

## 区分的線形要素をもつサンプル値制御系におけるカオス

神戸大自然科学研究科 潮 俊光

神戸大工学部 平井一正

## 1. まえがき

制御系の中に信号の流れが断続的である部分を含まれる制御系はサンプル値制御系と呼ばれている。<sup>(1)</sup> 計算機を制御装置として用いる制御系はその一例である。サンプル値制御系では、サンプラが一定周期ごとに短時間閉じることによって、連続信号がサンプル値列に変換される。サンプラの閉じる周期をサンプリング周期と言う。サンプル値制御系において、系のふるまいはサンプリング周期と密接に関係している。<sup>(2)</sup>

サンプル値制御系においてカオスが存在することは、R. E. Kalmanによって既に報告されている。<sup>(3)</sup> Kalmanは、1次系において、マルコフ過程によって記述できるようなふるまいが存在し得ることを示しているが、高次系に関しては考察していない。また、パルス幅変調器をもつ系においてカオスが存在することも報告されている。<sup>(4)</sup> しかしながら、サンプリング周

期とカオスの存在性との関係についての研究は筆者の知る限りほとんどない。そこで本報告では、非線形フィードバックをもつサンプル値制御系において、サンプリング周期とカオスの関係について考察する。

## 2. 基本的事項

まず、本報告で用いる記号、基本的定理について述べる。

差分方程式

$$x(k+1) = F(x(k)), \quad k=0, 1, \dots \quad (1)$$

但し、 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は区分的線形連続関数である。 $F^n \triangleq F \circ F^{n-1}$ ,  $F^0(x) \triangleq x$  と定義する。点  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  が  $F^i(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$  ( $i=1, 2, \dots, N-1$ ),  $F^N(\tilde{x}) = \tilde{x}$  のとき、 $\tilde{x}$  を  $N$  周期点と言ひ、特に、 $N=1$  のとき  $\tilde{x}$  を不動点と言ひ。

$B_r(z)$  を  $z$  を中心とする半径  $r$  の開球とおく。式 (1) の不動点  $z$  において、ある  $r > 0$  が存在して  $F|_{B_r(z)}$  が微分可能で拡大型<sup>(5)</sup> のとき、 $x_0 \neq z$ ,  $F^M(x_0) = z$ ,  $DF^M(x_0)$  が存在して  $\det DF^M(x_0) \neq 0$  となる  $x_0 \in B_r(z)$  と  $\exists M > 0$  が存在するとき、 $z$  は snap-back repeller<sup>(5)</sup> と言ひ。以下本報告では、Li-Yorke の意味でのカオスを単にカオスと呼ぶことにする。<sup>(5)</sup>

### Marotto の定理<sup>(6)</sup>

式 (1) に snap-back repeller が存在すればカオスが存在する。

$z$ が式(1)の双曲型不動点であるとき、 $W_{loc}^u(z)$  ( $W_{loc}^s(z)$ ) を  $z$ の局所不安定(安定)多様体とおく。このとき次の定理が成り立つ。

### 白岩-倉田の定理<sup>(7)</sup>

式(1)が次の条件を満たせば、式(1)にカオスが存在する。

- (i)  $u = \dim W_{loc}^u(z) > 0$
- (ii)  $F^M(z_0) \in W_{loc}^s(z)$  を満たす点  $z_0 \in W_{loc}^u(z)$  ( $z \neq z_0$ ) と正の整数  $M$  が存在する。
- (iii)  $z_0$  の  $W_{loc}^u(z)$  における近傍となる  $u$ 次元 disc  $B^u$  が存在して、 $F^M|_{B^u}: B^u \rightarrow \mathbb{R}^n$  は埋め込みで、 $F^M(B^u)$  は  $W_{loc}^s(z)$  と  $F^M(z_0)$  で横断的に交わる。

(注) 白岩-倉田の定理は、 $F^i(z_0)$  ( $i=1, 2, \dots, M$ ) の近傍で微分可能ならば成立する。

## 3. 区分的線形離散時間システムのカオス

### 3.1. 状態フィードバックの場合

次に示す状態フィードバックシステム

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} f(x_1(k)) \\ &\triangleq F(x(k)) \end{aligned} \quad (2)$$

を考慮する。但し、 $x(p) = [x_1(p)' \ x_2(p)']'$ ,  $x_i(p) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l}$  ( $i, j = 1, 2$ ),  $n_1 + n_2 = n$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  は区分的線形連続関数である。したがって、 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は区分的線形連続関数となる。さらに、一般性を失なうことなしに、式(2)の不動点  $x_f$  は  $x_f = 0 = [0_1' \ 0_2']'$  とおいてよい。但し、 $0_i$  は  $\mathbb{R}^{n_i}$  における零元である。今、 $Df(0_i)$  が存在すると仮定し、さらに、 $A_{11} + B_1 Df(0_1)$  の固有値の絶対値は1より大きく、 $A_{22}$  の固有値は1より小とする。このとき、次のシステムを考慮する。

$$x_1(k+1) = A_{11} x_1(k) + B_1 f(x_1(k)) \triangleq F_1(x_1(k)) \quad (3)$$

### 性質1

式(3)に snap-back repeller が存在するならば、式(2)にカオスが存在する。

(証明)

$$DF(0) = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 Df(0_1) & 0 \\ A_{21} + B_2 Df(0_2) & A_{22} \end{bmatrix}$$

なので、式(2)の不動点  $0$  の安定多様体  $W^s(0)$  は、

$$W^s(0) = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \right\}$$

となる。また、行列  $A_{11} + B_1 Df(0_1)$  の固有値に対応する  $DF(0)$  の  $n_1$  次元不変部分空間を  $X_{n_1}$  とおくと、式(2)の不動点  $0$  の局

