数理解析研究所講究録
508巻 1983年 12-24

解析的汎関数の積分表示

岡山大 教養 津野 義道
(Yoshimichi Tsuno)

複素平面 $\mathbb{C}$ 内の compact set K に対して、Kの近傍で正則な関数の全体を $\mathcal{O}(K)$ とする。$\mathcal{O}(K)$ には、(DFS) spaceの位相が入る。$\mathcal{O}(K)$ 上の連続な線型汎関数全体のなす空間 $\mathcal{O}'(K)$は Fréchet space になり、その具体的な表現として次の同型定理が知られている。

Silva-Köthe-Grothendieck の双対定理

(1) $$\mathcal{O}'(K) \cong \mathcal{O}(V-K) / \mathcal{O}(V)$$

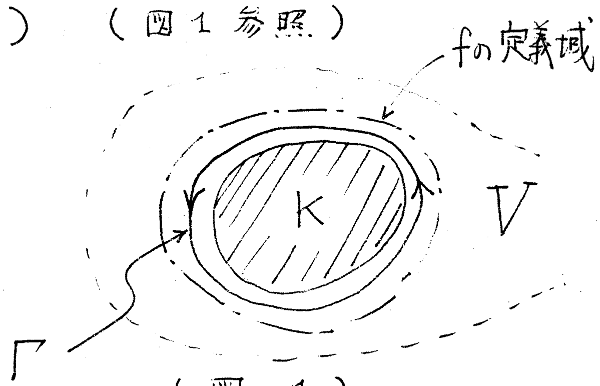
ただし、VはKを含む任意の開集合。

さらに、この定理では $\mathcal{O}(K)$ と $\mathcal{O}'(K)$ の具体的な双対公式も与えられている。即ち、$\forall f(z) \in \mathcal{O}(K)$, $\forall \varphi(z) \in \mathcal{O}(V-K)$ に対して、道 Γ を、f と φ の共通の定義域の中でKを正の向きに1周するようにとれば、

(2) $$< f, \varphi > = \int_\Gamma f(z)\varphi(z)\, dz$$

で与えられる。（註：積分の前に定数 $(2\pi i)^{-1}$ をつけたり、(−1)倍したりする流儀もある。）（図1参照）

この双対定理は、A. Martineau, R. Harvey によって、高次元の場合へ拡張されている。



（図 1.）

Martineau-Harvey の双対定理

$\mathbb{C}^n$ 内の compact set K は、条件 $H^p(K, \mathcal{O}) = 0$ $(p \geqq 1)$ をみたすとする。このとき、次の同型が成り立つ：

(3) $$\mathcal{O}'(K) \cong H^{n-1}(V - K, \mathcal{O})$$

ただし、V は K を含む任意の正則領域。

A. Martineau, R. Harvey によるこの定理の証明方法は、Serre の双対定理に基礎を置き、関数解析と cohomology 理論を援用するもので、(2) に相当する具体的な双対公式は得られていない。本稿の目的は、同型定理（3）を、双対公式（2）を一般化することによって、直接証明することであ

3。詳細は次の論文を参照して下さい。

Y.Tsuno, Integral representation of an analytic functional J.Math. Soc. Japan, 34(1982), 379-391.

以下 K は $\mathbb{C}^n$ 内の compact set で次の条件をみたすものとする。

(条件 $*$) K の基本近傍系として、正則領域からなるものがとれるとする。

問題　(条件 $*$) は $H^p(K,\mathcal{O})=0$ $(\forall p\geq 1)$ と同値になるか? [(条件 $*$) $\Longrightarrow$ $H^p(K,\mathcal{O})=0$ $(p\geq 1)$ は正則領域で $\bar\partial$ 方程式が解けることから明らかである。]

主定理　(条件 $*$) をみたす K に対して、双対定理 (3) が成立する。さらに $\mathcal{O}(K)$ と $H^{n-1}(V-K,\mathcal{O})$ の双対公式は次で与えられる。

