

特殊な半単純リー群の Plancherel 公式

職業訓練大 佐野 茂

§1 序

半単純リー群に対する Plancherel 公式を決定するという問題について考えてみる。まず一般の局所コンパクト群に対する次の定理が根拠になっている。

G を局所コンパクト、ユニモジュラーで可算無限群をみたすホストリミネールな Type I の群としよう。 \hat{G} を G のユニタリ双対、すなわち、 G の既約ユニタリ表現の同値類から成る集合とする。このとき、

定理 A. G 上に与えられた Haar measure dg に対して、 \hat{G} 上の positive measure $d\mu(\pi)$ で

$$(1) \quad \int_G |f(g)|^2 dg = \int_{\hat{G}} \text{tr}(\pi(f)\pi(f)^*) d\mu(\pi) \quad \forall f \in L^1(G) \cap L^2(G)$$

をみたすものが唯一存在する。

つぎに, G を acceptable な半単純リ-群とする. 離散系列の表現を考えるので中心有限としよう. \mathfrak{g} を G に対応するリ-環, $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n$ を G の内部自己同型で共役とならなりの \mathfrak{g} の極大な Cartan 部分環の族とし, H_1, \dots, H_n をそれぞれ対応する G の Cartan 部分群としよう. H_j° を H_j の中心, $\bar{G}_j = G/H_j^\circ$, $d_j R$ を H_j 上の Haar measure, $d_j \bar{g}$ を \bar{G}_j 上の left invariant measure とすると, 適当な正数 d_j ($1 \leq j \leq n$) が存在して

$$(2) \int_G |f(g)|^2 dg = \sum_{1 \leq j \leq n} d_j \int_{H_j} \left\{ \int_{\bar{G}_j} |f(gRg^{-1})|^2 d_j \bar{g} \right\} |\Delta_j^i(R)|^2 d_j R,$$

但し, $\bar{g} = gH_j^\circ \in \bar{G}_j$, $\Delta_j^i(R) = \prod_{\alpha > 0} (1 - \tilde{r}_\alpha(R))$ (α は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_j)$ のルート, $\tilde{r} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$). さらに, $\tilde{H}_j = H_j \times \bar{G}_j$, $d_{\tilde{H}_j}(R, \bar{g}) = d_j |\Delta_j^i(R)|^2 d_j \bar{g} d_j R$ とおくと,

$$(2) = \sum_{1 \leq j \leq n} \int_{\tilde{H}_j} |f(gRg^{-1})|^2 d_{\tilde{H}_j}(R, \bar{g}).$$

一方, \hat{H}_j を Cartan 部分群 H_j に対応する表現主系列 (2-パート Cartan 部分群に対しては離散系列を考え, 一般の主系列については Harish-Chandra (7) を参照, 具体的構成については R. Lipsman (4) を参照, 大体 cuspidal parabolic 部分群の Langlands 分解に対応して連続系列と離散系列とを組み合わせただけ, 正確な定式化を (2 global 指標式を得るのは問題となる) G を Plancherel

公式に出てくる表現とすると,

$$(3) \int_G \text{tr}(\pi(\phi) \pi(\phi)^*) d\mu(\pi) = \sum_j \int_{\hat{H}_j} \text{tr}(\pi(\phi) \pi(\phi)^*) d\mu_j(\pi).$$

可換群に対する Pontryagin の双対性, コンパクト群に対する淡中の双対性, さらに一般の局所コネクト群に対しては 辰馬 の双対性が知られている. ($G \simeq \hat{G}$ 位相群として同型) ここでは内部構造の双対性に着目してみよう.

1°) G' を G の正則な元からなる集合, $H_j = G' \cap H_j$ とすると,

$$G' = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{\alpha \in G} \alpha H_j \alpha^{-1} \subset \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{\alpha \in G} \alpha H_j \alpha^{-1} \subset G,$$

$G' \subset G$ は稠密な開部分集合で, 補集合 $G - G'$ は Haar measure 0.