所不安定多様体  $W_{loc}^u(0)$  は、

$$W_{loc}^u(0) = \{x; x \in X_{n_1}, \|x\| < \varepsilon\}$$

となる。但し、 $\varepsilon$  は  $\forall \|x\| < \varepsilon$  に対して  $DF(x)$  が存在するよ  
うな小さな正数である。  $\dim W_{loc}^u(0) > 0$  は明らかである。

ところで、 $P$  を射影写像、すなわち  $\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  に対して、 $Px$   
 $\equiv x_1$  とおく。仮定より、次の i) から iv) の条件を満足する  $\bar{x} \in$   
 $\mathbb{R}^M (\bar{x}_i \neq 0_i)$  と  $n_1$  次元 compact 集合列  $\{D_R\}_{R=0}^M$  が存在する。

$$(i) F^M(\bar{x}_1) = 0_1, \bar{x}_1 \in \text{Int } D_0$$

$$(ii) F_1(D_R) = D_{R+1}$$

$$(iii) F_i|D_R: D_R \rightarrow D_{R+1} \text{ は微分可能で、} \forall x_i \in \bigcup_{i=0}^M D_i \text{ に対して}$$

$$\det[A_{ii} + B_i DF(x_i)] \neq 0 \quad (4)$$

$$(iv) 0_1 \in \text{Int } D_M$$

ここで、 $PX_{n_1} = \mathbb{R}^{n_1}$  で  $\lim_{R \rightarrow -\infty} F^R(\bar{x}_1) = 0_1$  なので、一般性を失  
なうことなしに、 $P\bar{x} = \bar{x}_1$  となる  $\bar{x} \in W_{loc}^u(0)$  が存在すると  
仮定してよい。i) より、 $F^M(\bar{x}) \in W^s(0)$  となる。

次に、 $W_{loc}^u(0)$  に含まれる  $n_1$  次元 disc  $C$  を考える。但し、  
 $PC = D_0$  である。i) より  $C$  は  $\bar{x}$  の  $W_{loc}^u(0)$  における近傍となる。  
このとき、ii) より、 $i=0, 1, \dots, M$  に対して、

$$PF^i(C) = D_i \quad (5)$$

となる。さらに式(4)より、 $\forall x \in \bigcup_{i=0}^M F^i(C)$  に対して、

$$\det DF(x) \neq 0$$

となる。したがって、 $F^M(c): C \rightarrow \mathbb{R}^n$  は埋め込みとなる。

(iv)と式(5)より  $F^M(c)$  と  $W^S(0)$  が交わるのは明らかである。最後に、 $F^M(c)$  と  $W^S(0)$  が互に横断的に交わることを示す。一般に、 $\forall x \in F^M(c)$  に対して、 $x = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \xi_i + \bar{x}$  とする  $\exists a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n_1$ ) が存在するような1次独立な  $n_1$ 次元ベクトル  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_1}$  が存在する。 $F^M(c)$  と  $W^S(0)$  が互に横断的に交わらないとすると、一般性を失なうことなしに、 $\xi_1$  は  $W^S(0)$  と平行であると仮定してよい。すなわち、 $P\xi_1 = 0_1$  となる。このとき、 $P\xi_1, P\xi_2, \dots, P\xi_{n_1}$  は1次独立とはならない。すなわち、 $PF^M(c)$  は  $n_1$ 次元 disc とはならない。したがって式(5)より、 $D_M$  は  $n_1$ 次元 compact 集合とはならない。これは矛盾である。よって、 $F^M(c)$  と  $W^S(0)$  は互に横断的に交わる。白岩-倉田の定理より、性質1は証明される。 q.e.d.

### 3.2. 出力フィードバックの場合.

本節では、出力フィードバックのあるシステム

$$\left. \begin{aligned} \begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [C_1 \ C_2] x(k) \\ u(k) &= r - f(y(k)) \end{cases} \end{aligned} \right\} (6)$$

を考える。但し、 $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l}$ ,  $C_i \in$

$\mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^l$ ,  $r \in \mathbb{R}^l$  は定数ベクトル,  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  は区分的線形連続関数とする. 次のシステムを考える.

$$x_1(k+1) = A_{11}x_1(k) + B_1\{r - f(C_1x_1)\} \quad (17)$$

### 性質 2.

式 (17) に snap-back repeller が存在し,  $A_{22}$  の固有値はすべて絶対値が 1 より小的时候, ある  $\varepsilon > 0$  が存在して,  $\forall \|A_{12}\| < \varepsilon$ ,  $\forall \|C_2\| < \varepsilon$  に対して, 式 (6) にカオスが存在する.

(証明).

式 (6) において,  $A_{12} = 0$ ,  $C_2 = 0$  のとき, 性質 1 より, 式 (6) は白岩-倉田の定理の条件を満たしている. 一方, 一般にパラメータが微少に変化しても横断的交わりは安定である.<sup>(8)</sup>

したがって性質 2 は証明される.