$\forall f(z)\in\mathcal{O}(K)$, $\forall\varphi(z)$: $V-K$ での C^∞, $\bar\partial$-closed $(0,n-1)$ form に対して

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\partial U}f(z)\varphi(z)\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n \tag{4}$$

ただし、U は $K\subset\subset U\subset\subset V$ かつ f は $\overline{U}$ で正則と

なるようにとる。

証明の方針は、1次元の場合の双対定理（1）と同じである。（1）の証明では、Cauchy の積分核 $(w-z)^{-1}$ が本質的に用いられているが、高次元の場合 正則な積分核をもつ積分公式が近年 E. A. Ramirez, G. M. Henkin によって得られた。それによって、双対公式（4）を基にした同型定理（3）の別証が得られたのである。以下その概略を説明してみたい。

$V-K$ 上の C^∞, $\bar\partial$-closed な $(0, n-1)$ form の全体を $Z_{(0,n-1)}(V-K)$ と記す。$Z_{(0,n-1)}(V-K)$ の任意の元は双対公式（4）によって、$\mathcal{O}(K)$ 上の連続な線型汎関数とみなせる。即ち、次の写像 Φ が定まる。

$$\Phi : Z_{(0,n-1)}(V-K) \longrightarrow \mathcal{O}'(K)$$

空間 $Z_{(0,n-1)}(V-K)$ には、係数毎の C^∞ 位相が入り、それにより $Z_{(0,n-1)}(V-K)$ は Fréchet 空間になる。さらに Φ は、連続な線型写像になる。

(I) Φ が onto になること。

先ず、G. M. Henkin, E. A. Ramirez による正則関数の積分表示について述べよう。

<u>Theorem 1</u> (Henkin, Ramirez)　Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の有界な強擬凸領域で、その境界 $\partial\Omega$ は C^∞ 級であるとする。このとき、x に関する $(0, n-1)$ form $\Omega_{\bar{x}}(x,y)$ で次の性質をもつものが構成できる。

(i)　$\forall y \in \Omega$ を固定したとき $\Omega_{\bar{x}}(x,y)$ は x が $\partial\Omega$ の近傍にあるとき C^∞ な $\bar{\partial}_x$-closed form である。

(ii)　$\forall x \in \partial\Omega$ を固定したとき $\Omega_{\bar{x}}(x,y)$ の各係数は $y \in \Omega$ に関して正則である。

(iii)　$\forall f(z) \in \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ に対して

$$f(y) = \int_{\partial\Omega} f(x)\,\Omega_{\bar{x}}(x,y) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{5}$$

$$\text{for } \forall y \in \Omega$$

(注)　(i) で y を Ω の compact set K に制限したとき、$\Omega_{\bar{x}}(x,y)$ が C^∞ であるような $\partial\Omega$ の近傍は K にのみ依存して決まる。

さて、K 上の任意の解析的汎関数 $T \in \mathcal{O}'(K)$ をとる。K を含む任意の有界強擬凸領域 Ω ($\partial\Omega$ は C^∞ 級) と、$\bar{\Omega}$ で正則な任意の関数 $f(z)$ をとると、積分表示 (5) が得られるが、面積分を Riemann 和の極限と考えれば、それは $\mathcal{O}(K)$ の位相で収束している。よって次の等式が成り立つ。

$$<T(y), f(y)> = \int_{\partial\Omega} f(x) < T(y), \Omega_{\bar{z}}(x,y) > \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n .$$