これに対し,

$$\bigcup_{j=1}^m \hat{H}_j \subset \hat{G} \text{ は開部分集合で, } \hat{G} - \bigcup_{j=1}^m \hat{H}_j \text{ は measure 0.}$$

2°) (2) 式は, Weyl の積分公式と呼ばれ (H_j 上の measure $|\Delta(\phi)|^p d\mu(\phi)$ は具体的に Jacobian から与えられる) 体系全体の中にある, 指標公式, tempered な不変固有超関数の特徴付け等大切な役割を任なってきた. (3) 式の measure $d\mu_j(\pi)$ を決定する事が大きな問題とされてきたが, G, \hat{H}_j から具体的な意味付けが出来ないであろうか. さらに (3) 式は \hat{G} までの理論の展開にあって大切な役割が期待できるのではないか.

3°) Weyl 群, Weyl 領域が (G, H_j) と (\hat{G}, \hat{H}_j) との上で同じ様に考えられる. 離散系列については Harish-

Chandra (2), 一般の主系列については (7) を参照.

4) \hat{H}_j の表現の既約性は Harish-Chandra (7) 参照. \hat{H}_j の表現の指標において (3) での (G, \hat{H}_j) の Weyl 領域から壁への極限を考える. この Weyl 領域から近づくか問題だが; Fourier 解析の様に和の半分を考えることにより不変固有超関数が得られる. どのような表現の指標となるかは興味深い (離散系列については G. Zuckerman を参照.) f_1, \dots, f_n 間において Hirai, (4) により order の関係が入れられた. さらに global に H_1, \dots, H_n 間においては連結成分も含めて order の関係が与えられた. (正確には共役な類に対してである) H_1, \dots, H_n に対しても先の壁の所に対応する不変固有超関数を考察することにより order の概念を導入でき, H_1, \dots, H_n に与えた order の関係を保つ様にてできると思う. またこの壁に対応する不変固有超関数を考える方法は早井先生から教えていただいたのですが, Plancherel 公式を求めるときも大切な概念となりそうです.

5) 退化系列の表現は R. Lipsman に一つの定式化の試みがある. Cartan 部分群の measure σ に対応して構成されるが退化系列は \hat{G} 上で measure σ になる.

以下 Plancherel 公式を求める. すなわち (3) 式の $\psi(\pi)$ の決定について考える. Harish-Chandra の一連の研究では K -spherical 関数に分解するという方法をやっているがここでは主系列の表現の

指標を与え、対応する Radon 変換の境界値を調べ、Fourier, Laplace 変換を用いる方法で求める。連続系列の指標は知られているが、離散系列については Harish-Chandra (1), Hirai, (1) 等の一連の研究で明らかにされた。又他の主系列については一般に求まていない、其が問題だが Hirai, (1) が大きな役割を荷ないようである。又 Cartan 部分群向の order の関係が複雑な半単純リー群に対し統一的に Radon 変換の関係付けが得られるかも不安だが、この其は $Sp(2, \mathbb{R})$ 等の場合にうまくいくことが平井先生の共同研究を通じ明らかにされてきたので心配ないと思う。 $G = Sp(p, q)$ の場合について考えるが、 $SL(n, \mathbb{R}), SU(p, q)$ と比べると Weyl 群の構造が複雑な其が問題である。B. D. Roman (1), Hirai, (1) を参考にした。特に Hirai, (1) で大局的な見通しが与えられている。このせり方で一般の半単純リー群に対し Harish-Chandra の結果 (1) を包括し、より具体的なものが得られると思う。

§2. 主系列表現の指標

p, q を $p \geq q \geq 1$ を満たす整数で、 $n = p + q$ とする。群 $Sp(p, q)$ は、

$$Sp(p, q) = \{ g \in GL(2n, \mathbb{C}) : {}^t g J_1 g = J_1, g^* J_2 g = J_2 \}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1_p & 0 & 0 \\ 0 & -1_q & 0 \\ 0 & 0 & 1_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1_q \end{pmatrix}$$

$$1_n: n \text{ 次単位行列, } g^* = {}^t \bar{g}$$

で定義される半単純リー群、 $G = Sp(p, q)$ とおく。

(2.1) $H_k = H_k^+ H_k^-$ ($k=0, \dots, q$) を次の様に定義される G の Cartan 部分群とする。

(4) $H_k^+ : d(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_{p+k}}, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_1}, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_k}, e^{i\varphi_{q-k}}, \dots, e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \dots, e^{-i\varphi_{p+k}}, e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_k}, e^{-i\varphi_{q-k}}, \dots, e^{-i\varphi_1})$