*q.e.d.*

### 4. サンプル値制御系のカオス

図 1 に示すサンプル値制御系を考える. システムの方程式は次のように書ける.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= r - f(x(kT)), \quad kT \leq t < (k+1)T \end{aligned} \right\} (8)$$

但し,  $T (> 0)$  はサンプリング周期で,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^l$ ,

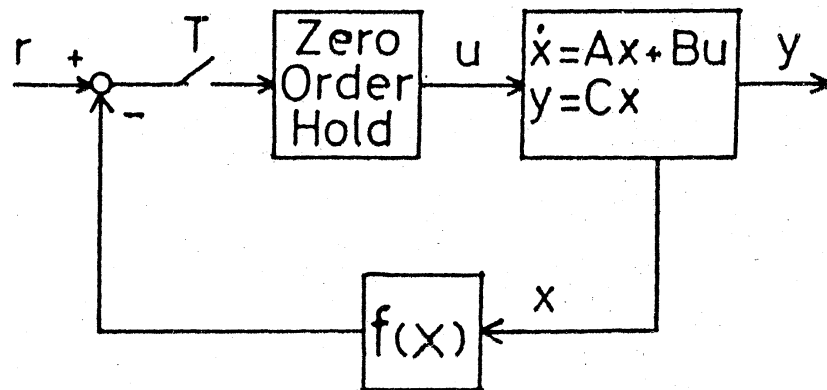


図1. 非線形サンプリング値制御系

$y(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $r \in \mathbb{R}^l$ ,  $A, B, C$  は適当な大きさの行列である。以下,  $A$ の固有値は0に等しくないとする。サンプリング時の入力, 状態, 出力のみに注目すると式(8)は,

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= e^{AT}x(k) + A^{-1}(e^{AT} - I)B u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ u(k) &= r - f(x(k)) \end{aligned} \right\} (9)$$

となる。但し,  $x(k) \triangleq x(kT)$ ,  $y(k) \triangleq y(kT)$ ,  $u(k) \triangleq u(kT)$ である。今,

$$G(x) \triangleq x + A^{-1}B(r - f(x))$$

とおくと、次の性質が証明されている。

### 性質3

式(9)において、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ は $C^1$ 級とする。式(9)に不動点が2個存在する。 $x_1^*$ と $x_2^*$ をその不動点とおくと、 $\det DG(x_1^*) \neq 0$ ,  $\det DG(x_2^*) \neq 0$ である。さらに、 $A$ の固有値のすべて



は実部が正である。このとき、ある  $T^* > 0$  が存在して、 $\forall T > T^*$  に対して式(9)に snap-back repeller (すなわち chaos) が存在する。

(証明) 文献(9)を参照されたい。

(注意)  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が点  $x_f^1$  と  $x_f^2$  の近傍で  $C^1$  級であるならば、性質3は成立する。

式(9)において、

$$x(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad A \triangleq \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B \triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C \triangleq [C_1, C_2]$$

$$f(x(k)) \triangleq f(y(k)) = f(Cx(k))$$

とおく。さらに  $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  ( $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ) の固有値はすべて実部が正(負)である。 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  は区分的線形連続関数とする。このとき式(9)は次のようになる。

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} g_1(x_1(k), x_2(k), T, C_2) \\ g_2(x_1(k), x_2(k), T, C_2) \end{bmatrix} \quad (10)$$

但し、

$$g_1(x_1, x_2, T, C_2) = e^{A_1 T} x_1 + A_1^{-1} (e^{A_1 T} - I_1) B_1 \{r - f(Cx)\}$$

$$g_2(x_1, x_2, T, C_2) = e^{A_2 T} x_2 + A_2^{-1} (e^{A_2 T} - I_2) B_2 \{r - f(Cx)\}$$

である。 $I_i$  は  $n_i \times n_i$  単位行列を示す。

今、 $C_2 = 0$  とおくと、式(10)は次のようになる。

$$x_1(k+1) = g_1^*(x_1(k), T) \cong g_1(x_1(k), x_2(k), T, 0) \quad (11a)$$

$$x_2(k+1) = g_2^*(x_1(k), x_2(k), T) \cong g_2(x_1(k), x_2(k), T, 0) \quad (11b)$$

#### 性質4

式(11a)に snap-back repeller が存在すれば、 $\exists \varepsilon > 0$  が存在して  $\forall \|c_2\| < \varepsilon$  に対して式(10)にカオスが存在する。

(証明) 性質2より明らか。

#### 性質5

$$G_1(x_1) \cong x_1 + A^{-1}B_1\{Y - f(C, x_1)\}$$

とおく。式(11a)に2個の不動点 $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ が存在し、さらに、 $\det DG_1(\xi), \det DG_1(\eta)$ が存在して、 $\det DG_1(\xi) \neq 0, \det DG_1(\eta) \neq 0$ ならば、 $\exists T^* > 0, \forall T > T^*$ に対して式(11a)に snap-back repeller が存在する。

(証明) 性質3より明らか。

#### 性質6

性質5の仮定が満足されているならば、 $\exists T^* > 0, \forall T > T^*$ に対して  $\varepsilon(T) > 0$  が存在して、 $\forall \|c_2\| < \varepsilon$  に対して式(10)にカオスが存在する。

(証明) 性質4と5より明らか。

## 5. 例題

図1において、次の2次系を考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &\triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [c_1 \ c_2] x(t) \\ u(t) &= -f(y(kT)) \quad kT \leq t < (k+1)T \end{aligned} \right\} (12)$$

但し、 $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $x_i(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  は不感帯要素とする。すなわち、

$$f(y) = \begin{cases} my - m & y \geq 1 \\ 0 & |y| < 1 \\ my + m & y \leq -1 \end{cases} \quad (13)$$

である。式(12)において、サンプル時の状態にのみ注目すると次の差分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad & c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) > 1 \text{ のとき、} \\ & x(k+1) = \tilde{A} x(k) + \tilde{b} \\ (ii) \quad & |c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k)| < 1 \text{ のとき、} \\ & x(k+1) = \text{diag}(e^{\lambda_1 T}, e^{\lambda_2 T}) x(k) \\ (iii) \quad & c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) < -1 \text{ のとき、} \\ & x(k+1) = \tilde{A} x(k) - \tilde{b} \end{aligned} \right\} (14)$$

