \Phi(\mathcal{E}(M)) \cong \left\{ \frac{SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})}{\mathbb{Z}_2} \right\} \times_{\phi} (\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2) \text{ (半直積)}$$

(3) $m \equiv 1 \pmod 4$, $m \neq 1$ で, $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$ の場合,

$$\Phi(\mathcal{E}_{PL}(M)) \cong \Phi(\mathcal{E}(M)) \cong \left\{ \frac{\mathcal{C}(2,1) \times \mathcal{C}(2,1)}{\mathbb{Z}_2} \right\} \times_{\phi} (\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2) \quad \text{(半直積)}$$

ここに, $\mathcal{C}(2,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0 \pmod 2 \right\}$.

(4) $m \equiv 0, 2 \pmod 4$, $m \neq 2, 4$ で, $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ の場合,

$$\Phi(\mathcal{E}_{PL}(M)) \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times_{\phi} (\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2) \quad \text{(半直積)}.$$

§1. 準備　　M を $(n-1)$連結 $2n$次元閉多様体とする(多様体は, 向きづけられた可微分(C^∞)なものを考える)。

$\lambda : H_n(M) \times H_n(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を intersection pairing, $\alpha : H_n(M) \to \pi_{n-1}(SO_n)$ を, $x \in H_n(M)$ に対して, それを表現する embedded sphere $S^n \subset M$ の normal bundle の特性類(characteristic element)を対応させる写像とする。Wall [4] により, 次の結果が示されている:

M' をもう1つの $(n-1)$連結 $2n$次元閉多様体とし, $\lambda' : H_n(M') \times H_n(M') \to \mathbb{Z}$, $\alpha' : H_n(M') \to \pi_{n-1}(SO_n)$ を同様に定義する。

命題1.1 (Wall). $n \geqq 3$ とするとき,

(i) 同型 $h : H_n(M) \longrightarrow H_n(M')$ で, 次の図式を可換にするもの

が存在するとき，そのときに限り，（向きを保つ）PL-同相写像 $f: M \to M'$ で，$f_* = h$ を満たすものが存在する；

$$\begin{tikzcd} H_n(M)\times H_n(M) \arrow[rr, "h\times h"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & H_n(M')\times H_n(M') \arrow[dl, "\lambda'"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} H_n(M) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & H_n(M') \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & \pi_{n-1}(SO_n) & \end{tikzcd}$$

(ii)　同型 $h: H_n(M) \to H_n(M')$ で，次の図式を可換にするものが存在するとき，そのときに限り，（向きを保つ）ホモトピー同値写像 $f: M \to M'$ で，$f_* = h$ を満たすものが存在する；

$$\begin{tikzcd} H_n(M)\times H_n(M) \arrow[rr, "h\times h"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & H_n(M')\times H_n(M') \arrow[dl, "\lambda'"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} H_n(M) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "J\alpha"'] & & H_n(M') \arrow[dl, "J\alpha'"] \\ & \pi_{2n-1}(S^n) & \end{tikzcd}$$

ここに，$J: \pi_{n-1}(SO_n) \to \pi_{2n-1}(S^n)$ は，J-homomorphism。

M の不変量 $\lambda: H_n(M)\times H_n(M) \to \mathbb{Z}$，$\alpha: H_n(M) \to \pi_{n-1}(SO_n)$ の間には，次の関係が成り立つ：

(1)　$\lambda(x, x) = p_*\alpha(x)$

(2)　$\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y) + \lambda(x, y)\partial\iota_n$

ここに，$p_*: \pi_{n-1}(SO_n) \to \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ は，fibration $SO_n \to S^{n-1} = SO_n/SO_{n-1}$ の射影の誘導写像，$\partial: \pi_n(S^n) \to \pi_{n-1}(SO_n)$ は，fibration $SO_{n+1} \to S^n = SO_{n+1}/SO_n$ のホモトピー完全系列における境界準同型，$\iota_n \in \pi_n(S^n)$ は orientation generator を表す。

nが偶数のとき，suspension $S : \pi_{n-1}(SO_n) \longrightarrow \pi_{n-1}(SO_{n+1}) \cong \pi_{n-1}(SO)$ に対して，

$$S \oplus p_* : \pi_{n-1}(SO_n) \longrightarrow \pi_{n-1}(SO) \oplus \mathbb{Z}$$

