

Thom 複体の James 数

東理大・理工 田中隆一 (Ryuichi Tanaka)

§ 0. 序

X を連結有限 CW 複体、 ξ を X 上の n 次元実ベクトル束とすると、 ξ の Thom 複体 X^ξ は球面 $S^n = (\text{pt})^n$ を部分複体にもつ。 $i: S^n \rightarrow X^\xi$ を包含写像とすると、 i が induce する安定コホモトピー群の準同型 $i^*: \{X^\xi, S^n\} \rightarrow \{S^n, S^n\} \cong \mathbb{Z}$ の image の非負生成元を $d(X, \xi)$ で表す。 $d(X, \xi)$ は $X^\xi = \text{stable}$ に拡張できる写像 $S^n \rightarrow S^n$ の次数 (≥ 0) の最小数に他ならない。 例えば $X = \mathbb{F}P^{k-1}$ (F 上の $k-1$ 次元射影空間、 $F = \mathbb{C}$ or \mathbb{H})、 $\xi = n\eta$ ($\mathbb{F}P^{k-1}$ 上の canonical line bundle η の n 重和) の場合は、 $(\mathbb{F}P^{k-1})^{n\eta} = \mathbb{F}P^{\frac{k+n-1}{F}}$ であるから $d(\mathbb{F}P^{k-1}, n\eta)$ は大嶋さんの計算した James 数 $F\{n, k\}$ である ([0])。

ξ が ζ と安定 fibre homotopy 同値 ($J(\xi) = J(\zeta)$) のとき、 X^ξ と X^ζ は安定 homotopy 同値であるから 関数 $d(X, -): \tilde{K}O(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ は $\tilde{K}O(X) \rightarrow J(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ と分解する。 この関数の性質

を調べるのが目標である。尚、結果は既に [T] で報告したものであるが、同じ結果が Dibaq [D] によっても得られている。

§ 1. 結果

写像 $f: X^3 \rightarrow S^n$ 、 $g: X^3 \rightarrow S^m$ に対して合成

$$X^{3+3} \xrightarrow{\Delta} (X \times X)^{3+3} = X^3 \wedge X^3 \xrightarrow{f \wedge g} S^n \wedge S^m = S^{n+m} \quad (\Delta \text{ は対角線写像})$$

の次数は $\deg f \times \deg g$ であるから $d(X, -)$ は次の性質をもつ。

命題 (1.1) $d(X, 3+5) \mid d(X, 3)d(X, 5)$.

又、特に $d(X, 3) = 1$ となるのは X^3 が S -coreducible であることとは他ならないから $J(3) = 0$ のときに限る。これらの事から、又大嶋さんの結果から、 $d(X, 3)$ は $J(3)$ の位数と密接な関係があると期待できる。実際、

命題 (1.2) X が double suspension ならば $d(X, 3) = J(3)$ の位数。

証明. X が suspension のときは Wall の補題により、 X^3 の cell structure が分っている。即ち、 $X = SY$ とすれば $X^3 \cong S^n \cup_{\theta(J(3))} C(S^Y)$ 。ただし、 n : 十分大とし θ は $[X, B\mathbb{F}_n] \cong [Y, \mathbb{F}_n] \cong [Y, \Omega^n S^n] \cong [S^Y, S^n]$ 。従って $d(X, 3) = \theta(J(3))$ の位数。さらに Y が suspension のとき θ は additive であるから命題が成り立つ。

一般に、次がいえる。

定理 (1.3) (1) $d(X, 3) \neq 0 \iff 3: \text{orientable}$

(2) ξ : orientable とするとき p :素数に對して
 $p \mid d(X, \xi) \iff p \mid J(\xi)$ の位数.