但し、 $\tilde{b} = \left[ \frac{m}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 T} - 1) b_1 \quad \frac{m}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 T} - 1) b_2 \right]'$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 T} - 1) b_1 c_1 & -\frac{m}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 T} - 1) b_1 c_2 \\ -\frac{m}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 T} - 1) b_2 c_1 & e^{\lambda_2 T} - \frac{m}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 T} - 1) b_2 c_2 \end{bmatrix}$$

ここで、 $C_2 = 0$  のとき、 $x_1(k)$  のふるまいは、

$$x_1(k+1) = \begin{cases} \alpha x_1(k) + \beta & x_1(k) \geq 1 \\ e^{\lambda_1 T} x_1(k) & |x_1(k)| < 1 \\ \alpha x_1(k) - \beta & x_1(k) \leq -1 \end{cases} \quad (15)$$

で記述される。但し  $\alpha = e^{\lambda_1 T} - m(e^{\lambda_1 T} - 1)b_1 c_2 / \lambda_1$ ,  $\beta = m(e^{\lambda_1 T} - 1)b_1 / \lambda_1$  である。式(14)の不動点  $x^f = [x_1^f \ x_2^f] = [0 \ 0]$  について考える。式(15)の不動点  $x_1^f = 0$  が snap-back repeller となる条件は、

$$\alpha e^{\lambda_1 T} + \beta < 0 \quad (16)$$

である。ここで、 $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $b_1 = c_1 = 1$ ,  $m = 2$  とおくと、式(16)は、

$$T > \log(2 + \sqrt{2})$$

となる。また、式(14)において白岩-倉田の定理の仮定を満足する十分条件は、

$$|C_2| < (e^T - 2)e^{-T}(1 - e^{-2T})^{-1}, \quad T > \log(2 + \sqrt{2}) \quad (17)$$

となる。<sup>(9)</sup> 以上より、 $T-C_2$  平面におけるカオス存在領域を示すと図2になる。図2において、太線が  $C_2 = 0$  のとき、式(15)の不動点  $x_1^f$  が snap-back repeller となる領域で、領域1とは

カオスが存在する領域 (式(17)が満足される領域) である。

領域2と3は、安定不動点  $x^{f_1}$ ,  $x^{f_2}$

$$x^{f_1} = -x^{f_2} = -\frac{1}{\frac{1}{m} - (\frac{b_1 c_1}{\lambda_1} + \frac{b_2 c_2}{\lambda_2})} \begin{bmatrix} b_1/\lambda_1 \\ b_2/\lambda_2 \end{bmatrix}$$

が存在する領域で、領域4は安定な周期点が存在する領域である。図2より、 $T$ が大きくなるにつれて、性質6の  $\varepsilon$  は大きくとれることがわかる。

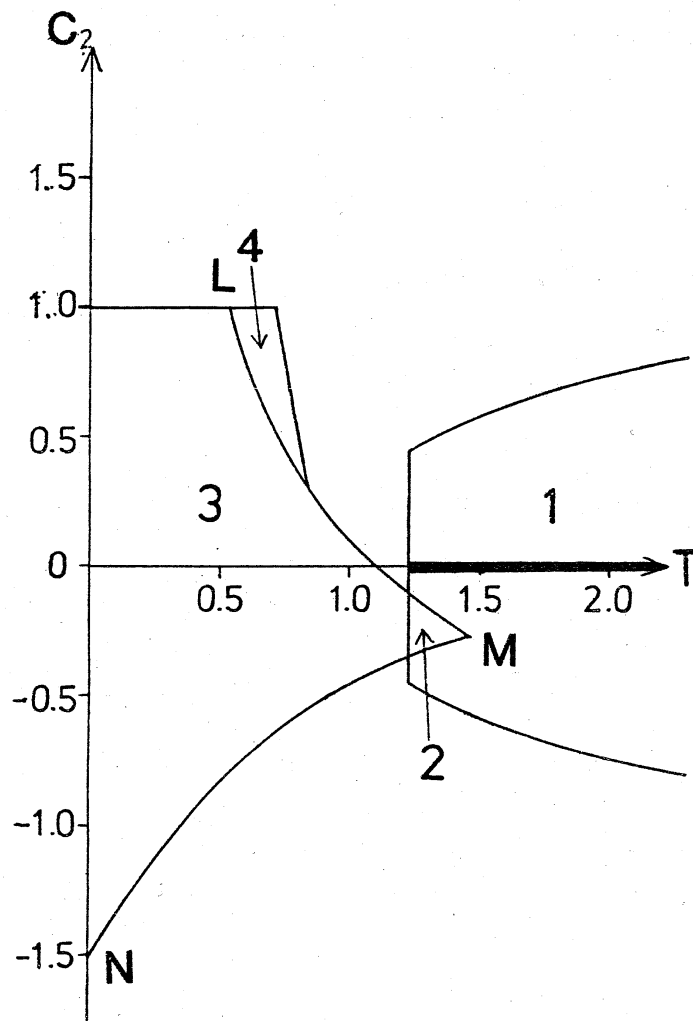


図2 T-C<sub>2</sub>平面上のカオス領域

図2において曲線LMは安定不動点での線形化システムの固有値のひとつが-1となる曲線で、曲線MNは固有値が共役複素数で絶対値が1となる曲線である。したがってパラメータが、曲線LMを横切る場合と曲線MNを横切る場合とではシステムのふるまいの変化は定性的に異なる。その様子を付録に示す。大きな傾向として次のことが言える。曲線LMをパラメータが横切ったとき周期倍分岐が発生し、やがて島状のstrange attractorが現われる。一方、曲線MNをパラメータが横切ったときは不変閉曲線が発生して、やがて不変閉曲線に突起が現われて、strange attractorになる。2個のstrange attractorがひっつく現象も観測された。