は単射であるから，命題1.1の(i)において，αのかわりに

$$\hat{\alpha} = S\alpha : H_n(M) \longrightarrow \pi_{n-1}(SO)$$

を用いることができる。また，図式

$$\begin{tikzcd} & \pi_{n-1}(SO_n) \arrow[r, "S"] \arrow[d, "J"] & \pi_{n-1}(SO_{n+1}) \arrow[d, "J^\circ"] \\ \pi_n(S^n) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[dr, "P"'] & & \\ & \pi_{2n-1}(S^n) \arrow[r, "E"'] & \pi_{2n}(S^{n+1}) \end{tikzcd}$$

を考えることにより，命題1.1の(ii)において，$J\alpha$を$J^\circ\hat{\alpha}$におきかえることができる。明らかに，$\hat{\alpha}$, $J^\circ\hat{\alpha}$は準同型である。

さて，$(n-1)$連結$2n$次元閉多様体に対しては，$\mathrm{Aut}\, H^*(M)$と，n次元ホモロジー群$H_n(M)$の自己同型写像でλを保つもの全体とは同型である。また，命題1.1より，$\Phi(\mathcal{E}_{PL}(M))$, $\Phi(\mathcal{E}(M))$ は $H_n(M)$の自己同型写像で(λ, α)あるいは$(\lambda, J\alpha)$を保つものとそれぞれ同型である。nが偶数のとき，α, $J\alpha$を準同型$\hat{\alpha}$, $J^\circ\hat{\alpha}$におきかえることができる。

今，$H_n(M)$のbase $\{e_1, \cdots, e_r\}$を固定することにより，$H_n(M)$の自己同型全体と$GL_r(\mathbb{Z})$とを同一視し，λを行列 $V = (\lambda(e_i, e_j))$ で表現することができる。また，準同型$\hat{\alpha}$, $J^\circ\hat{\alpha}$ もベクトル

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}(e_1) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}(e_r) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J^\circ\hat{\alpha}(e_1) \\ \vdots \\ J^\circ\hat{\alpha}(e_r) \end{pmatrix}$$

として表現できる。

$$\pi_{n-1}(SO) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{if } n \equiv 2 \pmod 8 \\ \mathbb{Z} & \text{if } n \equiv 0, 4 \pmod 8 \\ 0 & \text{if } n \equiv 6 \pmod 8 \end{cases}$$

$$\operatorname{Im} J^\circ \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{if } n \equiv 2 \pmod 8 \\ \mathbb{Z}_{m(\frac{n}{2})} & \text{if } n \equiv 0, 4 \pmod 8),\ n \neq 4, 8 \\ 0 & \text{if } n \equiv 6 \pmod 8 \end{cases}$$

($m(\frac{n}{2})$ は $B_{\frac{n}{4}}/n$ の分母，$B_{\frac{n}{4}}$ は $\frac{n}{4}$-th Bernoulli number) であるから，代表元をとることにより，$\hat{\alpha}$, $J^\circ\hat{\alpha}$ を表現するベクトルは整数を成分にもつとしてよい。

整数を成分にもつ行列 V 及びベクトル v に対して，

$$\tilde{A}(V) = \{ K \in GL_r(\mathbb{Z}) \mid KVK^t = \pm V \}$$

$$A(V) = \{ K \in GL_r(\mathbb{Z}) \mid KVK^t = V \}$$

$$A(V, v) = \{ K \in A(V) \mid Kv = v \}$$

$$A(V, v, m) = \{ K \in A(V) \mid Kv \equiv v \pmod m \}$$

とおく。以上のことから，次の補題が得られる。

補題1.2.　M を $(n-1)$連結$2n$次元閉多様体とし，Mの不変量 $\lambda : H_n(M) \times H_n(M) \to \mathbb{Z}$，$\hat{\alpha} : H_n(M) \to \pi_{n-1}(SO)$ を表現する行

列及びベクトルをV, vとする(nは偶数)。このとき，次が成り立つ:

(i) $\mathrm{Aut}\,H^*(M) \cong \tilde{A}(V)$

(ii) $$\Phi(\mathcal{E}_{PL}(M)) \cong \begin{cases} A(V, v, 2) & \text{if } n \equiv 2 \pmod 8 \\ A(V, v) & \text{if } n \equiv 0, 4 \pmod 8 \\ A(V) & \text{if } n \equiv 6 \pmod 8 \end{cases}$$