さて $O_{n,k}$ を F 上の Stiefel 多様体、 $p: O_{n,k} \rightarrow S^{dn-1}$ ($d = \dim_{\mathbb{R}} F$) を射影とするとき $p_*: \pi_{dn-1}(O_{n,k}) \rightarrow \pi_{dn-1}(S^{dn-1}) \cong \mathbb{Z}$ の image の生成元 (≥ 0) を $O_F\{n,k\}$ で表し、 $O_{n,k}$ の James 数という。 $O_{n,k}$ を stunted quasi-projective space とすれば、 $O_{n,k} \hookrightarrow O_{n,k}$ は $2d(n-k) + 3(d-1)$ 同値であることと、 $O_{n,k}$ は $(FP^{k-1})^{-n}$ の S -dual であることより、 S -duality によって $n \geq 2k-1$ のとき $O_F\{n,k\} = d(FP^{k-1}, -n\eta)$ が成り立つ。よって上の定理の系として次の Sigrist-Rothenberg の結果を得る。ただし $n \geq 2k-1$ 。
 系 (1.4) $p \mid O_F\{n,k\} \iff p \mid J(n\eta)$ の位数 (p :素数).

§ 2. 定理の証明

ξ に associate (球、球面束を $D(\xi), S(\xi)$ とするとき $(D(\xi), S(\xi))$ のコホモト \mathbb{Z} -完全列を考えることにより次が成り立つ。

補題 (2.1) $n \geq \dim X + 3$ のとき、次数 k の写像 $X^3 \rightarrow S^n$ が存在 \iff 次数 k の写像 $S(\xi) \rightarrow S^{n-1}$ が存在。

従って fibre の次元が十分高い球面束 $S(\xi)$ について、次数 k の写像 $S(\xi) \rightarrow S^{n-1}$ が存在するための条件を考えればよい。定理 (1.3)(2) の \Leftarrow は次の Adams の定理 ([A]) より出る。

mod k Dold の定理. 次数 k の写像 $S(\xi) \rightarrow S^{n-1}$ が存在すれば
ある正整数 e に対して $k^e \xi$ は fibre homotopy trivial.

実際この定理より, $J(\xi)$ の位数 $|d(X, \xi)|^e$. 従って
 $p | J(\xi)$ の位数 $\Rightarrow p | d(X, \xi)$. 定理(1.3)(2)の \Rightarrow を示すには
mod k Dold の定理の逆を次の形で証明すればよい.

定理(2.2) ξ を X 上の n 次元 oriented vector bundle,
 $n \geq \dim X + 3 \geq 1$, $t: S(k\xi) \rightarrow X \times S^{kn-1}$ を次数 1 の fibre
homotopy equivalence とする. このとき, ある非負整数 e に対し
て, 次数が k^e の fibre preserving map $f: S(\xi) \rightarrow X \times S^{n-1}$ で次の図
式を fibre homotopy commutative にするものが存在する.

$$\begin{array}{ccc} S(k\xi) & \xrightarrow{kf} & X \times S^{kn-1} \\ & \searrow t & \uparrow 1 \times (k^e)k \\ & & X \times S^{kn-1} \end{array}$$

$J(\xi)$ の位数は有限であるから, 上の定理により, ξ が
orientable ならば $d(X, \xi) \neq 0$ であることが分る. 逆に $d(X, \xi) \neq 0$
ならば, 次数 $\neq 0$ の写像 $S(\xi) \rightarrow S^{n-1}$ を用いて ξ に ori-
entation を入れることができる. よって定理(1.3)(1)を得る.

(2.2) の証明. cell-wise induction による. cell が 1 個のときは
明らかであるから, $X = Y \cup e^r$ で, $f: S(\xi|_Y) \rightarrow Y \times S^{n-1}$
を次数 $m (=k^e)$ の f. pres. map で, 次の図式を f. h. comm. に
しているものとする.

$$\begin{array}{ccc}
 S(k\mathbb{Z}|Y) & \xrightarrow{kq} & Y \times S^{kn-1} \\
 & \searrow \scriptstyle t|_Y & \uparrow \scriptstyle 1 \times m^k \\
 & & Y \times S^{kn-1}
 \end{array} \quad \text{---(I)}$$

Step 1. ある k 以外の整数 l に対して $(1 \times l) \circ q$ を $S(\mathbb{Z}) \rightarrow X \times S^{n-1}$ に拡張する.

