数理解析研究所講究録
505巻 1983年 85-91

Homotopy normality について

愛知教育大学　古川靖邦
Furukawa Yasukuni

1 まえがき

群論におけるいろんな概念を homotopy 圏で考えることは多い。例えば homotopy-abelian, homotopy normal 等…。

James [3] は $t=2$ or $t \geqq 4$ のときユニタリー群 U_t は回転群 R_{2t} の McCarty の意味での homotopy normal な部分群にならないことを示した。

Bott の結果を relative Samelson 積にしたこの証明方法は $t=3$ の場合に適用できない。この小稿ではこのときの homotopy normality を示し（定理1），この obstruction を用いて例外リー群の場合について調べる（定理2）。

2 定義と例

__定義1__. リー群 G の部分群 H が McCarty [6] の意味で homotopy normal とは homotopy $\nu_t : (G\times H, H\times H) \longrightarrow (G, H)$ が存在して $\nu_1(G\times H) \subset H$, $\nu_0(g,h) = ghg^{-1}$ ($\forall g\in G$, $\forall h\in H$) をみたすとき。

<u>定義2</u>. 上の定義で homotopy についての条件 $\nu_t(H\times H)\subset H$ を要求しないときHはGでJames [2] の意味で homotopy normal という。

上の定義より次の可換な図式 (James [4])

$$
\begin{tikzcd}
& \pi_p(H)\times\pi_q(G) \arrow[dl, "i_* \times 1"'] \arrow[dr, "1\times j_*"] & \\
\pi_p(G)\times\pi_q(G) \arrow[d, "{<,>}"] & & \pi_p(H)\times\pi_q(G,H) \arrow[d, "{<,>}"] \\
\pi_{p+q}(G) \arrow[rr, "j_*"'] & & \pi_{p+q}(G,H)
\end{tikzcd}
\quad \cdots\cdots \text{A}
$$

(但し, i は injection, j は projection),

において右辺の写像 $<,>(1\times j_*)$ がある p, q で零とならないとき James の意味で homotopy normal でない。又, ある p, q について $<,>:\pi_p(H)\times\pi_q(G,H)\longrightarrow\pi_{p+q}(G,H)$ が零でないとき McCarty の意味で homotopy-normal でないという obstruction をあたえている。

<u>例1</u> $G=$ real (complex) affine group,

$H=GL(n,F)$ (但し $F=R$ or C) とおくとき

HはGの normal subgroup でないが James の意味で homotopy normal.

<u>例2</u>. $G=S^3$, $H=S^1$ とおくとき S^1 は James' sense で

homotopy normal しかし Mclarty'sense で homotopy normal でない([2])。

<u>例3.</u> G, H が古典群のとき殆んどの場合 group として normal でなければ homotopy sense で normal にならない。(James [2, 3, 4], Mclarty [6], Kachi [5])。

<u>3 定理と予想</u>

<u>定理 1</u> U_3 は R_6 で homotopy normal でない(James'sense)

<u>定理 2</u> subgroups $SU_3 \subset G_2$, $G_2 \subset Spin(7)$, $Spin(7) \subset Spin(8)$, $Spin(8) \subset Spin(9)$, $Spin(9) \subset F_4$ は homotopy normal でない (Mclarty's sense).

<u>系 3</u> G_2 は R_7 で homotopy normal でない(James'sense).

<u>予想.</u> 単連結, コンパクト, 単純リー群はすべて homotopy normal な部分群を含まない(Mclarty or James'sense)

<u>定理1の証明</u> 下の可換図式のように生成元をおく.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\{i_*\iota_3\} = \pi_3(U_3) \arrow[d] & & \pi_{10}(U_3) = \mathbb{Z}_2\{\widehat{\nu_5\eta_8^2}\} \arrow[d] \\
\mathbb{Z}\{i_*\iota_3\}\times\mathbb{Z}\{2\hat{\iota}_7\} = \pi_3(U_4)\times\pi_7(U_4) \arrow[rr, "{\langle\,,\rangle}"] & & \pi_{10}(U_4) = \mathbb{Z}_8\{\hat{\nu}_7\}\oplus\mathbb{Z}_2\{\widehat{\nu_5\eta_8^2}\} \\
\pi_3(R_6)\times\pi_7(R_6) \arrow[u, "q\times q", "\cong"'] \arrow[rr, "{\langle\,,\rangle}"] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowright"] & & \pi_{10}(R_6) \arrow[u, "q", "\cong"']
\end{tikzcd}
$$

但し i, i' は適当な injection, q は合成

$$\pi_7(R_6) \xleftarrow{\cong} \pi_7(spin(6)) \xrightarrow{\cong} \pi_7(U_4)$$ とする。

Ⓐで $H=U_3$, $G=U_4$ とおくと

$$q_*\langle i'_*\iota_3, \widehat{2\iota_7}\rangle = \langle i'_*\iota_3, 2\iota_7\rangle = 2J_C(i'_*\iota_3) = 2E^2(J_C\iota_3) \cdots\cdots Ⓑ$$

(J_C については [1] 参照)