(5) $H_k^- :$

| | | | |
|-----------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1_{p+k} cht_k | cht_1 cht_1 | cht_1 cht_1 | cht_1 cht_1 |
| cht_k | cht_1 cht_1 | cht_1 cht_1 | cht_1 cht_1 |
| 1_{p+k} | cht_k | cht_1 | cht_1 |
| cht_k | cht_1 | cht_1 | cht_1 |

但し、 $\varphi_j, \theta_j, \varphi_k, \varphi_j \in \mathbb{R}$, $i=1, \dots, q$, $d(a_1, a_2, \dots, a_n)$ は対角成分が a_1, \dots, a_n の対角行列、 n 行 n 列空白部分は 0 とする。

Cartan 部分群 H_0, H_1, \dots, H_q は G の内部自己同型で共役と存在する最大の族と存在。

(2.2) $R \in H_k$ を (4), (5) で与えられた行列の積とする。その固有値は $e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_{p+k}}, e^{z_1}, \dots, e^{z_1}, e^{z_1}, \dots, e^{z_k}, e^{i\varphi_{q-k}}, \dots, e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \dots, e^{-i\varphi_{p+k}}, e^{\bar{z}_1}, \dots, e^{\bar{z}_1}, e^{-\bar{z}_1}, \dots, e^{-\bar{z}_k}, e^{-i\varphi_{q-k}}, \dots, e^{-i\varphi_1}$, ($z_j = \varphi_j + i\theta_j, \bar{z}_j = -\varphi_j + i\theta_j$) と存在。 R の座標

(2) $(\varphi_1, \dots, \varphi_{p+k}, z_1, \dots, z_k, \varphi_1, \dots, \varphi_{q-k}, z_1, \dots, z_k)$

但し、 $\varphi_j = i\varphi_j$ ($1 \leq j \leq p+k$), $\varphi_j = i\varphi_j$ ($1 \leq j \leq q-k$)

$z_j = \varphi_j + i\theta_j, \bar{z}_j = -\varphi_j + i\theta_j, \theta_j = i\theta_j$ ($1 \leq j \leq k$), をとり、簡単

に, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ と表わすことにする. 正のルート系 P を

$$P = \{ e^{\alpha_i - \alpha_j} \quad 1 \leq i < j \leq n, e^{\alpha_i + \alpha_j} \quad 1 \leq i \leq j \leq n \}.$$

と与えらるゝとする. P_-, S_I, S_R をそれぞれ正のコンパクト, singular imaginary, real ルートからなる集合とすると

$$P_- = \{ e^{(i\varphi_j - i\varphi_l)}, e^{(i\varphi_j + i\varphi_l)} \quad 1 \leq j < l \leq p-k, \\ e^{(2i\varphi_j)} \quad 1 \leq j \leq p-k, \\ e^{(i\varphi_j - i\varphi_l)}, e^{(i\varphi_j + i\varphi_l)} \quad 1 \leq j < l \leq p-k, \\ e^{(2i\varphi_j)} \quad 1 \leq j \leq p-k, \\ e^{(2i\theta_j)} \quad 1 \leq j \leq k \},$$

$$S_I = \{ e^{(i\varphi_j - i\varphi_l)}, e^{(i\varphi_j + i\varphi_l)} \quad 1 \leq j \leq p-k, 1 \leq l \leq p-k \},$$

$$S_R = \{ e^{(2i\theta_j)} \quad 1 \leq j \leq k \},$$

となる. 他方正のルートは complex ルートとなる. (expl $\alpha_1 \in e(\alpha_1)$ と (E))

$\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_k$ の座標 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ が与えられたとき,

$$\Delta^k(\mathfrak{h}) = \prod_{1 \leq j < l \leq n} (e^{\alpha_j} - e^{\alpha_l}) \prod_{1 \leq j < l \leq n} (1 - e^{-(\alpha_j + \alpha_l)}) \prod_{1 \leq j \leq n} (e^{\alpha_j} - e^{-\alpha_j}) \\ = \prod_{1 \leq j < l \leq n} (e^{(\alpha_j - \alpha_l)/2} - e^{-(\alpha_j - \alpha_l)/2}) (e^{(\alpha_j + \alpha_l)/2} - e^{-(\alpha_j + \alpha_l)/2}) \\ \prod_{1 \leq j \leq n} (e^{\alpha_j} - e^{-\alpha_j})$$

$$\Delta_R^k(\mathfrak{h}) = \prod_{1 \leq j \leq k} (1 - e^{-2\theta_j})$$

$$\mathfrak{E}_R^k(\mathfrak{h}) = \rho_{\mathfrak{g}_k}(\Delta_R^k(\mathfrak{h}))$$

となる.

