数理解析研究所講究録
300巻 1977年 85-97

等式空間上の微分方程式について

広大 総合科学　江口 正晃

Gをリー群、Hをその閉部分群とし、$X=G/H$（等質空間）を考える。$\mathbb{D}(X)$をX上のG不変な微分作用素のなす環とする。次の問題を考える

<u>問題</u>　$D\in\mathbb{D}(X)$、fはX上の関数または超関数とするとき

1) $Du=f$ は解を持つか。

2) 解を持つ場合に出来るだけ"良い"解を与えよ。

§1. ペーリー・ウィーナー型定理の応用.

我々は非コンパクト型対称リーマン空間$X=G/K$（Gは中心有限な連結半単純リー群、KはGの極大コンパクト部分群）上のペーリー・ウィーナー型定理の応用として上の問題を考えてみよう。

まずユークリッド空間上のフーリエ変換がその上の定数係

数微分作用素Dに対する微分方程式 $Du=f$ の考察に有用であることを示す次の例をあげる

例. $G=X=\mathbb{R}^n$, $H=\{0\}$. $f\in C_c^\infty(X)$ に対し微分方程式 $Du=f$ はフーリエ変換により $P_D(\xi)\tilde{u}(\xi)=\tilde{f}(\xi)$ と変換される。ここで $\tilde{u}$, $\tilde{f}$ はそれぞれ u, f のフーリエ変換、$P_D(\xi)$ は D に対応する ξ の多項式を表わす。この時関数 $\tilde{f}/P_D$ が解についての情報を与えることに注意する

さて我々の対称空間 $X=G/K$ の場合に話を進める。$G=KAN$ をいつもの様にGの岩沢分解とする. Gの任意の元 x は $x=\kappa(x)\exp H(x)n(x)$ ($\kappa(x)\in K$, $\exp H(x)\in A$, $H(x)\in\mathfrak{a}=$ Aのリー環, $n(x)\in N$) と一意的に表わされる。またGのリー環を $\mathfrak{g}$, Kのリー環を $\mathfrak{k}$ とするとき $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン分解とする。Gの任意の元 x は $x=k\exp X$ ($k\in K$, $X\in\mathfrak{p}$) と一意的に表わされる。この時 $\sigma(x)=\|X\|$ ($\|\ \|$ はキリング形式によるXのノルムを表わす) とおく。上の岩沢分解による順序に関する $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の正のルート全体の集合を Φ とおく。$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi}\alpha$ とおく。$\mathfrak{a}$ の双対空間を $\mathfrak{a}^*$ で表わす。AのKにおける正規化部分群, 中心化部分群をそれぞれ M', M とするとき, 有限群 $W=M'/M$ は小

ワイル群と呼ばれる。G上の基本(帯)球関数を φ_λ で表わす($\lambda \in \mathfrak{a}^*$)。即ち

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K e^{(i\lambda-\rho)(H(xk))}\,dk \qquad (x \in G)。$$

ここで dk はK上の $\int_K dk = 1$ となる不変測度である。慣例により φ_0 の代りに Ξ とかく。$\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_C$ 上の展開環 $\mathcal{G}$ はG上の左不変な微分作用素全体のつくる環と同一視される。$g \in \mathcal{G}$ による $f \in C^\infty(G)$ の微分を $f(x;g)$ $(x \in G)$ とかく。また $\mathcal{G}$ はG上の右不変微分作用素全体のつくる環と反同型であることが知られる。g を f に右不変微分作用素と見て作用させることを $f(g;x)$ で表わす。

$$\mathcal{C}(X) = \left\{ \begin{array}{ll} f \in C^\infty(G)\ ; & (i)\ \ f(xk) = f(x) \quad (\forall x \in G,\ \forall k \in K) \\ & (ii)\ \ \text{任意の } g_1, g_2 \in \mathcal{G},\ r \geq 0 \text{ に対し} \\ & \nu_{g_1,g_2:r}(f) = \sup\limits_{x \in G} \left| f(g_1;x;g_2) \right| \Xi(x)^{-1}(1+\sigma(x))^r < \infty \end{array} \right\}$$

とおく。$\mathcal{C}(X)$ はセミノルム系 $\nu_{g_1,g_2:r}$ により定まる位相に関してフレシェ空間となる。$f \in \mathcal{C}(X)$ に対してそのフーリエ変換 $\tilde{f}$ が次で与えられる。

$$\tilde{f}(kM:\lambda) = \int_{AN} f(kan)\, e^{(-i\lambda+\rho)(\log a)}\,da\,dn$$