ここで写像 $k : \pi_3(R_4) \twoheadrightarrow \pi_3(R_5) \xrightarrow{\cong} \pi_3(R_7)$ により生成元 $\hat{\iota}_3$ が z にうつるものとする; $k(\hat{\iota}_3)=z$。 すると

$$J_C(i'_*\iota_3) = J_R(z) = J_R k(\hat{\iota}_3) = E^3 J_R(\hat{\iota}_3) = E^3\nu_4 = \nu_7 \neq 0 \quad \cdots\cdots Ⓒ$$

□

<u>定理2の証明</u> (i) $SU_3 \subset G_2$ について;

下の可換図式におけるように2-成分の生成元をおく

$$\begin{tikzcd}
Z\{i_*\iota_3\} \times Z\{\iota_6\} = \pi_3(SU_3) \times \pi_6(G_2/SU_3) \arrow[r, "{\langle\, ,\, \rangle}"] \arrow[d, "1\times\Delta"] & \pi_9(G_2/SU_3) = Z_8\{\nu_6\} \arrow[d, "\Delta"] \\
\pi_3(SU_3) \times \underbrace{\pi_5(SU_3)}_{=\,Z\{\widehat{2\iota_5}\}} \arrow[r, "{\langle\, ,\, \rangle}"] & \pi_8(SU_3)
\end{tikzcd}$$

但し, Δ は transgression, 例外群のホモトピー群については [7] 等参照。

$$\Delta\langle i_*\iota_3, \iota_6\rangle = \langle i_*\iota_3, \Delta\iota_6\rangle = \langle i_*\iota_3, \widehat{2\iota_5}\rangle$$ これが零でないことはⒶにおいて $H=SU_2$, $G=SU_3$ とおくことにより

$$q_*\langle i_*\iota_3, \widehat{2\iota_5}\rangle = \langle \iota_3, 2\iota_5\rangle = 2J_C(\iota_3) \neq 0$$ (Ⓑ, Ⓒによる)

がわかる。

(ii) $G_2 \subset spin(7)$ について； Ⓐにおいて $H=G_2$, $G=spin(7)$ とおくと $spin(7)/G_2 = S^7$ だから Ⓑ, Ⓒ を用いて James' sense で homotopy normal でないことがわかる。

(iii) $spin(7) \subset spin(8)$ について；

$$\begin{tikzcd}
\pi_3(SU_3) \arrow[r, "J_C"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_{10}(S^7) \arrow[d, equal] \\
\pi_3(spin(7)) \arrow[r, "\langle\ ,\iota_7\rangle"] & \pi_{10}(spin(8)/spin(7))
\end{tikzcd}$$

において $J_C \neq 0$ による。

(iv) $spin(8) \subset spin(9)$ について； 図式

$$\begin{tikzcd}
\pi_3(SU_3) \arrow[r, "J_C \neq 0"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_{10}(S^7) \arrow[d, equal] \\
\pi_3(R_7) \arrow[r, "J_R"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_{10}(S^7) \arrow[d, "E"', "\cong"] \\
\pi_3(R_8) \arrow[r, "J_R"] & \pi_{11}(S^8) \arrow[d, equal] \\
\pi_3(spin(8)) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\langle\ ,\iota_8\rangle"] & \pi_{11}(spin(9)/spin(8))
\end{tikzcd}$$

による。

(v) $spin(9) \subset F_4$ について；

下の可換図式のように組換えをおく。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\{i_*\tau_3\} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \mathbb{Z}\{x\} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \\
\pi_3(Spin(9)) \times & \pi_8(F_4/Spin(9)) \arrow[r, "{\langle\, ,\, \rangle}"] \arrow[dl, phantom, "\cong \downarrow 1\times\Delta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_{11}(F_4/Spin(9)) \arrow[d, "\Delta"] \\
\pi_3(Spin(9)) \times & \pi_7(Spin(9)) \arrow[r, "{\langle\, ,\, \rangle}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_{10}(Spin(9)) \\
\pi_3(Spin(7)) \times \arrow[u, "\cong"] & \pi_7(Spin(7)) \arrow[r, "{\langle\, ,\, \rangle}"] & \pi_{10}(Spin(7)) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

(iii)の議論を用いて，底辺の $\langle\, ,\, \rangle \neq 0$ が示される，

従って上辺の $\langle i_*\tau_3, x \rangle \neq 0$ も示された。

$\square$

参考文献

[1] Y. Furukawa, Whitehead products in the complex Stiefel manifolds, Proc. Edinburgh Math. Soc. 26 (1983), 241–251.

[2] I. M. James, On the homotopy theory of the classical groups, An. da. Acad. Brasileira de Ciências 39 (1967), 39–44.

[3] ———, Products between homotopy groups, Compositio Math. 23 (1971), 329–345.

[4] ———, The topology of Stiefel manifolds, London Math. Soc. Lecture Note series, 24, Cambridge (1976).

[5] H. Kachi, On the iterated Samelson product, Math. J. Okayama Univ. 24 (1982), 37–44.

[6] G. S. McCarty, JR, Products between homotopy groups and

the J-morphism, Quart. J. of Math. (Oxford) 15 (1964), 362—370.

[7] M. Mimura, The homotopy groups of Lie groups of low rank, J. Math. Kyoto Univ. 6 (1967), 131—176.

[8] G. W. Whitehead, Elements of homotopy theory, Springer-Verlag (1978).

[9] Y. Furukawa, Homotopy normality of Lie groups, to appear.