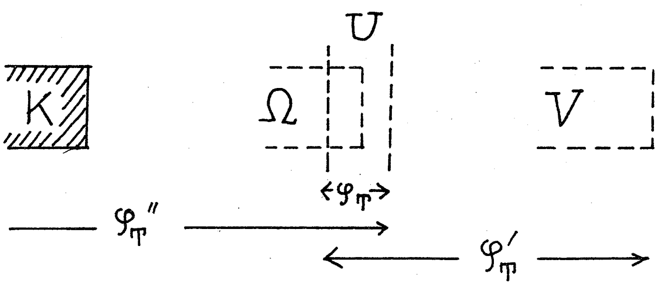
そこで　$\varphi_T(x) = < T(y), \Omega_{\bar{z}}(x,y) >$　とおけば、$\varphi_T(x)$ は $\partial\Omega$ の近傍 U で定義された C^∞, $\bar{\partial}$-closed form で、$\forall f(z) \in \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ に対して

(6)　　$$< T, f > = \int_{\partial\Omega} f(x)\, \varphi_T(x) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

が成り立つ。この $\varphi_T(x)$ を Cousin I 分布の分解に倣って、次の様に分解する。

$$\varphi_T(x) = \varphi_T'(x) - \varphi_T''(x)$$

ただし　φ_T', φ_T'' は共に $\bar{\partial}$-closed で、φ_T' は $(V-\Omega) \cup U$ で定義され、φ_T'' は $U \cup \Omega$ で定義されている。（図２）



（図　２）

このとき、φ_T'' は $U \cup \Omega$ で $\bar{\partial}$-closed だから Stokes の定理より、$\forall f(z) \in \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ に対して　$< f, \varphi_T'' > = 0$　となる。φ_T' を改めて φ_T と書けば、以上の事により、任意の $T \in \mathcal{O}'(K)$ に対して（6）が成り立つ様な $\varphi_T(x)$ が $(V-\Omega) \cup U$ で存在した事になる。そこで Ω を順次取り直して K に近づけて

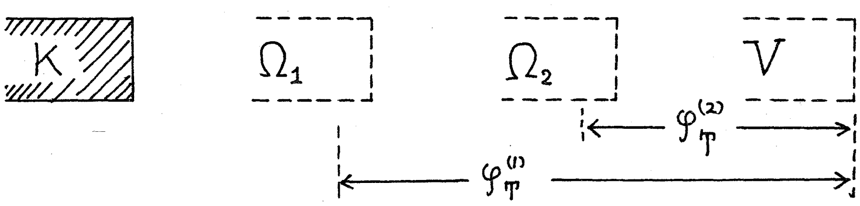
いくことにより、この φ_T を $V-K$ 全体に接続していく事を考える。その為、正則関数に"直交"する C^∞ form を調べる事が必要になる。次の定理である。

<u>*Theorem 2*</u> (S. A. Dautov)　Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の有界な強擬凸領域で、その境界 $\partial\Omega$ は C^∞ 級であるとする。$\varphi(z)$ は $\partial\Omega$ の近傍で定義された C^∞, $\bar\partial$-closed $(0,n-1)$ form とする。このとき、次は同値である。

(i) $$\int_{\partial\Omega} f(z)\varphi(z)\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n = 0 \quad \text{for } {}^\forall f \in \mathcal{O}(\overline{\Omega})$$

(ii) $\exists\, \tilde{\varphi}(z)$; $\overline{\Omega}$ の近傍で定義された C^∞, $\bar\partial$-closed $(0,n-1)$ form で、$\partial\Omega$ の近傍では $\varphi(z)$ に一致する。

さて、$K \subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset V$ となる様な2つの強擬凸領域 Ω_1, Ω_2 をとる。それらの境界は滑らかとする。これらの Ω_i $(i=1,2)$ に対して (6) が成り立つ様な $\varphi_T^{(i)}$ が構成された。（図 3）

