数理解析研究所講究録
507巻 1983年 16-32

ARIMA processes における種々の統計量の漸近的性質について

東京工大・理 矢島美寛 (Yoshihiro Yajima)

§1. 序

確率過程 $\{w_t\}$ が、次式をみたす時、ARIMA(p,d,q) $\times(P,D,Q)_s$ process と呼ばれる。(Box and Jenkins (1976))

$$\phi(B)\Phi(B^s)\nabla^d\nabla_s^D w_t=\theta(B)\Theta(B^s)e_t,$$

(i) $\{e_t\}$; i.i.d. $N(0,\sigma_e^2)$,

(ii) $Bw_t \underset{\mathrm{d}}{=} w_{t-1}$, $\nabla \underset{\mathrm{d}}{=} 1-B$, $\nabla_s \underset{\mathrm{d}}{=} 1-B^s$,

(iii) $\phi(B)=1-\sum_{i=1}^{p}\phi_i B^i$, $\theta(B)=1-\sum_{i=1}^{q}\theta_i B^i$,

$\Phi(B^s)=1-\sum_{i=1}^{P}\Phi_i B^{is}$, $\Theta(B^s)=1-\sum_{i=1}^{Q}\Theta_i B^{is}$,

(iv) $\phi(z)$, $\theta(z)$, $\Phi(z)$, $\Theta(z)$ はすべて単位円外に根をもつ。

Box-Jenkins の identification の方法では、sample autocorrelation, sample partial autocorrelation が、主要な道具となる。しかし非定常過程の場合、定常の時とは異なり、エルゴード性、中心極限定理が成立せず、これらの統計量の性質はあま

り知られていない。（注．非定常過程においては、時点ごとに、真の autocorrelation , partial autocorrelation は変化する。本論では、定常過程において定義されたのと、同様の方法で構成された統計量を、非定常の際にも便宜的に sample autocorrelation , sample partial autocorrelation と呼ぶ。）

ここでは Hasza and Fuller (1979) $(d=2, D=0)$, (1982) $(d=1, D=1)$ の用いた方法を一般化することにより、一般の d , D について、これらの統計量の漸近的性質を明らかにする。またこれらの結果に関連する、二，三の応用例について報告する。

§ 2. The sample autocorrelations and partial autocorrelations

従来、sample autocorrelation については、Hasza (1980) が、$d=1$, $P=D=Q=0$ の場合を、sample partial autocorrelation については、Hamilton and Watts (1978) が、$d=D=0$ (stationary) の場合を、各々論じている。ここでは一般の D 及び d について考察する。

仮定（一般性を失なわない）

(i) $\Phi(B^s) \equiv \Theta(B^s) \equiv 1$ (i.e. $P=Q=0$)

(ii) ここで考える ARIMA $(p,d,q)\times(0,D,0)_s$ モデルは、「初期条件として、確率変数の集合、$\{W_t ; -Ds-d+1$

$\le t \le 0\}$ s.t. $EW_t^2 < \infty$ と、確率変数列 $\{e_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ i.i.d. $N(0, \sigma_e^2)$ とが、与えられ、

$$\phi(B)\nabla^d \nabla_S^D w_t = \theta(B) e_t, \quad t \ge 1,$$

をみたす w_t を意味する。

本論での目的のためには、以下で定義する $D_T^{-1} W_T' W_T D_T^{-1}$ の漸近分布が必要となる。W_T は $(T-DS-d)\times(DS+d)$ の行列で、その (i,j) 要素は、

$$\nabla^d \nabla_S^{D-j^*} w_{DS+d+i-j}, \quad (j^*-1)S+1 \le j \le j^*S, \quad 1 \le j^* \le D,$$

$$\nabla^{d-j^*} w_{DS+d+i-j}, \quad j = DS+j^*, \quad 1 \le j^* \le d.$$

一方 D_T は、$(DS+d)\times(DS+d)$ の対角行列で、その (i,i) 要素は

$$T^{i^*}, \quad (i^*-1)S+1 \le i \le i^*S, \quad 1 \le i^* \le D,$$

$$T^{D+i^*}, \quad i = DS+i^*, \quad 1 \le i^* \le d.$$

$\mathbb{W}$ を、$D_T^{-1} W_T' W_T D_T^{-1}$ が法則収束 $(T \to \infty)$ する分布をもつ、random な行列とする。（具体的な形は、最後の Appendix で与える。）