$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ とする.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{I}_j} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbb{P}_j}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbb{I}_j} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}_j}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbb{Z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbb{I}_j} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right).$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{Z}_j} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbb{I}_j} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right)$$

で与える. また n 変数の多項式

$$L(y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{1 \leq j < l \leq n} (y_j - y_l) \prod_{1 \leq j < l \leq n} (y_j + y_l) \prod_{j=1, \dots, n} 2y_j$$

におよぼし,

$$L(X) = \prod_{1 \leq j < l \leq n} (X_j - X_l) \prod_{1 \leq j < l \leq n} (X_j + X_l) \prod_{j=1, \dots, n} 2X_j$$

とおく. さらに

$$H_k = \{ h \in H_k : \Delta^k(h) \neq 0 \}, \quad H'_k(\mathbb{R}) = \{ h \in H_k : \Delta^k_R(h) \neq 0 \}$$

とする.

(2.4) (G, H_k) の Weyl group を W_k とする. すなわち, G の内部自己同型で H_k を不変にするもの. W_k は次の変換 (i), ..., (vii) により生成される.

- (9) (i) $\mathbb{I}_1, \dots, \mathbb{I}_{p-k}$ permutation (ii) $\mathbb{I}_1, \dots, \mathbb{I}_{p-k}$ permutation
 (iii) $\mathbb{I}_j \leftrightarrow -\mathbb{I}_j$ transformation (iv) $\mathbb{I}_l \leftrightarrow -\mathbb{I}_l$ transformation
 (v) $(z_1, z_1), \dots, (z_k, z_k)$ permutation
 (vi) $z_j \leftrightarrow z_j$, i.e. $t_j \leftrightarrow t_j$ transformation
 (vii) $z_j \leftrightarrow -z_j$, i.e. $\theta_j \leftrightarrow -\theta_j$ transformation.

$\omega \in W_k$ に対し, $\varepsilon(\omega)$, $\varepsilon'(\omega)$ を次の様に定義する.

$$\begin{cases} \varepsilon_R^k(\omega h) \Delta^k(\omega h) = \varepsilon(\omega) \varepsilon_R^k(h) \Delta^k(h), & h \in H'_k, \\ \varepsilon_R^k(\omega h) = \varepsilon'(\omega) \varepsilon_R^k(h). \end{cases}$$

H^k 上の関数 $f(t), g(t)$ が, $f(\omega t) = \varepsilon(\omega) f(t), g(\omega t) = \varepsilon'(\omega) g(t)$ を満足するとき,

(10)

| ω_k | $f(t)$ | $g(t)$ |
|------------|----------------|-----------|
| (i) | skew-symmetric | symmetric |
| (ii) | skew-symmetric | symmetric |
| (iii) | odd | even |
| (iv) | odd | even |
| (v) | symmetric | symmetric |
| (vi) | even | odd |
| (vii) | odd | even |

となる。

(2.5) H_0 を決定する。これは離散系列である。 G を G の正則な元からなる集合とする。 π を G 上の指標とすると、不変固有超関数となり、 G 上局所可積分関数、 G' では解析関数である。 $K^k(R) = \varepsilon_R^k(t) \Delta^k(R) \pi(R)$ ($R \in H_k$) とおくと、 $H_k(R)$ 上の解析関数に拡張でき、 π は $K^k(R)$ ($0 \leq k \leq g$) で決定される。(Hirai, T (4) 参照)