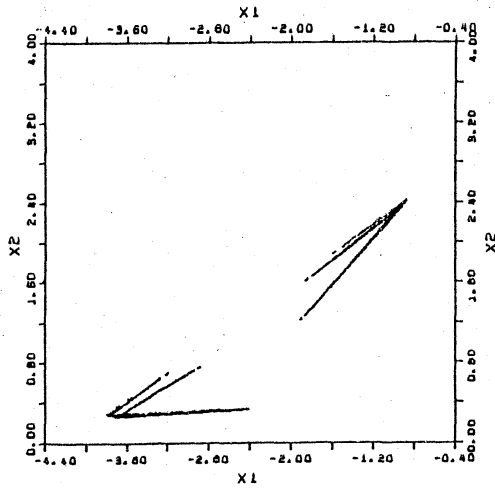
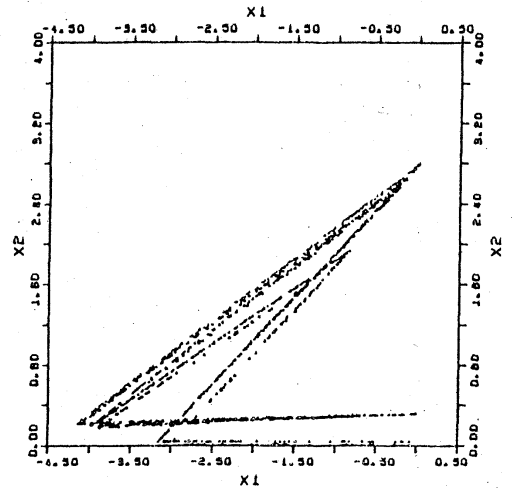
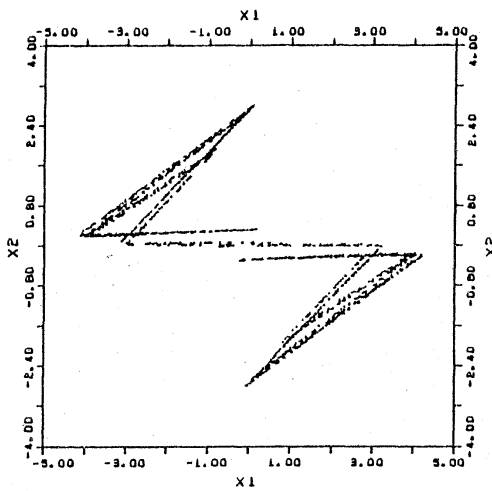
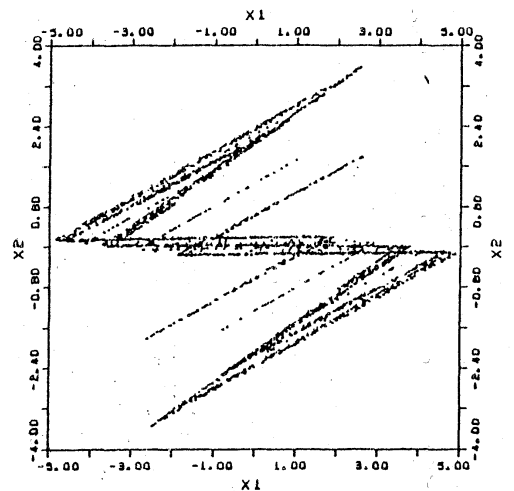
## 6. おわりに

本報告では、区分的線形サンプル値制御系におけるカオスの存在性について述べた。線形制御部が高次系の場合にカオスが存在するパラメータを求めるのは困難であるが、一般に、線形制御部の不安定モードは1個か2個の場合が多く。このとき、性質6を用いれば、1次元又は2次元の差分方程式にカオスの存在するパラメータを用いることによって、全体システムにカオスの存在することが予想できる。このことは、制御系を解析する際に、有用な指針を与えることになる。