<u>Sample autocorrelations</u>

観測値を、$\{w_1, w_2, \cdots, w_T\}$ として、sample autocorrelation を、

$$\hat{r}(k) = \sum_{t=1}^{T-k} (w_t - \overline{w}_T)(w_{t+k} - \overline{w}_T) \Big/ \sum_{t=1}^{T} (w_t - w_T)^2$$

で定義する。ここで $\overline{w}_T = \sum_{t=1}^{T} w_t / T$.

定理 1　$x_t \underset{d}{=} \nabla^d \nabla_s^D w_t$ (stationary ARMA process)

$\gamma(k) \underset{d}{=} E x_t x_{t+k}$

(i) $D=1, d=0$,

$$\hat{r}(k) \xrightarrow{L} Z_1(k^*), \quad k = ns + k^*, \ 0 < k^* \le s-1,$$

$$T\{1-\hat{r}(k)\} \xrightarrow{L} nZ_2 + \rho(n) Z_3, \quad k = ns.$$

(ii) $D \ge 2, d=0$,

$$\hat{r}(k) \xrightarrow{L} Z_1(k^*), \quad k = ns + k^*, \ 0 < k^* \le s-1,$$

$$T\{1-\hat{r}(k)\} \xrightarrow{L} nZ_4, \quad k = ns.$$

(iii) $D \ge 1, d \ge 1$,

$$T\{1-\hat{r}(k)\} \xrightarrow{L} kZ_5.$$

$Z_1(k^*)$, Z_i, $2 \le i \le 5$ は確率変数でWの各要素、及び$S_3(m,k)$, λ_j, $0 \le j \le s-1$, (各々、Appendix で具体的に定義)を用いて、表現できる。$\rho(n) \underset{d}{=} \sum_{i=-n+1}^{n-1} (n-|i|)\gamma(is)/2$

Remark 1

(i) $Z_1(k^*)$, $Z_2 \sim Z_5$ はすべて、$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} V_i A_{ij} V_j \Big/ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} V_i B_{ij} V_j$ という形である。$\{V_i\}$ は、i.i.d. $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. A_{ij}, B_{ij} は定数で、解析的に表現可能であるが非常に複雑である(分母は w.p. 1 で non-zero)

(ii) 定理より$\hat{r}(k)$の形状に関し、以下の事がわかる。

(a) $d \ge 1$, $D \ge 1$ の時 $p\text{-}\lim_{T\to\infty} \hat{r}(k) = 1$, $\forall k$. そしてkが増大する時、linearに減衰する。(傾きはサンプルに

依存する。)

(b) $d=0$, $D\geq 2$ の時、$\underset{T\to\infty}{p\text{-}lim}\,\hat{\tau}(k)=1$, $k=ns$. $\hat{\tau}(ns)$ は n に関して、linear に減衰. $k\equiv k'\neq 0 \pmod{s}$ の時、$\hat{\tau}(k)$, $\hat{\tau}(k')$ は、同じ分布へ収束

(c) $d=0$, $D=1$ の時、$\underset{T\to\infty}{p\text{-}lim}\,\hat{\tau}(k)=1$, $k=ns$. ただし $\hat{\tau}(ns)$ は、n に関して linear に減衰するとはかぎらない。($\rho(n)$ の影響) $\{x_t\}$ が $MA(q)$ process ($q<s$) 等であれば、$\rho(n)=\frac{n}{2}\gamma(0)$ となり、linear に減衰.