以下、離散系列、すなわち、2乗可積分な既約ユニタリ表現の指標を述べる。 $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq 0$ をみたす整数からなる行を $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ 、 $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合 $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ の I_n における補集合を J とする。 $i_1 < i_2 < \dots < i_p$, $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ とおこう。 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ をそれぞれ I, J の k -行とする。 α, β の成分からなる集合をそれぞれ $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, $\bar{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$ とする。

$$\varepsilon_I = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & p+1 & p+2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p & j_1 & j_2 & \dots & j_r \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\alpha, \beta, I, J) &= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_{p-k} & z_{p-k+1} & z_{p-k+2} & \dots & z_p \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-k} & \alpha_{p-k+1} & \alpha_{p-k+2} & \dots & \alpha_p \end{pmatrix} \\ &\quad \times \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_{p-k} & j_{p-k+1} & j_{p-k+2} & \dots & j_p \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{p-k} & \beta_{p-k+1} & \beta_{p-k+2} & \dots & \beta_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

但し, $z_1, z_2, \dots, z_{p-k} \in I - \bar{\alpha}$, $j_1, j_2, \dots, j_{p-k} \in J - \bar{\beta}$ で, $z_1 < z_2 < \dots < z_{p-k}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_{p-k}$ をみたすものとする. 任意の互いに異なる I の元 a, b に対し, $z = t + i\theta \in \mathbb{C}$ の関数を

$$\begin{aligned} (1) \quad \zeta(z; c; a, b) &= \operatorname{sgn}(a-b) \left\{ e(-|c_a - c_b| |t| + (c_a + c_b)i\theta) - e(-|c_a - c_b| |t| - (c_a + c_b)i\theta) \right. \\ &\quad \left. + e(-(c_a + c_b)|t| + (c_a - c_b)i\theta) - e(-(c_a + c_b)|t| - (c_a - c_b)i\theta) \right\} \\ &= \operatorname{sgn}(a-b) \left\{ e(-|c_a - c_b| |t| + (c_a + c_b)i\theta) - e(-|c_a - c_b| |t| - (c_a + c_b)i\theta) \right. \\ &\quad \left. - e(-(c_a + c_b)|t| + |c_a - c_b|i\theta) + e(-(c_a + c_b)|t| - |c_a - c_b|i\theta) \right\} \end{aligned}$$

で定義する. $\zeta(z; c; a, b) = -\zeta(z; c; b, a)$ である.

$$\zeta(z; c; a, b) = \begin{cases} - \left\{ e(c_a z - c_b \bar{z}) - e(c_a \bar{z} - c_b z) - e(c_a z + c_b \bar{z}) \right. \\ \quad \left. + e(c_a \bar{z} + c_b z) \right\} & a < b, t < 0 \\ e(-c_a \bar{z} + c_b z) - e(-c_a z + c_b \bar{z}) - e(c_a \bar{z} + c_b z) \\ \quad + e(c_a z + c_b \bar{z}) & a > b, t < 0 \end{cases}$$

である. $M = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ を I の部分集合で, $m_1 < m_2 < \dots < m_r$ とし

よう. $y_1, y_2, \dots, y_r \in \mathbb{C}$ の関数を

$$(2) \quad D(y_1, y_2, \dots, y_r; c; M) = |y_1^a, y_2^a, \dots, y_r^a|_{a=a_1, \dots, a_r}$$

で定義する. 但し, $a_j = c_{m_j}$ ($1 \leq j \leq r$) で, 右辺は j 番目の列が $y_1^{a_j}, y_2^{a_j}, \dots,$

$y_r^{a_j}$ ($1 \leq j \leq r$) で与えられる $r \times r$ -行列とする. さらに $A = \{1, -1\}$,

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r) \in A^r, \quad \operatorname{sgn} \varepsilon = \prod_{i=1}^r \operatorname{sgn} \varepsilon_i \quad \text{に対し,}$$

$$(3) \quad \tilde{D}(y_1, y_2, \dots, y_r; c; M) = \sum_{\varepsilon \in A^r} \operatorname{sgn} \varepsilon |y_1^{\varepsilon_1 a_1}, y_2^{\varepsilon_2 a_2}, \dots, y_r^{\varepsilon_r a_r}|_{a=a_1, \dots, a_r}$$

と定義する. 以上の定義を用いて, $R \in H_k^g(\mathcal{R})$ ($0 \leq k \leq g$) に対し,

$$(14) \quad K_{I,c}^k(R) = \varepsilon_I \sum_{d,\beta} \varepsilon(d,\beta, I, J) \tilde{D}(e^{\mathbb{E}_1}, e^{\mathbb{E}_2}, \dots, e^{\mathbb{E}_{p-k}}; c; I-\bar{\alpha}) \\ \times \tilde{D}(e^{\mathbb{E}_1}, e^{\mathbb{E}_2}, \dots, e^{\mathbb{E}_{p-k}}; c; J-\bar{\beta}) \times \prod_{j=1}^k \tilde{\tau}(z_j; c; d_j, \beta_j)$$

