数理解析研究所講究録
505巻 1983年 76-84

リー群が表すホモトピー要素について

大阪市大 南 春男 (Haruo Minami)

コンパクト・連結リー群をG, その左不変な枠組を$\mathcal{L}$とする。こゝでは$(G, \mathcal{L})$からトム・ポントリャーギン構成法によってえられるホモトピー要素$[G, \mathcal{L}] \in \pi_d^S$ (但し, $d = \dim G > 0$) について一つの補足(命題1)とこれまでの結果及びその二, 三について証明に用いられた主な道具を紹介する。

1. 命題1 Gがその固定集合Kの余次元が奇数であるような対合的自己同型をもつとき,

$$[G, \mathcal{L}]_{(odd)} = 0.$$

例 この命題が適用出来るGとしては, $SU(4n+3)$, $SU(4n)$, $SO(2n)$, $Spin(2n)$ がある。

この内$SO(2n)$については後で述べるようにBecker-Schultzによって$2[SO(2n), \mathcal{L}] = 0$であることが知られている。また次に示すOssaの定理から命題が意味をもつのは3-成分のみ

である。

2. $[G, \mathcal{L}]$ の位数の評価で最も一般的なものは次の Ossa の結果である。

定理 (Ossa[6], 1982) $72[G, \mathcal{L}] = 0$。

定義から次のことが分かるが，このことは$[G, \mathcal{L}]$ の決定は半単純群の問題に帰着されることを示す。

1) $[S^1, \mathcal{L}] = \eta \in \pi_1^S$ (ホップ写像)

2) Gは非可換，且つ $Z(G) \supset T$ (輪環群)ならば

$$[G, \mathcal{L}] = [T, \mathcal{L}][G/T, \mathcal{L}]$$

3) $[G, \mathcal{L}][H, \mathcal{L}] = [G \times H, \mathcal{L}]$

1)と同様に$[S^3, \mathcal{L}]$は π_3^S のホップ写像νを表すことが分かる。更に $SO(3)$ については $[SO(3), \mathcal{L}] = 2\nu$ が示されている[7]。又 2) から $[U(n), \mathcal{L}] = \eta[SU(n), \mathcal{L}]$ をえる。

階数2の単純群については，最初に Smith[7] によって $[Sp(2), \mathcal{L}] = \beta_1(3) \in \pi_{10}^S$，$[SU(3), \mathcal{L}] = \bar{\nu} \in \pi_8^S$ が証明され，つづいて Steer[8] と Wood[9] によって $[SU(3), \mathcal{L}] = \bar{\nu} \in \pi_8^S$，$[G_2, \mathcal{L}] = \kappa \in \pi_{14}^S$ が証明された。この後 Becker-Schultz[2]，Knapp[4] と続くが結果については Ossa の表を次に掲げて

おく。Becker-Schultz はこれらの結果から[2](1977)の中で次の予想を立てた。rank $G \geqq 10$? なら $[G, \mathcal{L}] = 0$

Rk	d	G	$[G, \mathcal{L}]$	π_d^S
1	3	$SU(2)$	ν	$Z_{24}\cdot\nu$
		$SO(3)$	2ν	
2	8	$SU(3)$	$\bar{\nu}$	$Z_2 \oplus Z_2\cdot\bar{\nu}$
	10	$Sp(2)$	$\beta_1(3)$	Z_6
		$SO(5)$	$-\beta_1(3)$	
	14	G_2	κ	$Z_2 \oplus Z_2\cdot\kappa$
	6	$SO(4)$	0	
3	15	$SU(4)$	$\kappa\eta$	$Z_{480} \oplus Z_2\cdot\kappa\eta$
		$SO(6)$	0	
	21	$Spin(7)$	0	$Z_2 \oplus Z_2$
		$SO(7)$	0	
		$Sp(3)$	$\sigma^3 + \bar{\nu}\eta$	
4	24	$SU(5)$	$\eta^*\sigma\eta$ or 0	$Z_6 \oplus Z_2\cdot\eta^*\sigma\eta$
	36	$Spin(9)$	0	Z_6
		$SO(9)$	0	
		$Sp(4)$	?	
	28	$Spin(8)$	0	Z_2

	$SO(8)$	0	
52	F_4	?	$Z_3 \oplus$ 2-primary

註） 岡氏から $[SU(5), \mathcal{L}] = 0$ であることを教えられた（H. U. Schoen の結果）。

3　　先の四氏の主定理を述べる。

Becker-Schultz　　K を G の閉部分群とする。$K \times G \to K$ を K 上の積バンドル，$f : K \times G \to K \times G$ を $f(k, g) = (k, kg)$，$k \in K$, $g \in G$ で定義されるバンドル写像とする。また Dold の f の不動点指数 $I(f) \in \pi_s^0(K_+)$ を $I_K(G)$ で表す。