$(kM \in K/M,\ \lambda \in \mathfrak{a}^*)$. ここで A および N 上の測度 da, dn

は適当に正規化されているものとする。 次に $K/M \times \mathfrak{a}^*$ 上の関数空間 $\mathcal{C}_W(K/M \times \mathfrak{a}^*)$ は次の条件(1),(2)を満す $F \in C^\infty(K/M \times \mathfrak{a}^*)$ 全体からなるフレシェ空間とする。 (1) すべての $r \geq 0$, $\mathfrak{a}^*$ 上の定数係数微分作用素 u, K/M 上の K 不変微分作用素 v に対して

$$\mu_{u,v,r}(F) = \sup_{(kM,\lambda) \in K/M \times \mathfrak{a}^*} |F(kM; v : \lambda; u)| (1+|\lambda|)^r < \infty.$$

(2) $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $s \in W$ にたいして、次のいわゆるワイル群に関する関数等式が成り立つ:

$$\int_K F(\kappa(xk) : s\lambda) e^{(is\lambda-\rho)(H(xk))} dk = \int_K F(\kappa(xk) : \lambda) e^{(i\lambda-\rho)(H(xk))} dk.$$

今 $F \in \mathcal{C}(K/M \times \mathfrak{a}^*)$ に対して K/M 上のフーリエ係数を考える。 $\hat{K}^0$ を K の既約ユニタリ表現で M に関してクラス 1 であるものの同値類の代表元全体の集合とする. $\delta \in \hat{K}^0$ に対して

$$F^*(\delta : \lambda) = \int_K F(k^{-1}M : \lambda) \delta(k) dk$$

とおく。 $E(\delta : \lambda : x)$ を $(\delta, 1)$ 型のアイゼンスタイン積分、即ち

$$E(\delta : \lambda : x) = \int_K \delta(\kappa(xk)) e^{(i\lambda-\rho)(H(xk))} dk$$

とするとき、上の条件(2)は次の条件と同値である。

$$E(\delta : s\lambda : x)\, F^*(\delta : s\lambda) = E(\delta : \lambda : x)\, F^*(\delta : \lambda).$$

次の定理は江ロ－岡本 [4] による。

<u>定理</u>　フーリエ変換は $\mathcal{S}(X)$ から $\mathcal{S}_W(K/M \times \mathfrak{a}^*)$ の上への位相同型である。

$\mathbb{D}(X)$ を X 上の G 不変微分作用素全体のつくる環とする。$I(\mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}$ 上の対称環の元で W 不変なもの全体で張られる部分環とする。良く知られている様に $\mathbb{D}(X) \to I(\mathfrak{a})$ なる同型対応 Γ が存在する。この時 $f \in \mathcal{S}(X)$ に対して

$$\widetilde{Df} = \Gamma(D)(i\lambda)\tilde{f}$$

が成り立つ。

前定理を用いて次の定理が得られる。

<u>定理</u>　$D \in \mathbb{D}(X)$, $D \neq 0$ とする。

(i)　D は $\mathcal{E}(X)$ 上の 1 対 1 線形変換である。

(ii)　$f \in \mathcal{S}(X)$ に対してもし $\tilde{f}/\Gamma(D)(i\cdot)$ が急減少 (cf. $\mathcal{S}_W$ の定義の条件(1)) であれば $u = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}/\Gamma(D)(i\cdot))$ が微分

方程式： $Du=f$ の $\mathcal{E}(X)$ における唯一つの解である。ここで $\mathcal{F}^{-1}$ はフーリ変換 $\mathcal{F}$ の逆を表わす。

(iii) 特にDがもし準楕円型でかつ $\Gamma(D)(i\lambda)\neq 0$ $(\lambda\in\mathfrak{a}^*)$ を満すならば、Dは $\mathcal{E}(X)$ 上の自己同型である。

例. Δ をキリング形式付随するX上のラプラス・ベルトラミ作用素とする。μ を複素数として $(\Delta-\mu)u=f$ は一般化されたポアッソンの微分方程式といわれる。$^\forall f\in\mathcal{E}(X)$ にたいしてもし μ が $\mu>-|\rho|^2$ を満せば（μ が実で）

$$u=\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}/-|\lambda|^2-|\rho|^2-\mu)$$

が $\mathcal{E}(X)$ における唯一つの解である。$X=G/K$ のランクが1である場合にはヘルガソン［5］の第X章に幾何学的方法で解が書かれている。

