

Affine symmetric space における境界値問題

東大 教養 大島 利雄

京大 数理研 関口 次郎

§1 Helgason - Okamoto 予想

偏微分方程式の境界値問題で最も基本的な例として, "単位円  $D \equiv \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$  内の調和函数  $u(z)$  は, 単位円周  $B \equiv \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  上の境界値が  $\varphi(e^{i\theta})$  であれば,

$$u(z) = (P\varphi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \varphi(e^{i\theta}) d\theta$$

と Poisson 積分により表示される" という事実がある. また Poisson 変換

$$P: \begin{array}{ccc} \text{"B 上の函数の空間"} & \longrightarrow & \text{"D 上の調和函数全体の空間"} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi & \longrightarrow & P\varphi \end{array}$$

を考えたとき, B 上の函数の空間として hyperfunction 全体をとったときのみ上の Poisson 変換が bijective になる (この事実は hyperfunction の定義から直ちに従う)。逆に任意の調和函数に対し, その B 上の境界値が存在し, それは hyperfunction になる。

これは、表現論的に次のような意味をもっている：

$D$  は等質対称リーマン空間  $SL(2, \mathbb{R}) / SO(2)$  で、 $B$  はその Martin 境界  $SL(2, \mathbb{R}) / \{(*) \in SL(2, \mathbb{R})\}$  である。そして、調和函数というのは、 $D$  の Poincare metric に対する Laplace-Beltrami operator  $\Delta$  の固有値 0 に属する固有函数に他ならない。自然に、 $B, D$  上の hyperfunction 全体の空間  $\mathcal{B}(B), \mathcal{B}(D)$  を

$$\mathcal{B}(B) \simeq \{ \varphi \in \mathcal{B}(SL(2, \mathbb{R})) ; \varphi(g(*) ) = \varphi(g) \}$$

$$\mathcal{B}(D) \simeq \{ f \in \mathcal{B}(SL(2, \mathbb{R})) ; f(gk) = f(g), \forall k \in SO(2) \}$$

とみなしたとき、Poisson 積分は、 $SO(2)$  の正規化された Haar measure  $dk$  により

$$(P\varphi)(g) = \int_{SO(2)} \varphi(gk) dk$$

と表示される。よって、Poisson 変換は Lie 群  $SL(2, \mathbb{R})$  の (無限次元) 表現空間  $\mathcal{B}(B)$  から  $D$  上の調和函数の空間への全単射の intertwining operator であるといふことができる。

$\Delta$  は  $SL(2, \mathbb{R})$  の作用と可換なので、 $\Delta$  の一般の固有値  $\mu$  に属する固有空間  $C^\infty(D, \mu)$  も  $SL(2, \mathbb{R})$  の表現空間となっている。Helgason [2] は、次の Poisson 変換

$$\begin{array}{ccc} P: \mathcal{B}(B, s) & \longrightarrow & C^\infty(D, \chi_s) \equiv \{ f \in C^\infty(D) ; \Delta f = \chi_s f \} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \\ \varphi & \longmapsto & (P\varphi)(g) \equiv \int_{SO(2)} \varphi(gk) dk \end{array}$$

が bijective になることを示した (ただし,  $s \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$ ).

ここで,

$$\begin{cases} \mathcal{B}(B, s) \equiv \{ \varphi \in \mathcal{B}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})); \varphi(g \begin{pmatrix} t_1 & \\ & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \\ & \sqrt{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix} = y^{\frac{1}{2}-s} \varphi(g) \} \\ \Delta \equiv (1-|z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \\ \mu \equiv \chi_s \equiv (s - \frac{1}{2})(s + \frac{1}{2}) \in \mathbb{C} \end{cases}$$

これはさらに次の予想へと発展した.

Helgason - Okamoto 予想 (リーマン対称空間  $X$  上の任意の球関数 (=  $X$  上の不変微分作用素の同時固有函数) は,  $X$  の Martin 境界  $M$  上の hyperfunction の Poisson 積分として表示される”

この予想は [4] により完全に解決されたが, その結果を述べ, さらに Riemannian でない対称空間の場合の定式化をするため, 記号の準備をする.

## §2 Notation

$G$  を中心が有限な連結実半単純リ-群,  $K$  をその極大コンパクト群とし,  $G, K$  のリ-環をそれぞれ  $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$  とおく.