(iii) 定理 1 で、$s=1$ とおけば、$d=D=0$ (stationary) を除いて、すべての場合を尽くしている。

<u>Sample partial autocorrelation</u>

$\{\hat{\beta}_1(k), \hat{\beta}_2(k), \cdots, \hat{\beta}_k(k)\}$ を、

$$\sum_{t=k+1}^{T}\{w_t-\sum_{i=1}^{k}\beta_i(k)w_{t-i}\}^2/(T-k)$$

を最小にする、$\{\beta_1(k), \beta_2(k), \cdots, \beta_k(k)\}$ とする。

$\hat{\beta}_k(k)$ を lag k の sample partial autocorrelation 、同様に $\hat{\alpha}_k(k)$ を $x_t=\nabla^d\nabla_s^D w_t$ の lag k の sample partial autocorrelation と呼ぶ。

<u>定理 2.</u> $Pr\{\det W\neq 0\}=1$ を仮定.

(i) $1\leq k\leq d$, $\hat{\beta}_k(k)\xrightarrow{p}(-1)^{k+1}$, $(T\to\infty)$,

(ii) $(i-1)s+d<k\leq is+d$, $1\leq i\leq D$,

(a) $k=is+d$, $\hat{\beta}_k(k)\xrightarrow{p}(-1)^{i+d+1}$, $(T\to\infty)$,

(b) $k \neq is+\alpha$, $\hat{\beta}_k(k)$ は一般に退化しない分布へ法則収束

(iii) $k > DS+\alpha$, $\hat{\beta}_k(k) = (-1)^{D+\alpha}\hat{\phi}_{k-DS-\alpha}(k-DS-\alpha) + O_p(1/T)$.

（略証） (i); $\mathbb{D}_k$ を $(k+1)\times(k+1)$ 行列で、

$$\mathbb{D}_k = (\tilde{\mathbb{C}}_{k,0},\ L\tilde{\mathbb{C}}_{k-1,0},\ \cdots,\ L^k\tilde{\mathbb{C}}_{0,0})'$$

と定義する。 ここで

$$\tilde{\mathbb{C}}_{i,j} \underset{\alpha}{=} (C_{i,j,0},\ C_{i,j,1},\ \cdots,\ C_{i,j,js+i},\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)',$$

また

$$\sum_{l=0}^{js+i} C_{i,j,l}B^l \underset{\alpha}{=} (1-B)^i(1-B^s)^j.$$

一方 L は $(k+1)\times(k+1)$ の行列で、その (i,j) 要素は、$i-j=1$ の時は 1、$i-j\neq 1$ の時は 0。$\underset{\sim}{\alpha}(k) = \{1, -\hat{\alpha}_1(k), \cdots, -\hat{\alpha}_k(k)\}$ を次式で与える。

$$\underset{\sim}{\alpha}(k) = (\mathbb{D}_k')^{-1}\underset{\sim}{\beta}(k),$$

ここで、$\underset{\sim}{\beta}(k) = \{1, -\hat{\beta}_1(k), \cdots, -\hat{\beta}_k(k)\}'$。仮定および Appendix の結果より、

$$\underset{T\to\infty}{p\text{-}lim}\ \hat{\alpha}_l(k) = 0,\ {}^\forall l,$$

を得る。$(-1)C_{k,0,k} = (-1)^{k+1}$ に注目すれば、結論を得る。

(ii); (i) と同様の論法で、結論を得る。

(iii); $\mathbb{D}_{\alpha,D,k}$ を $(k+1)\times(k+1)$ 行列で、その第 i 行を、

$$(L^{i-1}\hat{\mathbb{C}}_{\alpha,D})',\quad 1 \leq i \leq k+1-DS-\alpha,$$

$$(L^{i-1}\tilde{\mathbb{C}}_{\alpha,i^*})',\quad k+2-(i^*+1)S-\alpha \leq i \leq k+1-i^*S-\alpha,$$

$$0 \leq i^* \leq D-1,$$

$$(L^{i-1}\tilde{c}_{k+1-i,0})', \quad k+2-d \leq i \leq k+1,$$

とする。X_T を $(T-k)\times(k-DS-d)$ 行列で、その (i,j) 要素を x_{k+i-j}, $\tilde{x}_T$ を $(T-k)$ 次元ベクトルで、$\tilde{x}_T=(x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_T)'$ とする。その時、仮定および Appendix の結果より、

$$Q(k) = D'_{d,D,k}\begin{pmatrix} 1 \\ (X_T'X_T)^{-1}X_T'\tilde{x}_T + O_p(1/\sqrt{T}) \\ O_p(1/T) \end{pmatrix}$$