(iii) $$\Phi(\mathcal{E}(M)) \cong \begin{cases} A(V, v, 2) & \text{if } n \equiv 2 \pmod 8 \\ A(V, v, m(\frac{n}{2})) & \text{if } n \equiv 0, 4 \pmod 8),\ n \neq 4, 8 \\ A(V) & \text{if } n \equiv 6 \pmod 8 \end{cases}$$

§2. 2次形式を保つ同型写像　　この節では,

$$V = \begin{pmatrix} O & E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合について，$\tilde{A}(V)$及び$A(V)$を計算する。

$E = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし,

$P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$に対して

$$K_0(P, Q) = \begin{pmatrix} E & O \\ O & T \end{pmatrix} \sigma(2,3) \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix} \sigma(2,3) \begin{pmatrix} Q & O \\ O & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ O & T \end{pmatrix}^t$$

$$K_1(P, Q) = \begin{pmatrix} E & O \\ O & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix} \sigma(2,3) \begin{pmatrix} Q & O \\ O & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ O & T \end{pmatrix}^t$$

とおく。初等的な計算により次が得られる：

補題2.1. $KVK^t = \pm V$ が成り立つのは，$P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ 及び $i=0, 1$ に対して，$K = K_i(P, Q)$ と表わされるとき，そのときに限る。特に，$KVK^t = V$ が成り立つためには，$|P|=|Q|$ となることが必要十分である。さらに，$K_i(P, Q) = K_{i'}(P', Q')$ が成り立つのは，$i=i'$ かつ $(P', Q') = \pm(P, Q)$ のときに限る。

$P \in GL_2(\mathbb{Z})$ に対して，

$$K(P) = K_1(E, P) = \begin{pmatrix} E & O \\ O & T \end{pmatrix} \sigma(2,3) \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \\ & T \end{pmatrix}^t$$

とおく。明らかに，

$$K_0(P, Q) = K(P)K(Q)$$

$$K_1(P, Q) = K(E)K(P)K(Q)$$

が成り立つ。つまり，$\widetilde{A}(V)$ の元は

$$K(E)^{\xi}K(P)K(Q) \ , \quad P, Q \in GL_2(\mathbb{Z}), \ \xi = 0, 1$$

と表わされる。また，$|P|=|Q|$ を要請するとき，$|P|=|Q|=-1$ ならば，$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，

$$P = JP', \ Q = JQ', \quad P', Q' \in SL_2(\mathbb{Z})$$

と書け，

$$K_0(P, Q) = K(JP')K(JQ') = K(J)K(E)K(P')K(Q')$$

$$K_1(P, Q) = K(E)K(JP')K(JQ') = K(J)K(P')K(Q')$$

が成り立つ。つまり，$A(V)$ の元は

$$K(J)^{\eta}K(E)^{\xi}K(P)K(Q), \quad P, Q \in SL_2(\mathbb{Z}), \ \xi, \eta = 0, 1$$

と表わされる。$K(E)^2 = K(J)^2 = 1$ を注意しておく。

Δ を $(-E, -E)$ で生成される $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z}) \subset GL_2(\mathbb{Z}) \times GL_2(\mathbb{Z})$ の部分群とする。明らかに，$\Delta \cong \mathbb{Z}_2$ である。

$$\tilde{k} : \frac{GL_2(\mathbb{Z}) \times GL_2(\mathbb{Z})}{\Delta} \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \tilde{A}(V)$$

を，$\tilde{k}(P, Q, \xi) = K(E)^{\xi} K(P) K(Q)$ と定義し，

$$k : \frac{SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})}{\Delta} \times (\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2) \longrightarrow A(V)$$