$\mathfrak{p} = \{ X \in \mathfrak{g}; \theta(X) = -X \}$  の極大ア-ベル部分空間の 1 つを  $\mathfrak{a}$  とおき,  $\mathfrak{a}$  の双対空間を  $\mathfrak{a}^*$ ,  $\mathfrak{a}^*$  の複素化を  $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$  とかく.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  に関するル-ト系を  $\Sigma$  とおき,  $\Sigma$  に適当な順序を入れたときの正のル-トの全体を  $\Sigma^+$ , 正の単純ル-トの全体

を  $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  とする. さらに,  $\alpha \in \Sigma$  とするとき

$$\mathfrak{g}^\alpha \equiv \{X \in \mathfrak{g}; [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}\},$$

$$m(\alpha) \equiv \dim \mathfrak{g}^\alpha,$$

$$\mathfrak{n} \equiv \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \bar{\mathfrak{n}} = \theta(\mathfrak{n})$$

$$\Sigma_0^+ \equiv \{\alpha \in \Sigma^+; \frac{\alpha}{2} \notin \Sigma\}$$

とおき, リー環  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{n}$  に対応する  $G$  の連結部分リー群を  $A$ ,  $N$  とする. このとき,  $G = KAN$  は岩沢分解となり,  $P = MAN$  は  $G$  の極小放物型部分群となる.  $\mathfrak{a}$  の  $K$  における中心化群, 正規化群をそれぞれ  $M$ ,  $M^*$  であらわし,  $M$  のリー環を  $\mathfrak{m}$  とおく. 商群  $W = M^*/M$  は Weyl 群となり, 自然に  $\mathfrak{a}$  に作用する.  $\mathfrak{g}$  の Killing form から定義される  $\mathfrak{a}$  の内積  $\langle, \rangle$  によって,  $\mathfrak{a}$  と  $\mathfrak{a}^*$  とが同一視できる. この同一視を用いれば,  $\mathfrak{a}^*$  上にも内積が定義できるので, それも  $\langle, \rangle$  であらわす. 同様に,  $W$  の作用が  $\mathfrak{a}^*$  上にも定義される.

一般に, 実解析的多様体  $X$  上の hyperfunction, Schwartz の超関数,  $C^\infty$ -級関数の全体の空間をそれぞれ,  $\mathcal{B}(X)$ ,  $\mathcal{D}'(X)$ ,  $C^\infty(X)$  であらわす.

### §3 リーマン対称空間の場合

等質空間  $G/K$  は, 非コンパクト型対称リーマン空間となり, 等質空間  $G/P$  は, その Martin 境界とよばれる.  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{a}$  の複素

この universal enveloping algebra を  $U(\mathfrak{g})$ ,  $U(\mathfrak{a})$  とかく.  $U(\mathfrak{g})$ ,  $U(\mathfrak{a})$  は,  $G$ ,  $A$  上の (左)-不変微分作用素の全体  $D(G)$ ,  $D(A)$  と同一視できる. すると,

$$D(G)^K = \{D \in U(\mathfrak{g}); \text{Ad}(k)D = D, \forall k \in K\}$$

とおくことにより,  $G/K$  上の不変微分作用素の全体  $D(G/K)$  は, 自然に

$$(1) \quad D(G/K) \simeq D(G)^K / D(G)K \cap D(G)^K$$

とみなせる. 一方,  $U(\mathfrak{g})$  の元  $D$  に対し,

$$D - D'_\alpha \in \pi U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})K$$

となる  $D'_\alpha \in U(\mathfrak{a})$  がただ一つ定まるので,

$$e^\rho(a) = e^{\rho \log a} \quad (a \in A)$$

という  $A$  上の函数  $e^\rho$  を用いて

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\gamma} : D(G)^K & \longrightarrow & U(\mathfrak{a}) \\ \downarrow D & \longmapsto & D_\alpha \equiv e^\rho \circ D'_\alpha \circ e^{-\rho} \end{array}$$

という写像が定義できるが, これら (1) と (2) は

$$(3) \quad \gamma : D(G/K) \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{a})^W$$

という algebra homomorphism をひきおこす (Chevalley の定理).