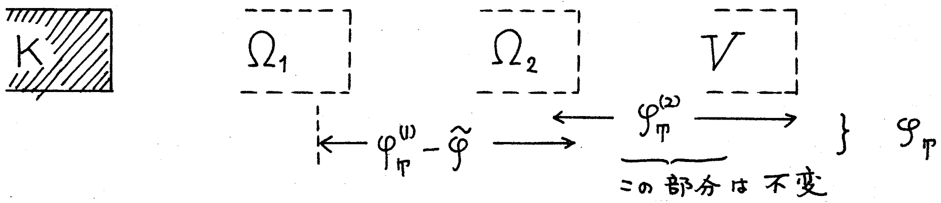


（図　3）

そこで Ω_2 と $\varphi_T^{(1)}-\varphi_T^{(2)}$ に対して Theorem 2 を適用する。従って $\overline{\Omega}_2$ の近傍で定義された C^∞, $\bar\partial$-closed form $\tilde\varphi$ が存在して、$\partial\Omega_2$ の近傍では $\varphi_T^{(1)}-\varphi_T^{(2)}$ に一致する。そこで新らたに φ_T を

$$\varphi_T(z)=\begin{cases}\varphi_T^{(2)}(z) & \text{for } z\in V-\Omega_2\\ \varphi_T^{(1)}(z)-\tilde\varphi(z) & \text{for } z\in(\Omega_2-\Omega_1)\text{の}\Omega_2\text{内の近傍}\end{cases}$$

と定義すれば、（図４参照）



（図 4）

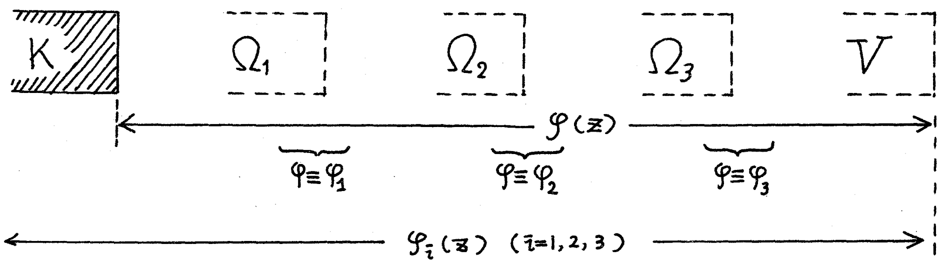
$\varphi_T^{(2)}$ は $V-\Omega_2$ での値を変える事なく、関係式（6）を保ちつつ $V-\Omega_1$ の V 内の近傍にまで接続されていく事がわかった。主定理の（条件＊）より K は強擬凸領域で近似できるから、この接続をくり返し続けていけば、φ_T は $V-K$ 全体に接続が可能になる。即ち、$\forall T\in\mathcal{O}'(K)$ に対して、双対公式（4）によって T を表現するような $\varphi_T(z)$ が $Z_{(0,n-1)}(V-K)$ の中に存在する。従って、写像 Φ は onto である。

（II） Φ の kernel を決定する事

$\varphi(z)\in Z_{(0,n-1)}(V-K)$ が $V-K$ で $\bar\partial$-exact form に

なっていれば、Stokesの定理より φ はK上の解析的汎関数としては0になる。ここでは、この逆が成り立つ事を示す。

解析的汎関数としては0になる様な任意の $\varphi(z) \in Z_{(0,n-1)}(V-K)$ をとる。さらに $K \subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega_3 \subset\subset V$ となる様な、境界が滑らかな強擬凸領域 Ω_i ($i=1,2,3$) をまず考える。ここで、各 Ω_i に *Theorem 2* を適用すれば、V における C^∞, $\bar{\partial}$-*closed* な $(0, n-1)$ *form* $\varphi_i(z)$ がとれて、$\varphi_i(z)$ は $\partial\Omega_i$ の近傍で φ に一致するようにできる。(図 5)