を得る。よって結論が成立する。

§3. 応用例

§2. で論じた結果の応用例として、通常の $ARI(p,d)$ process, $\phi(B)\nabla^d w_t = e_t$ を、非定常 $AR(p+d)$ process と、みなした場合の係数推定、次数 $(p+d)$ 決定について考える。

係数推定

$$1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2-\cdots-\varphi_{p+d}B^{p+d} \underset{\alpha}{=} \phi(B)\nabla^d.$$

定理3 $\quad P_r\{\det W \neq 0\}=1$ を仮定.

$$\hat{\varphi} \underset{\alpha}{=} (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \cdots, \hat{\varphi}_{p+d})',$$

$$\varphi \underset{\alpha}{=} (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{p+d})'.$$

とする。この時.

$$\sqrt{T}(\hat{\varphi}-\varphi) \xrightarrow{L} N(0, \sigma_e^2 D'\Gamma_p^{-1}D) \quad (T\to\infty).$$

ここで、R, Γ_p は各々、$p\times(p+d)$, $p\times p$ の行列で

$$R \triangleq \begin{bmatrix} 1 & C_{d,1} & C_{d,2}, \cdots, & C_{d,d} & & & 0 \\ & 1 & C_{d,1}, & C_{d,2}, & \cdots & C_{d,d} & \\ 0 & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\ & & & 1 & C_{d,1} & C_{d,2} \cdots & C_{d,d} \end{bmatrix}, \quad 1+\sum_{i=1}^{d} C_{d,i}B^i \triangleq (1-B)^d,$$

$$\Gamma_p \triangleq \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(p-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(p-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \gamma(1) \\ \gamma(p-1) & \cdots & \gamma(1) & \gamma(0) \end{bmatrix}$$

$x_t \triangleq \nabla^d W_t$, $\gamma(h) \triangleq E x_t x_{t+h}$ で定義される。

証明は、定理2.(iii)と同様.

<u>Remark 2.</u>

$\sqrt{T}(\hat{\varphi}-\varphi)$ の漸近分布は、退化した正規分布である。(rank p)。ちなみに $p=0$, $d=1$ の L.S.E の漸近分布は、White(1958), M.M.Rao(1978), Evans and Savin(1981)が、論じている。$\hat{\varphi}=\sum_{t=1}^{T-1} W_t W_{t+1} / \sum_{t=2}^{T} W_t^2$ となり、定理1.(1)($S=1$)より、consistency の order は $1/T$ である。($\varphi=1$)。

<u>次数決定</u>

次数決定にAICを用いた場合を考える。

$$AIC(k) \triangleq T\log\hat{\sigma}_e^2(k)+2k, \quad 0\le k\le \bar{K},$$

ここで、$\hat{\sigma}_e^2(k) \triangleq \min_{\beta_i(k)} \sum_{t=k+1}^{T}\{W_t-\sum_{i=1}^{k}\beta_i(k)W_{t-i}\}^2/T$.

この時、Shibata(1976)の結果が、非定常ARI過程についても、そのまま成立する。

定理4. $Pr\{\det W \neq 0\} = 1$ を仮定。

$\hat{k}$ ≡ AIC(k)を最小にするk.

$$\lim_{T\to\infty} Pr\{\hat{k} = k\} = \begin{cases} p_{k-(p+d)}\, q_{\bar{k}-k}, & (p+d \leq k \leq \bar{k}), \\ 0 & , \text{ otherwise.} \end{cases}$$

(記号はShibata(1976)と同じ定義)