ここで,

$$U(\mathfrak{a})^W \equiv \{D \in U(\mathfrak{a}); \text{Ad}(\bar{w})D = D, \forall w \in W\}$$

( $\bar{w}$  は  $w \in W$  の  $M^*$  における代表元の1つ)

である.  $D(G/K)$  は  $l$  (= 歪の元の数 =  $G/K$  の階数) 個

の不定元をもつ  $\mathbb{C}$  上の多項式環と同型になる。

$\sigma_{\mathbb{C}}^*$  の元  $\lambda$  が与えられたとき, それは  $\text{Hom}_{\text{alg}}(U(\mathfrak{g}); \mathbb{C})$  の元  $\tilde{\lambda}$  に唯一に拡張されるので,  $\chi_{\lambda} \in \text{Hom}_{\text{alg}}(D(G/K); \mathbb{C})$  が,  $\chi_{\lambda}(D) = \tilde{\lambda}(\sigma(D))$  ( $D \in D(G/K)$ ) によって定義できる。このとき, 任意の  $\chi \in \text{Hom}_{\text{alg}}(D(G/K); \mathbb{C})$  に対し,  $\chi_{\lambda} = \chi$  となる  $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}^*$  が存在すること, および, 任意の  $w \in W$  に対し,  $\chi_{w\lambda} = \chi_{\lambda}$  となることに注意しておく。

$G$  上の hyperfunction の空間  $\mathcal{B}(G)$  は,

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{B}(G) & \longrightarrow & \mathcal{B}(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (g, f(x)) & \longmapsto & (\tau_g f)(x) \equiv f(g^{-1}x) \end{array}$$

により,  $G$ -加群となるが, 以下, これの  $G$ -部分加群をいくつか定義する。

$\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}^*$  に対し,  $G/P$  上の線形束値関数の空間:

$$\mathcal{B}(G/P; \lambda) \equiv \{ \varphi \in \mathcal{B}(G); \varphi(xman) = e^{(\lambda-\rho) \log a} f(x), \\ \forall x \in G, \forall m \in M, \forall a \in A, \forall n \in N \}$$

これは, 自然に FS-空間 (cf. [6]) の位相が入る。

$\chi \in \text{Hom}_{\text{alg}}(D(G/K), \mathcal{M}(\chi))$  に対し,  $G/K$  上の球関数の空間:

$$C^{\infty}(G/K; \mathcal{M}(\chi)) \equiv \{ f \in C^{\infty}(G/K); \Delta f = \chi(\Delta) f, \forall \Delta \in D(G/K) \}$$

これも自然に, FS-空間  $C^{\infty}(G/K)$  の閉部分空間として,

FS-空間となる。

さて, Poisson 変換を

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} P_\lambda : \mathcal{B}(G/P, \lambda) & \rightarrow & \mathcal{B}(G/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(x) & \mapsto & (P_\lambda \varphi)(xK) \equiv \int_K \varphi(xk) dk \end{array}$$

により定義する ( $dk$  は  $K$  上の正規化された Haar 測度).  
 これは,  $H(g) = \log a$  ( $g \in KaN$ ) により定義される  
 $G$  上の函数  $H(g)$  を用いて,

$$(5) \quad (P_\lambda \varphi)(xK) = \int_K \varphi(k) e^{-(\lambda + \rho)H(x^{-1}k)} dk$$

と表わすこともできる.

定理. [4]. Poisson 変換 (4) は, FS - 空間の間の連続  
 な  $G$ -準同型写像

(6)  $P_\lambda : \mathcal{B}(G/P; \lambda) \rightarrow C^\infty(G/K; m(\chi_\lambda))$   
 をひきおこす. (6) が, 上への位相同型となるための必要十  
 分条件は,

$$(7) \quad e_\lambda \equiv \left\{ \prod_{\alpha \in \Sigma_0^+} \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m(\alpha)}{2} + 1 + \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m(\alpha)}{2} + m(2\alpha) + \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\right)\right) \right\}^{-1} \neq 0$$

で与えられる.

注意 特に,

(8)  $-2\langle \lambda, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle \notin \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\forall \alpha \in \Sigma^+$   
 ならば, (7) が成立するので, (6) は位相同型となる.

任意の  $\chi \in \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathbb{D}(G/K); \mathbb{C})$  に対し, (8) を満たす  $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}^*$  で  $\chi = \chi_{\lambda}$  となるものの存在が容易にわかるので, Helgason-Okamoto 予想は, この定理から従う.