## 参考文献

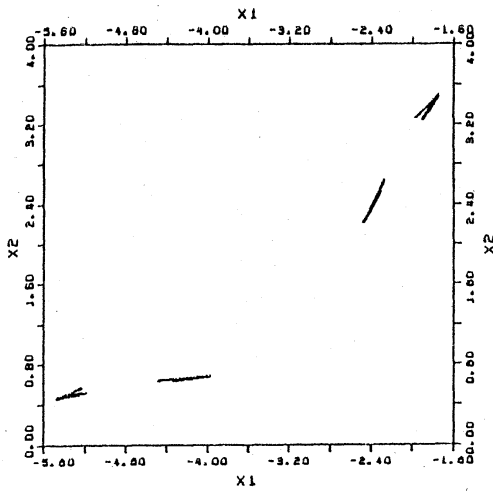
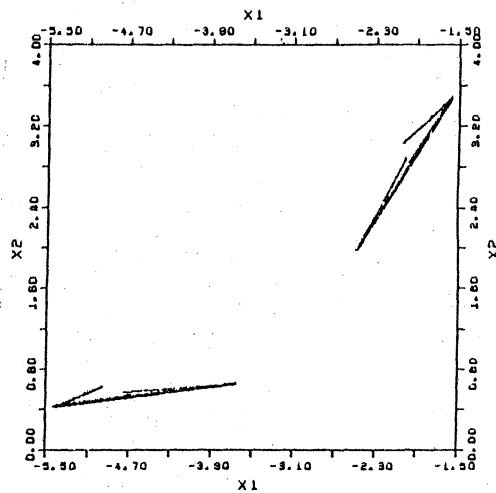
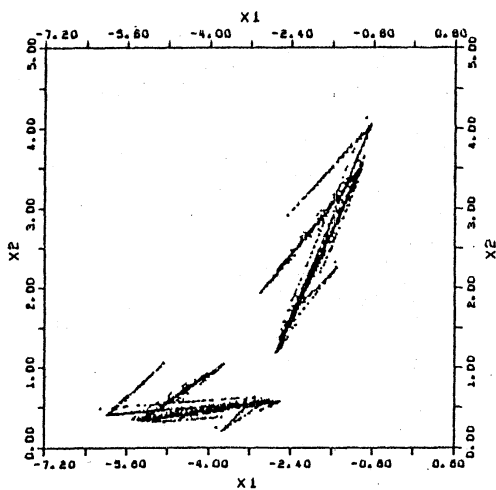
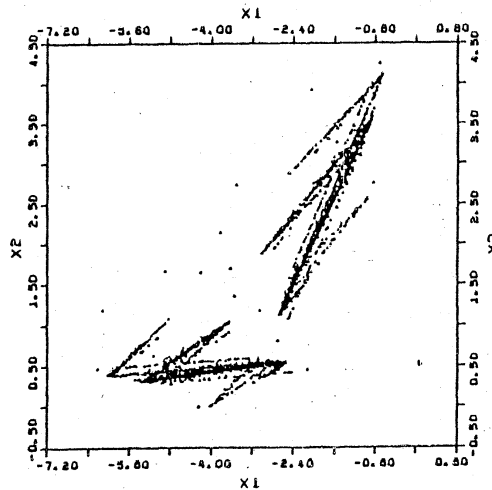
- (1) B.C. Kou: "Digital Control Systems", Holt, Rinehart, and Winston (1980)
- (2) 潮, 平井: "C'クラスの非線形要素をもつサンプリング値制御システムにおける分岐現象とカオス", 信学論, J66-A, 4, pp305-312 (昭58)
- (3) R.E. Kalman: "Nonlinear Aspects of Sampled-Data Control Systems", Proc. Symp. Nonlinear Circuit Anal., 6, pp 273-313 (1956)
- (4) J. Baillieul, R.W. Brockett, and R.B. Washburn: "Chaotic Motions in Nonlinear Feedback Systems", IEEE, Tran. Circuit & Syst. Vol. CAS 27, No. 11, pp 990-997 (1980)
- (5) T. Y. Li, J. A. Yorke: "Period Three Implies Chaos", Am. Math. Mon., Vol. 82, pp 985-992 (1975)
- (6) F.R. Marotto: "Snap-back Repellers Imply Chaos in  $\mathbb{R}^n$ ", J. Math. Anal. Appl. Vol. 63, pp 199-223 (1978)
- (7) K. Shiraiwa, M. Kurata: "A Generalization of a Theorem of Marotto", Proc. Japan Acad., Vol. 56, Ser A, No. 6, pp 286-289 (1980)
- (8) R. Abraham, J. Robbin: "Transversal Mapping and Flow", W. A. Benjamin (1967)
- (9) 潮, 平井: "非線形サンプリング値制御系におけるカオス——Marottoの定理の応用——", 信学技報, NLP82-39 (昭58, 3)

## 付録

(i)  $T = 1.0$ (ii)  $T = 1.1$ (iii)  $T = 1.11$ (iv)  $T = 1.29$ 

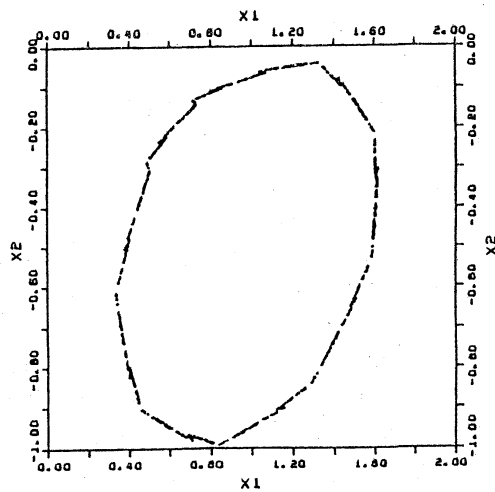
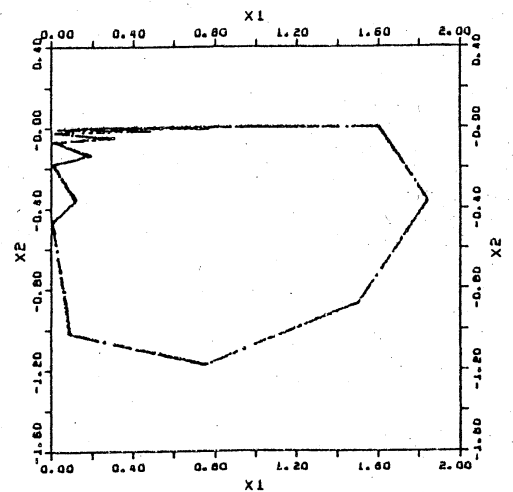
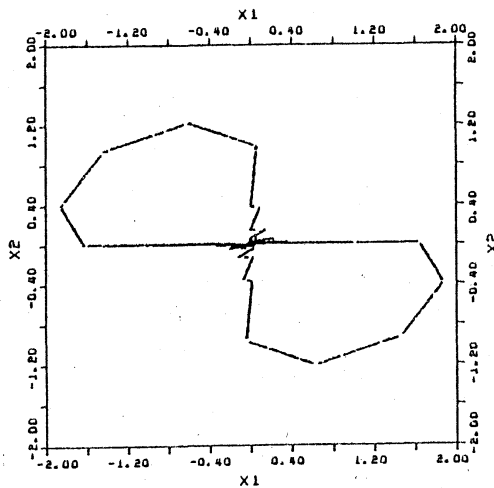
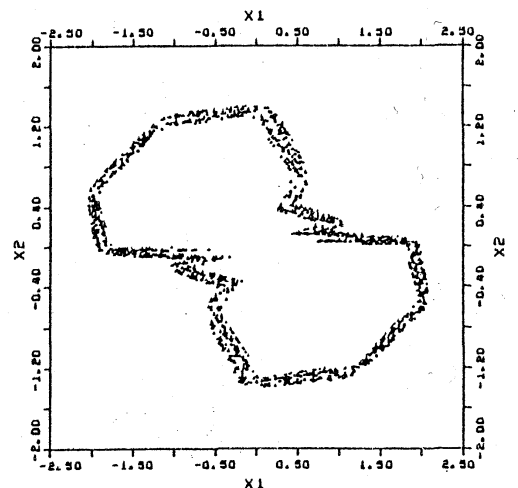
図A-1. 図2の曲線LMを横切、 $T$ を変化させたときの典型的な strange attractor の変化 ( $C_2 = 0.2$ )