を，$k(P, Q, \xi, \eta) = K(J)^{\eta} K(E)^{\xi} K(P) K(Q)$ と定義する。補題2.1より，$\tilde{k}, k$ は集合としての同型写像であることがわかる。

$$K(P_1)K(Q_1)K(E)K(P_2)K(Q_2) = K(E)K(Q_1P_2)K(P_1Q_2)$$

$$K(P_1)K(Q_1)K(J)K(P_2)K(Q_2) = K(J)K(JQ_1JP_2)K(JP_1JQ_2)$$

であるから，$\mathbb{Z}_2$ の $GL_2(\mathbb{Z}) \times GL_2(\mathbb{Z})$ への action ϕ を，

$$\phi(1) \cdot (P, Q) = (Q, P)$$

と定義し，$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ の $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$ への action ϕ を，

$$\phi(1, 0) \cdot (P, Q) = (Q, P)$$

$$\phi(1, 1) \cdot (P, Q) = (JPJ^{-1}, JQJ^{-1})$$

と定義することにより，次の結果を得る：

定理2.2. 群としての次の同型が成り立つ：

(i) $\tilde{A}(V) \cong \dfrac{GL_2(\mathbb{Z}) \times GL_2(\mathbb{Z})}{\Delta} \times_{\phi} \mathbb{Z}_2$ （半直積）

(ii) $A(V) \cong \dfrac{SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})}{\Delta} \times_{\phi} (\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2)$ （半直積）

§3. 定理の証明　　B_αを特性類$\alpha\in\pi_{n-1}(SO_{n+1})$をもつ$n$球面上の$n$球面バンドルとする。以下，$n$は偶数で，$n\neq 2, 4, 8$と仮定する。明らかに，$H_n(B_\alpha)\cong\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$である。今，$H_n(B_\alpha)$のbase e_1, e_2として，section及びfibreに対応するものをうまくとれば，

$$\lambda(e_1, e_1)=\lambda(e_2, e_2)=0\ ,\ \lambda(e_1, e_2)=\lambda(e_2, e_1)=1$$

$$\hat{\alpha}(e_1)=\alpha\in\pi_{n-1}(SO_{n+1})\ ,\ \hat{\alpha}(e_2)=0$$

とできる。つまり，B_αの不変量$\lambda, \hat{\alpha}$に対応する行列及びベクトルとして

$$U=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ ,\ u_\alpha=\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\end{pmatrix}$$

をとることができる。従って，n球面上のn球面バンドルの2つの連結和$M=B_{\alpha_1}\# B_{\alpha_2}$に対する行列，ベクトルとしては

$$U\oplus U=\begin{pmatrix}U & 0\\ 0 & U\end{pmatrix}\ ,\ u_{\alpha_1}\oplus u_{\alpha_2}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ 0\\ \alpha_2\\ 0\end{pmatrix}$$

をとることができる。

定義. $V\in GL_4(\mathbb{Z})$と，整数を成分にもつ4次元ベクトルから成るsystem (V, v)を考える。もう1つのsystem (V', v')に対して，適当な$K\in GL_4(\mathbb{Z})$が存在して，

$$V'=KVK^t\ ,\ v'=Kv$$

が成り立つとき，(V, v)と(V', v')は同値であると定義する。

命題1.1より，２つの多様体 M，M' の system (V, v) と (V', v') が同値なとき，M と M' は PL-同相であるから，$\mathrm{Aut}\, H^*(M)$，$\Phi(\mathcal{E}_{PL}(M))$ $\Phi(\mathcal{E}(M))$ を考えるとき，M の system (V, v) を同値な system にとりかえてもさしつかえない。

$M = B_{\alpha_1} \# B_{\alpha_2}$ の system $(U \oplus U,\ u_{\alpha_1} \oplus u_{\alpha_2})$ は，$\sigma(2,3) \in GL_4(\mathbb{Z})$ により，$V = \begin{pmatrix} O & E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix}$，$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に変換される。

以下，V は行列 $\begin{pmatrix} O & E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix}$ を表すものと約束する。

補題3.1.　整数を成分にもつ２つの４次元ベクトル $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_4 \end{pmatrix}$，$v' = \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_4' \end{pmatrix}$ に対して，$A(V)$ の元 K が存在して，$Kv = v'$ が成り立つための必要十分条件は，$|P| = |Q|$ である適当な $P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ に対して，$\begin{pmatrix} v_1' & v_4' \\ v_2' & -v_3' \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} v_1' & v_4' \\ v_2' & -v_3' \end{pmatrix}^t$ が，$P \begin{pmatrix} v_1 & v_4 \\ v_2 & -v_3 \end{pmatrix} Q^t$ に等しくなることである。

補題3.1は，$K = K(E)^{\xi} K(P) K(Q)$，$\xi = 0, 1$ に対して Kv を実際に計算することにより容易に得られる。

$\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ を整係数 2×2 行列の全体とする。

定義.　２つの行列 $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ に対して，$|P| = |Q|$ である $P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ が存在して，$B = PAQ^t$ または $B^t = PAQ^t$ が成り立つとき，A と B は同値であると定義する。