$e_{\lambda} = 0$  のときは,  $P_{\lambda}$  は単射でも全射でもない.  $P_{\lambda}$  の核と像については [4] を見よ.

$C^{\infty}(G/K; m(\chi_{\lambda}))$  が既約となるための必要十分条件は,  $e_{\lambda} \cdot e_{-\lambda} \neq 0$  となることである [3].

次に,  $\mathcal{B}(G/P; \lambda)$  の部分空間の場合を述べる.

$$\mathcal{D}'(G/P; \lambda) \equiv \mathcal{B}(G/P; \lambda) \cap \mathcal{D}'(G)$$

とおくと, これは自然に DFS - 空間 (cf. [6]) となる.

さらに,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(G) \equiv \{ & f \in C^{\infty}(G); \forall D \in \mathbb{D}(G), \exists c, \ell > 0 \\ & \text{s.t. } |(Df)(ka k')| \leq c e^{\ell \langle \log a, \log a \rangle^{1/2}} \\ & \text{for } \forall k, k' \in K, a \in A \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}^*(G/K; m(\chi)) \equiv C^{\infty}(G/K; m(\chi)) \cap \mathcal{E}^*(G)$$

とおくと,  $\mathcal{E}^*(G/K; m(\chi))$  は, DFS - 空間  $\mathcal{E}^*(G)$  の閉部分空間として DFS - 空間になる.

このとき, 前定理は,  $\mathcal{B}(G/P; \lambda)$ ,  $C^{\infty}(G/K; m(\chi_{\lambda}))$ , FS - 空間を, それぞれ  $\mathcal{D}'(G/P; \lambda)$ ,  $\mathcal{E}^*(G/K; m(\chi_{\lambda}))$ , DFS - 空間 に置き換えて, そのまま成立する. これは,



前定理を使うことにより、容易に証明できる。

Lewis [7] は、 $P_\lambda(\mathcal{D}'(G/P, \lambda)) \subset \mathcal{E}^*(G/K; \mathcal{M}(X_\lambda))$  となること、および、 $G/K$  の階数が 1 の場合に、

$P_\lambda(\mathcal{D}'(G/P, \lambda)) = \mathcal{E}^*(G/K; \mathcal{M}(X_\lambda))$  となる為の十分条件を求めている。

#### §4 一般の対称空間の場合

Riemannian とは限らない一般の対称空間 (= affine symmetric space) は infinitesimal には Berger [1] によって分類されている。ここでは、そのうち最も扱い易い次の場合に限ろう。すなわち、 $G/K'$  という等質空間であって、 $K'$  のリ-環の複素化が  $K$  の複素化と一致するような場合である。例えば、 $SL(n, \mathbb{R})/SO(p, n-p)$ ,  $Sp(n, \mathbb{R})/U(p, n-p)$ ,  $Sp(n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R})$ , ...

定義 1.  $\varepsilon: \mathfrak{h} \rightarrow \{-1, 1\}$  という任意の写像を

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\alpha_1)^{m_1} \cdots \varepsilon(\alpha_\ell)^{m_\ell} \quad \text{for } \alpha = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \alpha_i \in \bar{\Sigma}$$

により、 $\varepsilon: \bar{\Sigma} \rightarrow \{-1, 1\}$  という写像に拡張し、それを "ル-ットの符号" と呼ぶ。ル-ットの符号  $\varepsilon$  に対し、 $\mathfrak{g}$  の involutive automorphism  $\theta_\varepsilon$  が、

$$\begin{cases} \text{(i)} & \theta_\varepsilon(X) = \varepsilon(\alpha) \theta(X), & X \in \mathfrak{g}^\alpha \quad (\alpha \in \bar{\Sigma}) \\ \text{(ii)} & \theta_\varepsilon(X) = \theta(X), & X \in \mathfrak{m} + \mathfrak{a} \end{cases}$$

によって定義できる.

$k_\varepsilon \equiv \{X \in \mathfrak{g}; \theta_\varepsilon(X) = X\}$  とおき,  $K_\varepsilon^0$  を  $k_\varepsilon$  に対応する  $G$  の連結部分リ-群とし,  $K_\varepsilon \equiv MK_\varepsilon^0$  とおく.