注意(1) コンパクト群の等質空間の場合にも同様な方法で微分方程式を論じることが出来る。特にフーリエ変換のペーリー・ウィーナー型定理を用いて解を与えることが出来る。一般化されたポアッソンの微分方程式についての結果が得られ、可解性の条件がヘルガソン［5］の与えた条件の一般化になっていることがわかる。

(2). $\mathfrak{g}$の中心を$\mathfrak{z}$とおく。　G上のシュワルツ空間$\mathcal{C}(G)$のフーリエ変換による像の特徴付けの結果（アーサー［1］，シエロ［2］）を用いることにより、微分方程式 $Du=f$ $(D\in\mathfrak{z})$に対して同様の議論が出来る。

(3)　Gまたはその等質空間上の種々のペーリー・ウィーナー型定理は、微分方程式 $Du=f$ の“良い性質”を持った解を得る上で有効である。

§2. 超関数の微分方程式についてのヘルガソンの結果

$X=G/K$上のコンパクトな台をもつC^∞関数全体のつくる空間を$\mathcal{D}(X)$，超関数の空間を$\mathcal{D}(X)'$で表わす。　この§では$D\in\mathbb{D}(X)$に関する超関数の微分方程式　$DT=S$ $(S\in\mathcal{D}')$の可解性についてのヘルガソン［6］の結果の紹介と、残された問題点について述べる。

δをV_δ上のKの既約ユニタリ表現，$d(\delta)$をV_δの次元，χ_δをδの指標、$\check{\delta}$をδの反傾表現とする。

$$V_\delta^M=\{v\in V_\delta : \delta(m)v=v,\ {}^\forall m\in M\}$$

とおく。　X上のコンパクトな台をもつ$\mathrm{Hom}(V_\delta, V_\delta^M)$に値をもつ$C^\infty$関数全体のつくる空間を$\mathcal{D}(X:\mathrm{Hom}(V_\delta, V_\delta^M))$で表わす。

$$\mathcal{D}^\delta(X)=\left\{F\in\mathcal{D}(X:\mathrm{Hom}(V_\delta,V_\delta^M)) : \begin{array}{l}F(kx)=\delta(k)F(x)\\ k\in K,\ x\in G/K\end{array}\right\}$$

とおく。 左からのKの作用でδに従って動く$f\in\mathcal{D}(X)$全体で張られる部分空間を$\mathcal{D}_\delta(X)$で表わす。 この時$\mathcal{D}(X)$および$\mathcal{D}(X,\ \mathrm{Hom}(V_\delta,\ V_\delta^M))$はフレシェ空間の狭義帰納的極限の位相でLF空間となる。 $\mathcal{D}^\delta(X)$, $\mathcal{D}_\delta(X)$にはそれぞれ$\mathcal{D}(X,\ \mathrm{Hom}(V_\delta,\ V_\delta^M))$, $\mathcal{D}(X)$から引き起される位相を与える。

$f\in\mathcal{D}(X)$に対して

$$f^\delta(x) = d(\delta)\int_K f(k^{-1}x)\,\delta(k)\,dk$$

とおく。

<u>命題</u> (1) 写像Q: $F(x)\longrightarrow \mathrm{Tr}(F(x))$は$\mathcal{D}^\delta(X)$から$\mathcal{D}_{\check\delta}(X)$の上への位相同型を与える。 逆写像は$f\to f^\delta$で与えられる。 (2). 写像

$$p:\ f\in\mathcal{D}(X)\longrightarrow d(\delta)\chi_\delta * f\in\mathcal{D}_{\check\delta}(X)$$
$$q:\ f\in\mathcal{D}(X)\longrightarrow f^\delta\in\mathcal{D}^\delta(X)$$

は共に連続，開全射である。 また$\mathcal{D}_{\check\delta}(X)$は$\mathcal{D}(X)$の閉部分空間である。

<u>補題 1</u>. $\mathcal{D}^\delta(X)$, $\mathcal{D}_{\check\delta}(X)$はLF空間である。

この補題は上の命題と次の補題2より得られる。

<u>補題2</u>. $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ は夫々フレシエ空間であるとする。$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ をそれらの狭義帰納的極限とする。M を E の閉部分空間とし、$M_i = E_i \cap M$ とおく。もし $E \to M$ なる写像 p が連続かつ開全射で、各 i に対して $p|E_i : E_i \to M_i$ が全射であるならば $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ は狭義帰納的極限である。