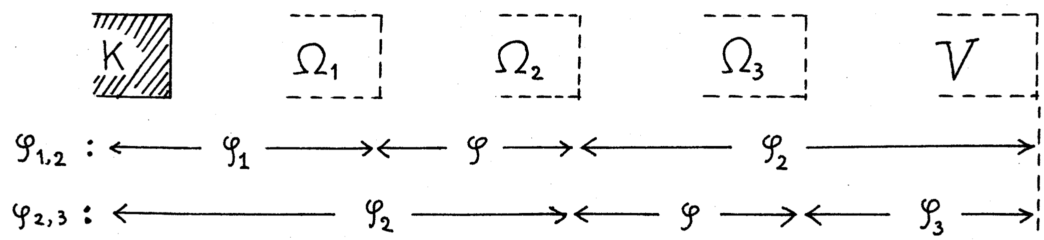


(図 5)

ここで、$\varphi_{1,2}$ 及び $\varphi_{2,3}$ を次の様に定義する。(図 6)

$$\varphi_{1,2}(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) & \text{for } z \in \Omega_1 \\ \varphi(z) & \text{for } z \in \Omega_2 - \Omega_1 \\ \varphi_2(z) & \text{for } z \in V - \Omega_2 \end{cases}$$

$$\varphi_{2,3}(z) = \begin{cases} \varphi_2(z) & \text{for } z \in \Omega_2 \\ \varphi(z) & \text{for } z \in \Omega_3 - \Omega_2 \\ \varphi_3(z) & \text{for } z \in V - \Omega_3 \end{cases}$$



（図 6）

ここで φ 及び各 φ_i は $\bar\partial$-closed であるから、$\varphi_{1,2}$, $\varphi_{2,3}$ も V で $\bar\partial$-closed になる。 V は正則領域であるから、これらは $\bar\partial$-exact form になる。 即ち V 上の C^∞, $(0, n-2)$ form $\psi_{1,2}$, $\psi_{2,3}$ が存在して、

$$\varphi_{1,2}(z) = \bar\partial\psi_{1,2}(z), \qquad \varphi_{2,3}(z) = \bar\partial\psi_{2,3}(z)$$

となる。 $\partial\Omega_2$ の近傍では $\varphi_{1,2} \equiv \varphi \equiv \varphi_{2,3}$ であるから、ここでは $\bar\partial(\psi_{1,2} - \psi_{2,3}) \equiv 0$ となる。

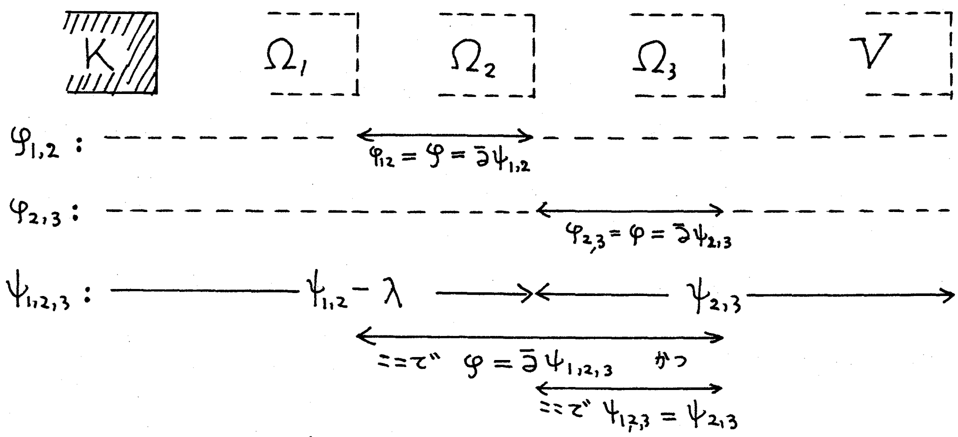
$\boxed{n = 2 \text{ の場合}}$

$\psi_{1,2} - \psi_{2,3}$ は $\partial\Omega_2$ の近傍で正則関数になる。 従って Hartogs の定理より、$\overline{\Omega}_2$ で正則な関数 $\lambda(z)$ が存在して、

$$\psi_{1,2}(z) - \psi_{2,3}(z) = \lambda(z) \quad \text{near } \partial\Omega_2$$