(略証)　まず、仮定とAppendixの結果より

$$\hat{\sigma}_e^2(k) = O_p(T^{2(d-k)-1}), \qquad k < d,$$

$$p\text{-}\lim_{T\to\infty} \hat{\sigma}_e^2(k) = \sigma_{k-d}^2, \qquad k \geq d,$$

を証明する。σ_k^2 は、$x_k, x_{k-1}, \cdots, x_1$ が与えられた時の、x_{k+1} に対する最良予測量の二乗予測誤差. $k < p+d$ の時は、これらの結果より、ただちに証明される。$k \geq p+d$ の時は、まず $x_t = \nabla^d w_t$ とし、$\tilde{\sigma}_e^2(k)$ を

$$\tilde{\sigma}_e^2(k) = \min_{\phi_i(k)} \sum_{t=k+1}^{T} \{x_t - \sum_{i=1}^{k} \phi_i(k) x_{t-i}\}^2 / T$$

で定ぎする。この時.

$$\{\hat{\sigma}_e^2(k+1)/\hat{\sigma}_e^2(k)\} - \{\tilde{\sigma}_e^2(k+1-d)/\tilde{\sigma}_e^2(k-d)\} = o_p(1/T)$$

が証明されれば、Shibata(1976)と、同様の手続きで、定理を得る。上式は、左辺の各項を、$\hat{\phi}_{k+1}(k+1)$, $\tilde{\phi}_{k+1-d}(k+1-d)$ を用いて表現した後、定理2. 及び冒頭の結果より示される。

Remark 3.

(i) Hannan and Quinn (1979) は、定常AR過程に対し、AIC(k)を $\phi(k) \equiv T \log \hat{\sigma}_e^2(k) + 2kC \log\log T,\ C>1,$ のように修正すれば、$\phi(k)$を最小にする $\hat{k}$ は、consistent(概収束)であることを示した。$\phi(k)$を非定常ARI過程に用いても、consistencyが言える。(ただし、目下のところ確率収束まで)。

(ii) 定理4の意味することは、

(a) Shibata (1976) の結果は、定常、非定常に関わりなく、AR型のprocessに対して成立すること、

(b) 対象とするprocessが、ARI processと想定される場合、p及びdの決定が必要であるが、その第一段階として、p+dの推定にAICが有効であること、

の以上、二点が挙げられる。

Appendix

§2, §3, の結論及び、仮定のcheckに必要となる、$D_T^{-1} W_T' W_T D_T^{-1}$ の漸近分布について、もとめ方の概略を述べる。手順は二段階よりなる。

(1) $\{u_t\}$ を ARIMA $(0,0,0)\times(0,D+d,0)_s$ process, i.e. $\nabla_s^{D+d} u_t = e_t,\ t \geq 1$, として、$\{W_t\}$ を $\{u_t\}$ により表現する。

(2) $\widetilde{D}_T^{-1} U_T' U_T \widetilde{D}_T^{-1}$ の漸近分布をもとめる。ここで U_T は、$\{T-(D+d)S\} \times (D+d)S$ 行列で、その (i,j) 要素は、

$$\nabla_S^{D+d-j^*} u_{(D+d)S+i-j}, \quad (j^*-1)S+1 \leq j \leq j^* S,$$
$$1 \leq j^* \leq D+d,$$

により定義され、$\widetilde{D}_T$ は、$(D+d)S \times (D+d)S$ の対角行列で、その (i,i) 要素は、

$$T^{i^*}, \quad (i^*-1)S+1 \leq i \leq i^*, \quad 1 \leq i^* \leq D+d .$$

◎ $\{u_t\}$ は、「S個の独立なARIMA(0, D+d, 0) processより構成される」とみなせるので、$\widetilde{D}_T^{-1} U_T' U_T \widetilde{D}_T^{-1}$ の漸近分布は、Hasza and Fuller (1979), (1982), Yajima (1982) の analogyで導ける。

補題 A.1.