$q: S(\mathbb{Z}|Y) \rightarrow Y \times S^{n-1}$ の $S(\mathbb{Z}) \rightarrow X \times S^{n-1}$ への拡張に対する障害は $\pi_{r-1}(G(n, m))$ の元であるが、これを $\langle q \rangle$ で表すことにする。ただし $G(n, m) = \{ \alpha: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \mid \deg \alpha = m \}$. 従って $l \in G(n, l)$, $k \in \mathbb{N}$ に対して写像

$c(l): G(n, m) \rightarrow G(n, lm)$ 及び $j(k): G(n, m) \rightarrow G(kn, m^k)$ をそれぞれ $c(l)(\alpha) = l \circ \alpha$, $j(k)(\alpha) = \alpha * \dots * \alpha$ (k 重 join) で定義する。 $n \geq r+3$ のとき、 $\pi_r(G(n, m)) \cong \pi_r S$ であるが、この同型を θ とするとき Adams により次の 2 つの図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_r(G(n, m)) & \xrightarrow{c(l)_*} & \pi_r(G(n, lm)) \\
 \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\
 \pi_r S & \xrightarrow{\times l} & \pi_r S
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \pi_r(G(n, m)) & \xrightarrow{j(k)_*} & \pi_r(G(kn, m^k)) \\
 \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\
 \pi_r S & \xrightarrow{\times k m^{k-1}} & \pi_r S
 \end{array}$$

$$\text{従って } \theta(\langle (1 \times l) \circ q \rangle) = \theta(c(l)_* \langle q \rangle) = l(\theta \langle q \rangle)$$

$$\theta(\langle kq \rangle) = \theta(j(k)_* \langle q \rangle) = k m^{k-1}(\theta \langle q \rangle).$$

ところが仮定 of 可換図式 (I) により kq は $S(k\mathbb{Z}) \rightarrow X \times S^{kn-1}$ に拡張可能であるから $\langle kq \rangle = 0$. よって $l = k m^{k-1}$ ととれ

ば $\langle (1 \times l) \circ g \rangle = 0$ 、即ち $(1 \times l) \circ g$ は $h: S(\Sigma) \rightarrow X \times S^{n-1}$ に拡張できる。 $\deg h (= km^k)$ を q とおく。 次は、

Step 2. fibre homotopy を X 上に拡張する。

$$\begin{array}{ccc} \text{図式} & S(k\Sigma) & \xrightarrow{kh} X \times S^{kn-1} \\ & \searrow t & \uparrow 1 \times g^k \\ & & X \times S^{kn-1} \end{array} \quad \text{--- (II)}$$

は、 Y 上では fibre homotopy commutative である。 この homotopy の X 上の homotopy への拡張に対する障害は $\pi_r(G(kn, q^k))$ の元であるが、これを ϕ とする。 もし写像 $S(\Sigma) \rightarrow X \times S^{n-1}$ とし h の代わりに $(1 \times l) \circ h$ とすれば、これに対応する障害は $C(l^k)_*(\phi) \in \pi_r(G(kn, (lq)^k))$ となる。 ここで $(1 \times l) \circ h: S(\Sigma) \rightarrow X \times S^{n-1}$ を胞体 e^r 上で $\pi_r(G(n, lq))$ の元を用いてホモトピー群の和の定義の要領で変形する。 この変形を $\pi_r(G(n, lq))$ の各元について行うとき、変形された写像に対応する障害全体は $\pi_r(G(kn, (lq)^k))$ の剰余類 $C(l^k)_*(\phi) + j(k)_* \pi_r(G(n, lq))$ をなす。 この剰余類は、同型 $\theta: \pi_r(G(kn, (lq)^k)) \cong \pi_r^S$ により π_r^S の剰余類 $l^k \theta(\phi) + k(lq)^{k-1} \pi_r^S$ に対応するから $l = kq^{k-1}$ とすれば必ず 0 を含む。 従って $l = kq^{k-1}$ とすれば次数 kq^k の fibre preserving map $h': S(\Sigma) \rightarrow X \times S^{n-1}$ が存在してこの h' に対し図式 (II) は fibre homotopy commutative となる。 q.e.d.

参考文献

- [A] J.F. Adams : On the groups $J(X)$ -I, *Topology* 2 (1963), 181-195.
- [D] I. Dìbag : Degree theory for spherical fibrations, *Tôhoku Math. J.* 34 (1982), 161-177.
- [Ō] H. Ōshima : On stable James numbers of stunted complex or quaternionic projective spaces, *Osaka J. Math.* 16 (1979), 499-504.
- [T] R. Tanaka : On the stable James numbers of Thom complexes, *Osaka J. Math.* 20 (1983), 137-143.