$U \subset G$ を単位元の局所座標近傍とし，自然な射影 $G_+ \to G/G-U = S^d$ を π で表す。このとき，$\pi_d^S = \pi_s^0(S^d) \xrightarrow{\pi^*} \pi_s^0(G_+)$ は単射で，且つ $\pi^*[G, \mathcal{L}] = I_G(G)$ なることが分かる。

定理　　$I_K(G) = \chi(G/K) I_K(K)$,

とくに $G \supsetneq K$ なら $I_K(G) = 0$，即ち $\chi(G/K)[K, \mathcal{L}] = 0$。

但し，$\chi(-)$ は Euler の標数を示す。

例　　$\chi(SO(2n)/U(n)) = 2^{n-1}$,　$\chi(SU(n+1)/U(n)) = n+1$,

$\chi(SO(2n+1)/SO(2n)) = 2$,　$\chi(G_2/SO(4)) = \chi(F_4/Spin(9)) = 3$。

これから $[U(2n), \mathcal{L}] = 2[SO(2n), \mathcal{L}] = 3[SO(4), \mathcal{L}] = 3[Spin(9), \mathcal{L}]$
$= 0$ をえる。

Knapp　adamsスペクトル系列

$$E_2^{i,j} = Ext^{i,j}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*) \Rightarrow \pi^S_{j-i}$$

のフィルター付けを

$$\pi^S_d \supset \cdots \supset F^{k, d+k} \supset F^{k+1, d+k+1} \supset \cdots$$

とするとき，次の結果を証明した。

定理　$[G, \mathcal{L}]_{(p)} \in F^{\mathrm{rank}\, G,\ d+\mathrm{rank}\, G}$

註）この言葉で Atiyah-Smith[1] の結果は次の様に記述される：$e_c[G, \mathcal{L}]_{(p)} = 0$ であるための必要十分条件は $[G, \mathcal{L}]_{(p)} \in F^{2, d+2}$ である。

この定理と $E_2^{i,j}$ の消滅に関する Zahler, Miller の結果を用いて次の結果を得た。

$[SU(2n+1), \mathcal{L}]_{(p)} = 0 \quad (2n < p(p-1)-2)$,

$[F_4, \mathcal{L}]_{(p)} = [E_6, \mathcal{L}]_{(p)} = [E_7, \mathcal{L}]_{(p)} = 0 \ (p \geq 5)$,　$[E_8, \mathcal{L}]_{(p)} = 0 \ (p \geq 7)$.

他の手法によって $[F_4, \mathcal{L}]_{(3)} = 0$ が証明されている。

Ossa　SをGのサークル部分群，VをSの非自明な

一次元複素表現とする。また $\tau: \Sigma^1 CP^\infty_+ \to QS^0$ を S^1-移送写像とする。このとき $\tau_*: \pi^S_{d-1}(CP^\infty_+) \to \pi^S_d$ は $[G/S, \mathcal{L}, \xi]$ を $[G, \mathcal{L}]$ に移すことが知られている。ここで $\xi: G\times_S V \to G/S$。$\beta \in \tilde{K}(S^2)$ を Bott 要素, $[G/S] \in \pi^S_{d-1}(G/S_+)$ を G/S の基本類とするとき, 次の定理を証明した。

定理　　$\tau_*[G/S, \mathcal{L}, \xi] = -\langle J(\beta\xi), [G/S]\rangle$

即ち $[G, \mathcal{L}] = -\langle J(\beta\xi), [G/S]\rangle$。但し, J は複素 J-写像を, $\langle\ ,\ \rangle$ はクロネッカー積を表す。

これは次の Knapp の結果を用いて示される:

$$\begin{tikzcd} \Sigma^1 CP^\infty_+ \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "R"'] & QS^0 \\ U \arrow[ur, "J"'] & \end{tikzcd}$$

は反可換である。ここで R は反射写像を示す。

S をうまく選び, $J(\beta\xi)$ に Adams 予想を適用して §2 の冒頭に述べた定理を証明した。

4.　命題7の証明　　M を $(p+q)$ 次元可微分 Z_2-閉多様体で, その接バンドル τ について次のバンドル同型をもつとする。

$$\Phi : \tau \oplus \underline{R^i \oplus jL} \xrightarrow{\cong} \underline{R^{i+q} \oplus (j+p)L}$$