(i)  $T = 0.82$ (ii)  $T = 0.84$ (iii)  $T = 0.9$ (iv)  $T = 0.915$ 

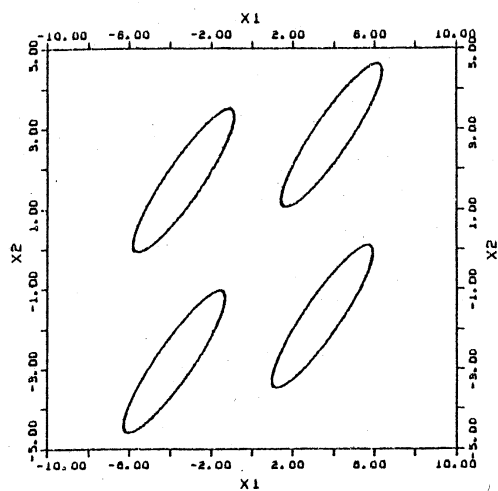
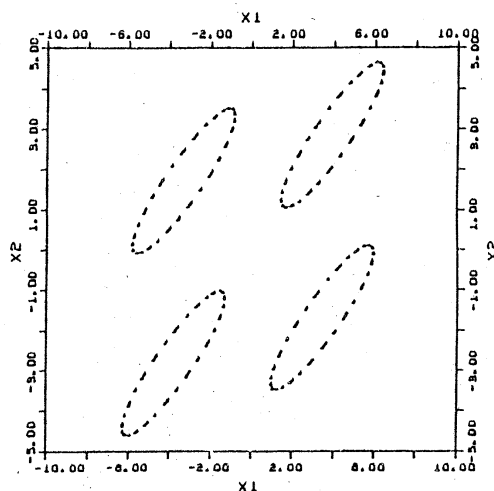
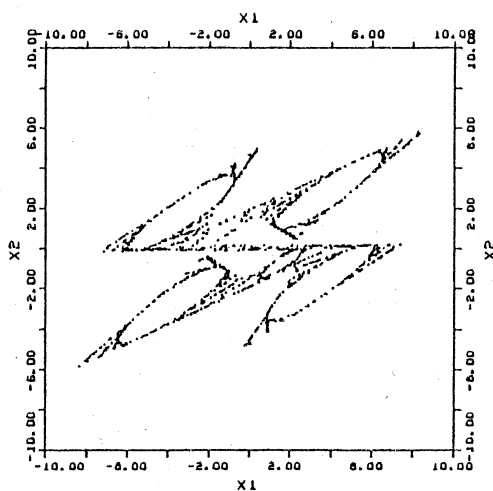
⊠A-2.  $C_2 = 0.6$  のときの strange attractor の変化

$C_2$  を固定して、 $T$  を変化させたとき、 $C_2$  が 1 に近くなる程、発散する  $T$  の値が小さくなる。また、⊠A-1 で見られるような strange attractor がひとつとなる現象 (⊠A-1 (iii) 参照) は見られない。

(i)  $T=0.38$ (ii)  $T=0.47$ (iii)  $T=0.49$ (iv)  $T=0.56$ 

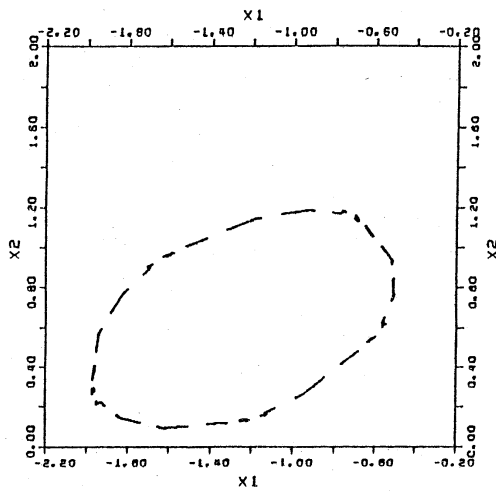
図A-3. 図2の曲線MNを横切って $T$ を変化させたときの典型的な strange attractor の変化 ( $C_2 = -1.0$ )

$T$ が大きくなるにつれて、不変閉曲線に突起が生じて、strange attractor となる。さらに、2個の strange attractor が原点でひっついて、ひとつの strange attractor となる。