(i) $0 \leq i \leq d,\ 0 < j \leq D,\ \forall h,$

$$\underset{t\to\infty}{p\text{-}lim} (\nabla^{d-i} \nabla_S^{D-j} w_t - \nabla^{d-i} \nabla_S^{D-j} w_{t+hS}) / t^{i+j-1/2} = 0,$$

(ii) $0 < i \leq d,\ 0 \leq j \leq D,\ \forall h,$

$$\underset{t\to\infty}{p\text{-}lim} (\nabla^{d-i} \nabla_S^{D-j} w_t - \nabla^{d-i} \nabla_S^{D-j} w_{t+h}) / t^{i+j-1/2} = 0,$$

(iii) $0 \leq i \leq d,\ 0 \leq i' \leq d,\ 0 < j \leq D,\ 0 < j' \leq D,\ \forall h, \forall \ell, \forall m, \forall n,$

$$\underset{T\to\infty}{p\text{-}lim} \sum_{t=1}^{T} (\nabla^{d-i} \nabla_S^{D-j} w_{t+m} \nabla^{d-i'} \nabla_S^{D-j'} w_{t+n} - \nabla^{d-i} \nabla_S^{D-j} w_{t+hS+m}$$
$$\times \nabla^{d-i'} \nabla_S^{D-j'} w_{t+\ell S+n}) / T^{i+i'+j+j'} = 0,$$

(iv) $0 < i \leq d,\ 0 < i' \leq d,\ 0 \leq j \leq D,\ 0 \leq j' \leq D,\ \forall h, \forall \ell, \forall m, \forall n,$

$$\operatorname*{p-lim}_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}\left(\nabla^{d-i}\nabla_s^{D-j}w_{t+m}\nabla^{d-i'}\nabla_s^{D-j'}w_{t+n}-\nabla^{d-i}\nabla_s^{D-j}w_{t+h+m}\right.$$
$$\left.\times\nabla^{d-i'}\nabla_s^{D-j'}w_{t+l+n}\right)/T^{i+i'+j+j'}=0.$$

証明は二次モーメントを評価すれば、明らか。

以下で、いくつかの記号を導入する。

◎ $\phi_i^* \underset{\alpha}{=} -\sum_{j=0}^{p'}\phi_{js+i}$, $\Theta_i^* \underset{\alpha}{=} -\sum_{j=0}^{q'}\theta_{js+i}$.

ここで $p'=[p/s]$, $q'=[q/s]$, $\phi_0=\theta_0=-1$,

$\phi_i=0,\ i>p$, $\theta_i=0,\ i>q$.

◎ $\widehat{\Phi} \underset{\alpha}{=} [\Phi^*, M\Phi^*, \cdots, M^{s-1}\Phi^*]'$

$\widehat{\Theta} \underset{\alpha}{=} [\Theta^*, M\Theta^*, \cdots, M^{s-1}\Theta^*]'$

は各々、s×s の巡回行列で、Φ^*, Θ^*, M は各々、

$\Phi^* \underset{\alpha}{=} (\phi_0^*, \phi_1^*, \cdots, \phi_{s-1}^*)'$, $\Theta^*=(\theta_0^*, \theta_1^*, \cdots, \theta_{s-1}^*)'$,

$$M \underset{\alpha}{=} \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & 1 \\ I_{s-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix}_{s\times s},$$

で定義される。I_{s-1} は $(s-1)\times(s-1)$ の単位行列.

補題A.2. $\widehat{\Phi}$, $\widehat{\Theta}$ は non-singular

（略証） 巡回行列の行列式に関する公式、及び、stationarity, invertibility に関する仮定より示せる.

補題A.2より $\Delta(\underset{\alpha}{=}\widehat{\Phi}^{-1}\widehat{\Theta})$ も non-singular な s×s 巡回行列となる。以上の結果を用いて w_t の u_t による表現を得る。

<u>命題 A.1.</u>　$\lambda_j,\ 0 \le j \le S-1$ を Λ の $(1, j+1)$ 要素とする。

$$\nabla^{d-j} \nabla_S^{D-i} w_t = S^{j-1} \lambda^* \sum_{l=0}^{S-1} \nabla_S^{D+d-i-j} u_{t-l} + o_p(t^{i+j-1/2}),\ j \ge 1,$$

$$= \sum_{l=0}^{S-1} \lambda_l \nabla_S^{D+d-i} u_{t-l} \qquad + o_p(t^{i-1/2}),\quad j=0,$$

ここで $\lambda^* \underset{d}{=} \sum_{l=0}^{S-1} \lambda_l$.