（あるi,jに対して）。こゝでLはZ_2の非自明な一次元実表現を，$\underline{A}$はAをファイバーにもつ積バンドルを表す。このとき(M, Φ)を(p, q)-枠組をもつ多様体と呼ぶことにする。(M, Φ)でZ_2の作用を忘れるとき，またその固定点集合を考えるとき，それらは枠組をもつ多様体になる。それらを$(M, \psi\Phi)$，$(M^{Z_2}, \varphi\Phi)$で表す。

$\pi^S_{p,q}$をLandweber [5]の同変安定ホモトピー群，i.e. $\pi^S_{p,q} = \varinjlim_{i,j} [\Sigma^{p+i, q+j}, \Sigma^{i,j}]$，$\Sigma^{i,j} = (R^j \oplus iL) \cup \{\infty\}$，とすると，$(M, \Phi)$は同変トム・ポントリャーギン構成法で$\pi^S_{p,q}$の要素$[M, \Phi]$を定義する。この$M$に対して次の結果を得る。

命題2　pが奇数なら，$[M, \psi\Phi]_{(odd)} = 0$

例　Mとして命題1のGをとると，Gは$(d\text{-}\dim K, \dim K)$-枠組をもつ多様体になる。従って，これから命題1を得る。

命題2の証明　$\lambda^S_{p,q} = \varinjlim_{i,j} [\Sigma^{p+i, q+j}/\Sigma^{0, q+j}, \Sigma^{i,j}]$とおくと，コファイブレイション$\Sigma^{0,q} \to \Sigma^{p,q} \to \Sigma^{p,q}/\Sigma^{0,q}$は完全列

$$\to \lambda^S_{p,q} \to \pi^S_{p,q} \xrightarrow{\varphi} \pi^S_q \to \lambda^S_{p,q-1} \to \cdots$$

を定義する[5]。こゝでφは$\varphi[M, \Phi] = [M^{Z_2}, \varphi\Phi]$を満たす。

Z_2-同型 $J: R^{i+q}\oplus(j+p)L \to R^{i+q}\oplus(j+p)L$ を $J(x_1,\cdots,x_{i+q},y_1,\cdots,y_{j+p})=(x_1,\cdots,x_{i+q},-y_1,y_2,\cdots,y_{j+p})$ で定義するとき，$\varphi[M,\Phi]=\varphi[M,J\circ\Phi]$，更に $\psi:\pi^S_{p,q}\to\pi^S_{p+q}$ を忘却写像とすると，$\psi[M,J\circ\Phi]=-\psi[M,\Phi]=-[M,\psi\Phi]$。

ところで，双対定理を用いて同型 $\lambda^S_{p,q}\cong\pi^S_{2^a+q}(P^\infty/P^{2^a-p-1})$ $(a\gg p,q)$ を得る[3]。ここで P^l は実射影 l-空間を表す。$\tilde{H}_*(P^{2N}/P^{2l},Z)$ は 2-torsion であるので，Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列から，p が奇数なら $\lambda^S_{p,q}$，$\lambda^S_{p,q-1}$ も 2-torsion であることが分かる。従って上の完全列から $[M,\Phi]_{(odd)}=[M,J\circ\Phi]_{(odd)}$，従って $[M,\psi\Phi]_{(odd)}=-[M,\psi\Phi]_{(odd)}$ を得る。

文献

1 Atiyah - Smith: Compact Lie groups and stable homotopy of spheres, Topology 13 (1974), 135-142.

2 Becker - Schultz: Fixed point indices and left invariant framings, Lecture Notes in Math. 657, Springer, 1978, 1-31.

3 Bredon: Equivariant stable stems, Bull.

Amer. Math. Soc. 73 (1967), 269–273.

4. Knapp: Rank and Adams filtration of a Lie groups, Topology 17 (1978), 41–52.

5. Landweber: On equivariant maps between spheres with involutions, Ann. of Math. 89 (1969), 125–137.

6. Ossa: Lie groups as framed manifolds, Topology 21 (1982), 315–323.

7. Smith: Framings of sphere bundles over spheres, the plumbing pairing, and the framed cobordism classes of rank 2 simple Lie groups, Topology 13 (1974), 401–415

8 Steer: Orbits and the homotopy class of a compactification of a classical map, Topology 15 (1976), 383–393.

9 Wood: Framing the exceptional Lie group G_2, Topology 15 (1976), 303–320.