さて $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $x \in G$ に対して

$$\Phi_{\lambda,\delta}(x) = \int_K e^{-(i\lambda+\rho)(H(x^{-1}k))} \delta(k)\, dk$$

とおく。$f \in \mathcal{D}_{\check{\delta}}$ なる $f = d(\delta)\chi_\delta * f$ に留意すると

$$\tilde{f}(kM : \lambda) = d(\delta)\int_X f(x)\left(\int_K e^{(i\lambda-\rho)(H(x^{-1}v))}\chi_\delta(kv^{-1})\, dv\right)dx$$

である。そこで

$$\tilde{f}(\lambda) = d(\delta)\int_X f(x)\,\Phi_{\bar{\lambda},\delta}(x)^*\, dx$$

と定義する。ここで $\bar{\lambda}$ は $\bar{\lambda}(H) = \overline{\lambda(H)}$ $(H \in \mathfrak{a})$ で定義され、$*$ は V_δ 上の共役を意味する.

値を $\mathrm{Hom}(V_\delta, V_\delta^M)$ にもつ $\mathfrak{a}_c^*$ 上の指数型解析関数全体のつくる空間を $\mathcal{H}(\mathfrak{a}^*, \mathrm{Hom}(V_\delta, V_\delta^M))$ で表わす。この空間にはフーリエ変換 $\mathcal{D}(A, \mathrm{Hom}(V_\delta, V_\delta^M)) \to \mathcal{H}(\mathfrak{a}^*, \mathrm{Hom}(V_\delta, V_\delta^M))$ が同相になる様な位相が与えられていて. ある与えられた O

でないλの多項式 $P(\lambda)$ に対して

$$P : \mathcal{H}(\mathfrak{a}^*, \mathrm{Hom}(V_\delta, V_\delta^M)) \to P \cdot \mathcal{H}(\mathfrak{a}^*, \mathrm{Hom}(V_\delta, V_\delta^M))$$

が同相になる（[8]）.

$Q^\delta(\lambda)$ をコスタント [7] の行列とする。$\mathcal{H}(\mathfrak{a}^*, \mathrm{Hom}(V_\delta, V_\delta^M))$ の部分空間 $\mathcal{H}^\delta(\mathfrak{a}^*)$ を次で定義する。

$$\mathcal{H}^\delta(\mathfrak{a}^*) = \{ F \in \mathcal{H}(\mathfrak{a}^*, \mathrm{Hom}(V_\delta, V_\delta^M)) : (Q^\delta)^{-1} F \text{ が } W\text{-不変} \}.$$

この時次の定理が成り立つ.

<u>定理</u>. 変換 $f \to \tilde{f} : \mathcal{D}_{\check{\delta}}(X) \to \mathcal{H}^\delta(\mathfrak{a}^*)$ は同相写像である。

この定理を微分方程式に応用する。$T \in \mathcal{D}'(X)$ に対して

$$\chi_\delta * T = \int_K \chi_\delta(k) T^{\tau(k)} dk, \qquad T^{\tau(k)}(f) = \int_X f(kx) dT(x)$$

$(f \in \mathcal{D}(X))$ とおく。この時 $\chi_{\check{\delta}} * T(f) = T(\chi_\delta * f)$ が成り立つ。従って今 K の作用で δ に従って動く超関数のなす空間を $\mathcal{D}_\delta'(X)$ で表わすときこの対応で $\mathcal{D}_\delta'(X)$ は $\mathcal{D}_{\check{\delta}}(X)$ の双対空間と同一視される。$D \in \mathbb{D}(X)$ に対して D^* をその共役とする。もし $S \in \mathcal{D}_\delta'(X)$ ならば線形形式 $D^* f \longrightarrow S(f)$

は連続である。　ハーン・バナッハの定理により $\mathcal{D}_{\check{\delta}}(X)$ の元 T が存在して(従って T を $\mathcal{D}'_{\delta}(X)$ の元と見て) $T(D^*f)=S(f)$ が $f\in\mathcal{D}_{\check{\delta}}(X)$ に対して成り立つ。　従って $\mathcal{D}_{\check{\delta}}(X)$ 上で

$$DT=S$$

が成り立つ。　$\mathcal{D}'_0(X)=\bigoplus_{\delta\in\hat{K}^0}\mathcal{D}'_{\delta}(X)$ とおくと次の定理を得る。