(このとき, " $K_\varepsilon$  が compact  $\Leftrightarrow \varepsilon(\alpha) = 1$  ( $\forall \alpha \in \bar{\Sigma}$ )")

さらに,  $M_\varepsilon^* \equiv M^* \cap K_\varepsilon$ ,  $W_\varepsilon \equiv M_\varepsilon^* \cap M$  とおき,  $w_1 = e$ ,  $w_2, \dots, w_r$  を  $W_\varepsilon \setminus W$  の代表系とする ( $r = [W : W_\varepsilon]$ ).

補題 2. i)  $\mathfrak{g} = k_\varepsilon + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$  (direct sum)

ii)  $G \supset \bigcup_{i=1}^r K_\varepsilon \bar{w}_i A N$  (open dense, unique, disjoint)

補題 3.  $D(G/K_\varepsilon)$  を, 対称等質空間  $G/K_\varepsilon$  上の不変微分作用素全体のなす環とすると, §3 の (1), (2), (3) が,  $K, k$  を  $K_\varepsilon, k_\varepsilon$  に代えてそのまま成立し,  $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}^*$  に対して  $\chi_\lambda \in \text{Hom}_{\text{alg}}(D(G/K_\varepsilon); \mathbb{C})$  が定義される.

$\chi \in \text{Hom}_{\text{alg}}(D(G/K_\varepsilon); \mathbb{C})$  に対して

$$\mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathfrak{m}(\chi)) \equiv \{f \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon); \Delta f = \chi(\Delta) f, \forall \Delta \in D(G/K_\varepsilon)\}$$

という  $G$ -加群を定義し, さらに  $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}^*$  に対して,  $G$  上の函数  $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$  ( $g \in G$ ) を

$$e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))} = \begin{cases} e^{\lambda \log a} & \text{if } g \in K_\varepsilon \bar{w}_i a N \quad (a \in A) \\ 0 & \text{if } g \notin K_\varepsilon \bar{w}_i A N \end{cases}$$

によって定義する.

補題 4.  $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$  は,  $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}^*$  を meromorphic parameter とする  $G$  上の超函数である. しかも,

$$(9) \quad -2\langle \lambda, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle \notin \mathbb{Z}, \quad \forall \alpha \in \bar{\Sigma}$$

を満たす  $\lambda$  は, その pole にはならない.

このとき, 部分 Poisson 変換を

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} P_{\lambda, \varepsilon}^i : \mathcal{B}(G/P; \lambda) & \rightarrow & \mathcal{B}(G/K_\varepsilon) \\ \downarrow \varphi & \longmapsto & \downarrow \\ \varphi & \longmapsto & (P_{\lambda, \varepsilon}^i \varphi)(gK_\varepsilon) \equiv \int_K \varphi(k) e^{-(\lambda + \rho)H_\varepsilon^i(g^{-1}k)} dk \end{array}$$

によって定義する.

定理 [11].  $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^*$  が (9) を満たせば, (10) によって定義される次の Poisson 変換が, 上への  $G$ -同型写像になる.

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} P_{\lambda, \varepsilon} : \bigoplus^r \mathcal{B}(G/P; \lambda) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi_\lambda)) \\ \downarrow (\varphi_1, \dots, \varphi_r) & \longmapsto & \downarrow \sum_{i=1}^r P_{\lambda, \varepsilon}^i \varphi_i \end{array}$$

$\varepsilon$  が trivial な符号のとき (i.e.  $\varepsilon(\alpha) = 1, \forall \alpha \in \bar{\Sigma}$ ) は, §3 に対応するが, 条件 (9) は条件 (8) よりも強い.