とできる。 さて、領域 $\Omega_3 - \Omega_2$ に注目すれば、そこでは $\varphi = \varphi_{2,3} = \bar\partial\psi_{2,3}$ となっている。今の目的は、φ を $V-K$ 上の $\bar\partial$-exact form で表わすことであるから、この $\psi_{2,3}$ を $V-K$ に接続して、そこで $\varphi = \bar\partial\psi$ となるようにさせよう。 まず、内部への接続を考える。 $\psi_{1,2,3}(z)$ を次の様に定める。（図 7）

$$\psi_{1,2,3}(z) = \begin{cases} \psi_{2,3}(z) & \text{for } z \in V - \Omega_2 \\ \psi_{1,2}(z) - \lambda(z) & \text{for } z \in \Omega_2 \end{cases}$$



（図　7）

$\psi_{1,2,3}(z)$ の決め方より、$\Omega_3 - \Omega_1$ では $\varphi = \bar\partial\psi_{1,2,3}$ が成り立ち、しかも、$\psi_{1,2,3}(z)$ は $\Omega_3 - \Omega_2$ では $\psi_{2,3}(z)$ に一致している。即ち $\psi_{2,3}(z)$ は $\Omega_3 - \Omega_2$ での値を変えることなく、方程式 $\varphi = \bar\partial\psi$ をみたしつつ $\Omega_3 - \Omega_1$ にまで接続が可能になった。この操作を順次くり返していけば、（条件＊）より、$\psi_{2,3}(z)$ は $\Omega_3 - K$ にまで接続される。又逆に V の方への接続も同様である。従って次が得られた。（$n=2$）

(7) $$\operatorname{Ker} \Phi = \{ \bar\partial\psi(z) \mid \psi \in C^\infty(V-K) \}$$

$\boxed{n \geqq 3 \text{ の場合}}$

この場合、Hartogs の定理に代わるものとして、ある正則領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ の近傍で $\bar\partial$-closed になる微分形式を

調べる必要がある。　次の定理がある。

<u>Theorem 3</u>（G. Scheja, A. Friedman, M. Morimoto）

X を $\mathbb{C}^n$ 内の正則領域とし、K を X 内の正則凸な compact set とすれば、次が成り立つ。

$$H^p(X-K, \mathcal{O}) = 0 \qquad p = 1, 2, \cdots, n-2.$$

さて、この定理を Ω_2 の近くで用いれば、$\partial\Omega_2$ の近傍で

$$\bar{\partial}(\psi_{1,2} - \psi_{2,3}) = 0$$

となることより、$\partial\Omega_2$ の近傍である $(0, n-3)$ form α が存在して、そこで　$\psi_{1,2} - \psi_{2,3} = \bar{\partial}\alpha$　とできる。　α は適当に修正して V 全体で定義されているものとしてよい。

このとき、$n=2$ の場合の $\lambda(z)$ をこの $\bar{\partial}\alpha$ におきかえて同様の手続きを行えば、$\Omega_3 - \Omega_2$ での $\varphi = \bar{\partial}\psi$ の解 $\psi_{2,3}$ を $V-K$ にまで接続ができる。　従って次が得られた。（$n \geq 3$）

(8)　$$\mathrm{Ker}\,\Phi = \{ \bar{\partial}\psi(z) \mid \psi \text{ は } V-K \text{ 上の } C^\infty\ (0, n-2) \text{ form} \}$$

これで（II）を終る。

（I），（II）より　代数的に同型定理（3）が成り立つことが

わかったが、 $\mathcal{O}'(K)$, $H^{n-1}(V-K, \mathcal{O})$ は共にFréchet空間であり、Φは連続な線型写像であるから、Open mapping theoremにより、同型定理(3)は位相的にも成り立っていることが、わかる。

<終>