証明は補題 A.1 を繰り返し用いる。Λ が non-singular より $\lambda^* \neq 0$ が言える。

次に第二段階の、$\widehat{D}_T^{-1} U_T' U_T \widehat{D}_T^{-1}$ の漸近分布をもとめるために、一連の定数、確率変数を導入する。

（定数）　　　$\widetilde{B}_{2i}$; ベルヌーイ定数

$$\gamma_i = (-1)^{i+1} 2 / \{(2i-1)\pi\},\ i \ge 1,$$

$$\nu_i = 2^{2(i+1)} \{2^{2(i+1)} - 1\} \widetilde{B}_{2(i+1)} / (2i+2)!,\ i \ge 0,$$

$$\mu_{i,j} \begin{cases} = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-1-l} \gamma_i^{2(n-l)} / (2l)! & ,\ j=2n, \\ = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-1-l} \gamma_i^{2(n-l)} / (2l+1)! + (-1)^n \gamma_i^{2n+1} & ,\ j=2n+1, \end{cases}$$

$$\rho_{i,j,k} = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} 2(-1)^{l+m} (m-l) \binom{k-1}{l} \binom{k-1}{m}$$

$$\times \int_0^1 \int_0^x (1 - x^{2k-2-l-m}) x^l y^m \cos\frac{(2i-1)\pi x}{2} \cos\frac{(2j-1)\pi y}{2} dx dy.$$

（確率変数）

$$\{V_{ij}\};\ 0 \le i \le S-1,\ 1 \le j < \infty,\ i.i.d.\ N(0, \sigma^2),$$

$$S_1(m, k, l) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{2m} V_{kn} V_{ln},$$

$$S_2(m, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{2m+1} V_{kn},$$

$$S_3(m, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n,m} V_{kn},$$

$$S_4(m,k,\ell)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}(\rho_{n,t,m}-\rho_{t,n,m})V_{kn}V_{\ell t}.$$

そして、$\xi_{i,j}(k,\ell)$, $(1\leq i,j\leq D+d,\ 0\leq k,\ell\leq S-1)$ を次式で定義する。

$$\xi_{i,j}(k,\ell)=(-1)^{m+n}\Big[S_1(m+n+\delta,k,\ell)+2\Big\{\sum_{a=1}^{m}(-1)^a S_2(m+n+\delta-a,\ell)\times S_3(2a,k)+\sum_{a=1}^{n}(-1)^a S_2(m+n+\delta-a,k)S_3(2a,\ell)\Big\}+2\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{n}(-1)^{a+b}V_{m+n+\delta-a-b}S_3(2a,k)S_3(2b,\ell)\Big],$$

$$(i=2m+\delta,\ j=2m+\delta)$$

$$=\sum_{n=0}^{m-1}2(-1)^n S_3(i-2m+n,k)S_3(i-n,\ell)+(-1)^m\{S_3(i-m,k)S_3(i-m,\ell)+S_4(i-m,k,\ell)\},$$

$$(i=j+2m+1,\ m\geq 0)$$

$$=\xi_{j,i}(\ell,k),\qquad (j=i+2m+1,\ m\geq 0),$$

ここでδは0または1、m,nは、δ=0の時、$m,n\geq 1$、δ=0の時は、$m,n\geq 0$である。

この時、$\tilde{D}_T^{-1}U_T'U_T\tilde{D}_T^{-1}$の漸近分布を得る。

命題A.2. Uは$(D+d)S\times(D+d)S$のrandomな行列で、

$$U=\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1,D+d}\\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2,D+d}\\ \vdots & \vdots & & \\ U_{D+d,1} & U_{D+d,2} & \cdots & U_{D+d,D+d}\end{bmatrix}$$