次に,  $\mathcal{D}'(G/P, \lambda)$  の場合を考えよう.

$$\mathcal{E}_*(G/K_\varepsilon) \equiv \{f \in C^\infty(G); f(gk') = f(g) \quad (\forall g \in G, \forall k' \in K_\varepsilon)\}$$

かつ,  $\forall D \in \mathcal{D}(G), \forall l > 0, \exists C_{l,D} > 0$  s.t.

$$|(Df)(ka)| \leq C_{l,D} e^{-l \langle \log a, \log a \rangle^{1/2}} \quad (\forall k \in K, \forall a \in A)$$

とおくと,  $\mathcal{E}_*(G/K_\varepsilon)$  は FS-空間となる. その双対空間を  $\mathcal{D}'^*(G/K_\varepsilon)$  とあらわすと DFS-空間となるが, その閉部分空間として,

$\mathcal{D}'^*(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi)) \equiv \mathcal{D}'^*(G/K_\varepsilon) \cap \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi))$   
 も DFS - 空間となる。このとき,  $\lambda \in \mathcal{O}_\mathbb{C}^*$  が (9) を満たす  
 ならば, Poisson変換(11)は, DFS - 空間の間の topological  
 onto  $G$ -isomorphism

$$(12) \quad P_{\lambda, \varepsilon} : \bigoplus^r \mathcal{D}'(G/P; \lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'^*(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi_\lambda))$$

をひきおこす。この結果も, 前頁の定理の系として得られる。

### § 5 補足

§ 3, § 4 の定理の証明の本質的な部分は次のとおりである:  
 対称空間を,  $G$  が解析的に作用するあるコンパクト多  
 様体の中へ open に実現し, Martin 境界が実際の "境界"  
 として現われてくるようにすること (cf. [9]). そして, 問  
 題を "確定特異点型境界値問題" として捕えて, Poisson変換  
 の逆写像を構成すること (cf. [5]) である。

§ 3, § 4 の定理は, 任意の球函数と Martin 境界上の函数  
 との対応を与えているので, 種々の特殊な球函数を扱うのに  
 その結果が応用できる。特殊球函数として, 左からも群  $G$  の  
 ある部分群で不変, あるいは相対不変な函数が考えられる。

たとえば, その群として, やはり  $K_\varepsilon$  型の群をもってきた  
 場合, その様な函数の次元, 積分表示, 函数等式などがわか

る [12].  $G = SL(n, \mathbb{R})$  ならば,  $SO(p, n-p) \backslash SL(n, \mathbb{R}) / SO(q, n-q)$

上の函数で,  $U(\mathcal{A}(n, \mathbb{R}))$  の center の 同時固有函数である.

$G$  の discrete subgroup  $\Gamma$  をもってきたとき,  $G/K_{\mathbb{E}}$  上の Eisenstein series およびその函数等式が得られる (cf. [12], [13]). これは,  $G/K$  上の実解析的 Eisenstein series に対応するものである. 一方, holomorphic modular form として, たとえば  $Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$  上には Siegel modular form があるが,  $Sp(n, \mathbb{R})/U(p, n-p)$  上にもそれに対応するものがある (正則領域上ではないから正則函数としては実現できないが), それから新しい Dirichlet series (函数等式をもつ) が得られる. (cf. [10], [14]).

#### References

- [1] M. Berger: Les espace symétriques non compacts, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 74(1957), 85-177.
- [2] S. Helgason: A duality for symmetric space with applications to group representations, Advances in Math., 5 (1970), 1-154.
- [3] ————— : ————— II, ibid, 22(1976), 187-219.
- [4] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka: Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, to appear.
- [5] M. Kashiwara and T. Oshima: Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value

problems, to appear in Ann. of Math..

- [6] H. Komatsu: Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces, J. of Math. Soc. Japan, 19 (1967), 366-383.
- [7] J. Lewis: Eigenfunctions on symmetric spaces with distribution-valued boundary forms, preprint.
- [8] K. Minemura and T. Oshima: 確定特異点型境界値問題と表現論, '数学' に掲載予定.
- [9] T. Oshima: A realization of Riemannian symmetric spaces, to appear.
- [10] ————: 対称空間の種々の境界に対する境界値問題, 数理解析研究所講究録, 281 (1976), 211-226.
- [11] T. Oshima and J. Sekiguchi: Boundary value problem on symmetric homogeneous spaces, to appear in Proc. Japan Acad..
- [12] ————: 対称空間上の種々の特殊固有函数について, '77.4 数理研での「超局所解析」研究集会の講究録に掲載予定.
- [13] F. Sato: 二次形式のゼータ函数と特殊函数, '77.4月 数理研での「超局所解析」研究集会の講究録に掲載予定.
- [14] T. Suzuki: 変数係数の二次形式のゼータ函数について, '77.4月 数理研での「超局所解析」研究集会の講究録に掲載予定.