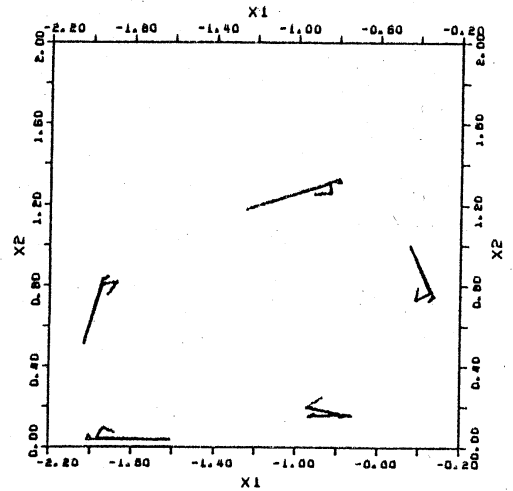
(i)  $T = 1.3863$ (ii)  $T = 1.3865$ (iii)  $T = 1.39$ 

☒ A-4  $C_2 = -0.3$  のときの strange attractor.

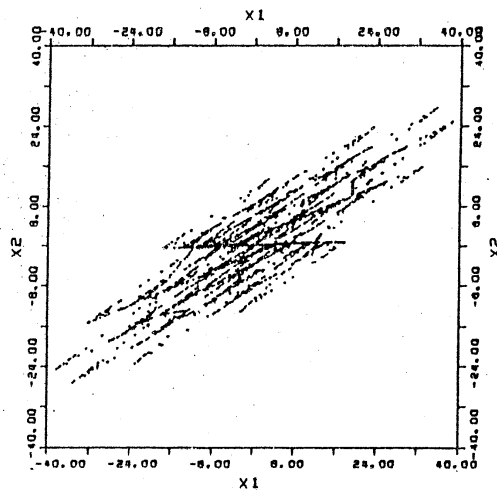
このとき、曲線 MN を横切ると、4 個の不変閉曲線ができ、解は右回りにそれぞれの不変閉曲線間を飛びまわり、4 回で元の不変閉曲線に戻る。さらに  $T$  を大きくすると突然、(iii) のような strange attractor となる。

(i)  $T=0.79$ 

☒ A-5  $C_2 = -0.6$  のときの strange attractor

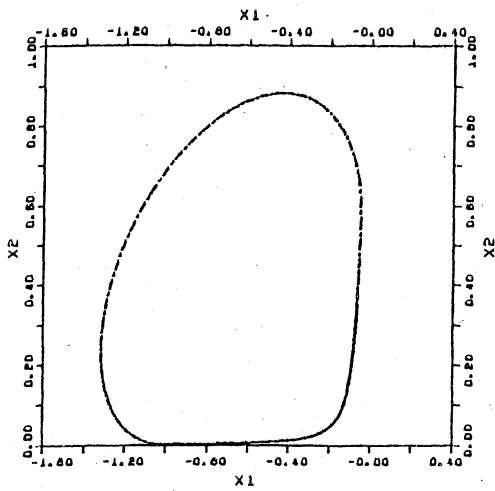
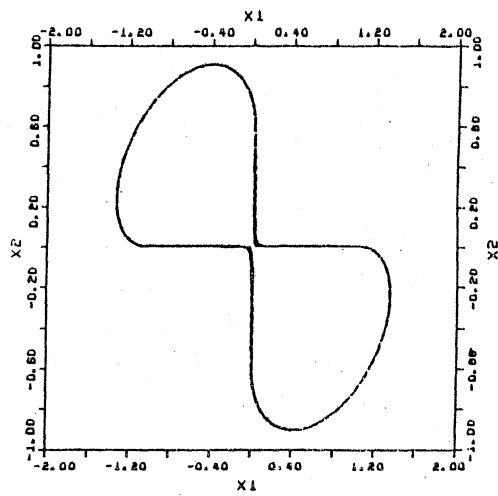
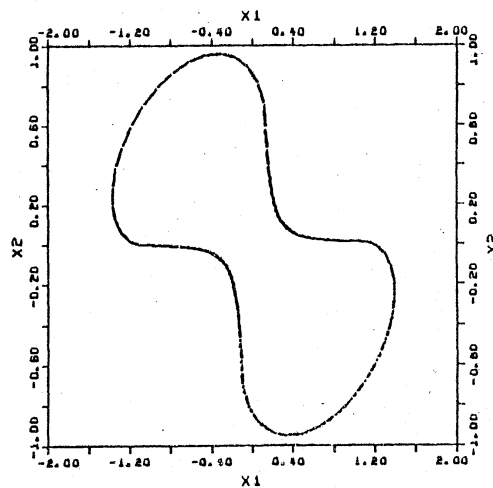
(ii)  $T=0.795$ 

このとき、☒ A-3 と同様の变化をするが、☒ A-3 (i) から (ii) に変化する途中で、上図のような変化が起こる。



☒ A-6  $C_2 = -0.28$ ,  $T = 1.45$  のときの strange attractor

パラメータが点 M に近いとき、☒ A-6 のような strange attractor が存在する。このとき、strange attractor の大きさは他の strange attractor に比べてかなり大きい。

(i)  $T=0.05$ (ii)  $T=0.07$ (iii)  $T=0.1$ 

図A-7  $C_2 = -1.6$  のときの位相平面の変化.

$C_2 < -1.5$  のとき、 $\forall T$  に対して安定不動点は存在しない。しかし、 $C_2$  が  $-1.5$  に近いときには、 $T$  が十分小さければ、上図のような不変閉曲線が存在する。