次も初等的な結果である：

補題3.2. 任意の $A\in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ は，$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a\geqq 0$, $a|b$ の形の行列に同値である。特に，行列 $\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ v_2 & 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に同値である。ここに，k は v_1 と v_2 の最大公約数を表す。

補題3.1, 3.2より，system $\left(V, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ は，system $\left(V, \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ に同値である。k は α_1 と α_2 の最大公約数を表す。従って，$M=B_{\alpha_1}\# B_{\alpha_2}$ の場合，$\Phi(\mathcal{E}_{PL}(M))$, $\Phi(\mathcal{E}(M))$ の計算は，

$$V=\begin{pmatrix} O & E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix}, \quad v=\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k=G.C.D.(\alpha_1, \alpha_2)$$

に対する $A(V, v)$ または $A(V, v, m)$ の計算に帰着される。

$v=\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形のベクトルは，$K(E)$, $K(J)$ の作用で不変である。従って，$K(P)K(Q)v\equiv v \pmod{m}$, $m\geqq 0$ をみたす $P, Q\in SL_2(\mathbb{Z})$ を求めればよい。$P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくとき，

$$K(P)K(Q)v\equiv v \pmod{m}$$

が成り立つための必要十分条件は，

$$ak\equiv sk \pmod{m}, \quad ck\equiv 0 \pmod{m}, \quad rk\equiv 0 \pmod{m}$$

が成り立つことである。

$k\neq 0$, $m=0$ の場合，$a=s$, $c=r=0$。従って，

$$P=\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^q, \quad Q=\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^b \quad （複号同順）$$

の場合しかあり得ない。

$k\neq 0$, $m=2$ の場合，$k=1$ としてよいから，$a\equiv s \pmod{2}$, $c\equiv r\equiv 0 \pmod{2}$。しかるに，$P, Q$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ の元であるから

$c \equiv r \equiv 0 \pmod 2$ ならば，$a \equiv d \equiv p \equiv s \equiv 1 \pmod 2$ となり，条件 $a \equiv s \pmod 2$ は自動的に満たされなければならない。

以上のことと，定理2.2より，定理が完全に証明された。

§4. 簡単な応用

M, M' を invariant system $\left(U, \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\right)$, $\left(U, \begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\end{pmatrix}\right)$ をもつ $(n-1)$連結$2n$次元閉多様体(n: 偶数)とする。ここに，$U = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$。

Corollary. $M \# S^n \times S^n$ と $M' \# S^n \times S^n$ とが PL-同相になるための必要十分条件は，$\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1' \alpha_2'$ かつ $G.C.D(\alpha_1, \alpha_2) = G.C.D(\alpha_1', \alpha_2')$ が成り立つことである。

証明. $M \# S^n \times S^n$, $M' \# S^n \times S^n$ は system $\left(V, \begin{pmatrix}\alpha_1\\ 0\\ \alpha_2\\ 0\end{pmatrix}\right)$, $\left(V, \begin{pmatrix}\alpha_1'\\ 0\\ \alpha_2'\\ 0\end{pmatrix}\right)$ をもつ。ここに，$V = \begin{pmatrix}0 & E_2\\ E_2 & 0\end{pmatrix}$。命題1.1より，$M \# S^n \times S^n$ と $M' \# S^n \times S^n$ とが PL-同相になるためには，invariant systems が同値になることが必要十分である。従って，補題3.1, 3.2 から求める結果を得る。

〈文　献〉

[1] Ishimoto, H., Homotopy classification of connected sums of sphere bundles over spheres, I, Nagoya Math. J. 83 (1981),

15 – 36.

[2] Kahn, P. J., Self-equivalences of $(n-1)$-connected $2n$-manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 562 – 566.

[3] Levine, J., Self equivalences of $S^n \times S^k$, Trans. Amer. Math. Soc. 143 (1969), 523 – 543.

[4] Wall, C. T. C., Classification of $(n-1)$-connected $2n$-manifolds, Ann. of Math. 75 (1962), 163 – 189.

[5] Yoshida, J. and H. Ishimoto, Classification of certain manifolds with sufficient connectedness, Sci. Rep. Kanazawa Univ. 24 (1979), 61 – 71.