<u>定理</u>　$D\in\mathbb{D}(X)$, $D\neq 0$ とする。　この時

$$D\mathcal{D}'_0(X)=\mathcal{D}'_0(X)$$

が成り立つ。

問題は云うまでもなく上の定理を $\mathcal{D}'(X)$ で証明することである。　一つの方法を提案しよう。　その為定理の証明のキーポイントを見る。

$\mathcal{J}^{\delta}(\mathfrak{a}^*)=\{F\in\mathcal{H}(\mathfrak{a}^*, \mathrm{Hom}(V_\delta, V_\delta^M)):\ F(s\lambda)=F(\lambda),\ s\in W,\ \lambda\in\mathfrak{a}_c^*\}$

とおく。

<u>補題</u> 3　写像 $\psi\longrightarrow Q^{\delta}\cdot\psi$ は $\mathcal{J}^{\delta}(\mathfrak{a}^*)$ から $\mathcal{H}^{\delta}(\mathfrak{a}^*)$ の上への位相同型である。

p : $\mathcal{H}(\mathfrak{a}^*, \mathrm{Hom}(V_\delta, V_\delta^M))\ni F\longrightarrow\sum_{s\in W}F(s\lambda)\in\mathcal{J}^{\delta}(\mathfrak{a}^*)$ を考

え、先の LF 空間に関する補題2を使っている。我々の場合、射影 $p : \mathcal{H}(\hat{K}^{\circ}\times\mathfrak{a}^{*}) \longrightarrow \mathcal{H}_{W}(\hat{K}^{\circ}\times\mathfrak{a}^{*})$ で補題2の条件を満すものが作れゝば良い。まず考えられるのが各 δ に対し作用素 Q^{δ} を使う $p=Q$ なる写像であるが $\|Q^{\delta}(\lambda)\|$ が δ および λ に関して緩増加でない為にうまく行かない。次の図を考える。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(X) \arrow[r, "e^{\rho}\circ\Lambda"] \arrow[rr, bend left, "\mathfrak{F}"] & \mathcal{D}_{W}(K/M\times A) \arrow[r, "F.T"] & \mathcal{H}_{W}(K/W\times\mathfrak{a}^{*}) \arrow[r, "*"] & \mathcal{H}_{W}(\hat{K}^{\circ}\times\mathfrak{a}^{*}) \arrow[d, hook] \\
 & & & \mathcal{H}(\hat{K}^{\circ}\times\mathfrak{a}^{*}) \arrow[lllu, bend left, "\Psi"]
\end{tikzcd}$$

Λ は X 上のラドン変換、$F.T$ は A 上フーリエ変換、Ψ は次で定義される： $F\in\mathcal{H}(\hat{K}^{\circ}\times\mathfrak{a}^{*})$ とするとき

$$(\Psi F)(x) = \sum_{\delta\in\hat{K}^{\circ}} d(\delta)\,\mathrm{Tr}\int_{\mathfrak{a}^{*}} [W]^{-2}\sum_{s\in W} E(\delta : s\lambda : x)F(\delta : s\lambda)\,|c(\lambda)|^{-2}d\lambda.$$

この時 (1) 写像 $e^{\rho}\circ\Lambda$ は開かつ連続 (2) $p = *\circ\mathfrak{F}\circ\Psi$ は開かつ全射はすぐに分る。 p の連続性は写像 Ψ の連続性がわかれば良い。 次に $\mathcal{H}_{W}(\hat{K}^{\circ}\times\mathfrak{a}^{*})$ が LF 空間であることを示せば、最後に $*\circ\mathfrak{F} : \mathcal{D}(X)\to\mathcal{H}_{W}(\hat{K}^{\circ}\times\mathfrak{a}^{*})$ が位相同型であることが分る。 Ψ の連続性の証明では [3] で与えた球関数の漸近展開が役に立つかも知れない。

文　　献

[1] J. G. Arthur, Harmonic analysis of the Schwartz space on a reductive group I,II, preprints.

[2] M. Eguchi, The Fourier transform of the Schwartz space on a semisimple Lie group, Hiroshima Math. J., 4(1974), 133-209.

[3] M. Eguchi, Asymptotic expansions of Eisenstein integrals and Fourier transform on symmetric spaces, preprint.

[4] M. Eguchi and K. Okamoto, The Fourier transform of the Schwartz space on a symmetric space, preprint.

[5] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, 1962, Academic Press.

[6] S. Helgason, A duality for symmetric space with applications to group representations, II, Advances in Math., 22(1976) 187-219.

[7] B. Kostant, On the existence and irreducibility of certain series of representations, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1969) 627-642.

[8] L. Ehrenpreis, Fourier Analysis in Several Complex Varables, Interscience, 1970.