と定義する　U_{ij}は、S×S行列で、その(k,ℓ)要素$u_{ij}(k,\ell)$は、

$$u_{ij}(k,\ell)=\sum_{n=0}^{S-1}\xi_{i,j}(\overline{\ell-k+n},n)/S^{i+j},$$

とする。$\bar{i}$は $\bar{i}=i-[i/s]\times S$ で定義する。この時

$$\tilde{D}_T^{-1}U_T'U_T\tilde{D}_T^{-1}\xrightarrow{L}U,\ (T\to\infty)$$

が成立する。

（略証）　$\{\tilde{u}_{i,t}\}$, $0\le i\le S-1$, を

$$\tilde{u}_{i,t}=u_{(t-1)S+i},\quad (t-1)S+i\ge 1,$$
$$=\quad 0\quad,\ otherwise$$

で定義する。$\{\tilde{e}_{i,t}\}$ も同様に定義すれば、$\nabla^{D+d}\tilde{u}_{i,t}=\tilde{e}_{i,t}$, $t\ge 1$, が成立する．すなわち $\{\tilde{u}_{i,t}\}$, $0\le i\le S-1$, は独立なS個の ARIMA (0, D+d, 0) processes となるので、Hasza and Fuller (1979), (1982), Yajima (1982)と同様の方法で、結論を得る。

最後に、補題 A.1 を繰り返し適用し、命題A.1 と A.2 を結合すると、$D_T^{-1}W_T'W_TD_T$ の漸近分布を得る．

定理 A.1.　$H\,\bar{=}\,diag(\lambda^*, S\lambda^*, \cdots, S^{d-1}\lambda^*)$, $d\times d$,

$J_S\,\bar{=}\,(1, 1, \cdots, 1)'$, $S\times 1$,

とおく．この時

$$D_T^{-1}W_T'W_TD_T^{-1}\xrightarrow{L}\begin{bmatrix} I_D\otimes\Lambda & 0 \\ 0 & H\otimes J_S' \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} I_D\otimes\Lambda' & 0 \\ 0 & H\otimes J_S \end{bmatrix}$$

$(T\to\infty)$ が成立する。ここでI_Dは $D\times D$ の単位行列，$\otimes$は Kronecker product を意味する。（右辺を§2, §3ではWとする。）

References

Box, G. E. P. and Jenkins, J. M. (1976) *Time Series Analysis, Forecasting and Control* (Revised ed.) San Francisco:Holden Day.

Evans, G. B. A. and Savin, N. E. (1981) The calculation of the limiting distribution of the least squares estimator of the parameter in a random walk model. *Ann. Statist.* 9, 1114-1118.

Hamilton, E. J. and Watts, D. G. (1978) Interpreting partial autocorrelation function of seasonal time series models. *Biometrika* 65, 135-140.

Hannan, E. J. and Quinn, B. G. (1979) The determination of the order of an autoregression. *J. R. Statist. Soc. B* 41, 190-195.

Hasza, D. P. and Fuller, W. A. (1979) Estimation for autoregressive processes with unit roots. *Ann. Statist.* 7, 1106-1120.

Hasza, D. P. (1980) The asymptotic distribution of the sample autocoorelations for an integrated ARMA process. *J. Amer. Statist. Assoc.* 70, 349-352.

Hasza, D. P. and Fuller, W. A. (1982) Testing for nonstationarity parameters specification in seasonal time series models. *Ann. Statist.* 10, 1209-1216.

Rao, M. M. (1978) Asymptotic distribution of an estimator of the boundary parameter of an unstable process. *Ann. Statist.* 6, 185-190.

Shibata, R. (1976) Selection of the order of an autoregressive model by Akaike's information criterion. *Biometrika* 63, 117-126.

White, J. S. (1958) The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case. *Ann. Math. Statist.* 29, 188-197.

Yajima, Y. (1982) Estimation of the degree of differencing of an ARIMA process by an AR model fitting. (submitted)