とする。但し、 d, β はそれぞれ I, J の元から成る k -行全体に関する和で、 $\mathbb{E}_j, \mathbb{E}_l, z_j$ は R の成分を表わす。さらに

$$(15) \quad \pi_{I,c}(R) = (\varepsilon_R^k(R) \Delta^k(R))^{-1} K_{I,c}^k(R) \quad (R \in H_k)$$

とおくと、 $\pi_{I,c}$ は G 上の不変固有超関数を与える。 $c_1 > c_2 > \dots > c_n > 0$ のとき 2 乗可積分表現の指標となる。逆に任意の G の既約な 2 乗可積分表現の指標はある $c_1 > c_2 > \dots > c_n > 0$ に対する $\pi_{I,c}$ で与えられる。 Harish-Chandra (2) の結果を用いて、global な指標公式を求めると、そのは大切な問題だったが、Hirai, [11] により、一般半単純リー群に対して具体的に求めた。 $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n \geq 0$ のとき、

$$(16) \quad K_c^k = \sum_I K_{I,c}^k, \quad \pi_c = \sum_I \pi_{I,c}$$

I は I_n の p 個の元の組に関する和、とおく。位数 n の対称群 S_n , $A = \{\pm 1\}$ に対し、

$$\alpha \in S_n, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in A^n, \quad \varepsilon \circ c = (\varepsilon_1 c_{\alpha(1)}, \dots, \varepsilon_n c_{\alpha(n)})$$

とし、

$$(17) \quad K_{\varepsilon \circ c}^k = \text{sgn } \varepsilon \text{sgn } \alpha K_c^k, \quad \pi_{\varepsilon \circ c} = \text{sgn } \varepsilon \text{sgn } \alpha \pi_c$$

で定義する。 $L(c) = 0$ ならば、 $K_c^k = 0, \pi_c = 0$ である。任意の c に対し、 $R \in H_k(R)$,

$$(18) \quad \pi_{I,c}^k(R) = \sum_{\varepsilon \in A^n} \sum_{\alpha \in S_p} \sum_{\beta \in A^q} \sum_{\tau \in S_q} \left[\prod_{j=1}^{p-k} e(\varepsilon_j a_{\alpha(j)} \mathbb{E}_j) \prod_{l=1}^{q-k} e(\beta_l b_{\tau(l)} \mathbb{E}_l) \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^k \text{sgn } \tau_j e \left\{ -1 \varepsilon_{p-k+j} a_{\alpha(p-k+j)} - \beta_{q-k+j} b_{\tau(q-k+j)} \right\} |\tau_j| \right. \\ \left. + (\varepsilon_{p-k+j} a_{\alpha(p-k+j)} + \beta_{q-k+j} b_{\tau(q-k+j)}) |\theta_j| \right]$$

但し, $a_l = c_{il}$ ($1 \leq l \leq p$), $b_l = b_{jl}$ ($1 \leq l \leq g$).

$$(19) \quad \mathcal{Z}_c^k(\mathcal{A}) = \sum_{\mathcal{I}} \mathcal{Z}_{\mathcal{I}, c}^k$$

とする. $\mathcal{A} \in H_k^+(\mathbb{R})$,

$$(20) \quad \mathcal{S}^k(\mathcal{A}; \tau, c) = \prod_{j=1}^{p-k} e(c_j \mathcal{E}_j) \prod_{l=1}^g e(c_{p+l} \mathcal{E}_l) \\ \prod_{j=1}^k \operatorname{sgn}(t_j) e\left\{ \left(c_{p-b+j} - c_{n-k+j} \right) |t_j| \right. \\ \left. + (c_{p-k+j} + c_{n-k+j}) \theta_j \right\}$$

とおく,

$$\mathcal{Z}_c^k(\mathcal{A}) = \sum_{\varepsilon \in A^k} \sum_{\tau \in S_n} \mathcal{S}^k(\mathcal{A}; \varepsilon \tau c) \quad \varepsilon \tau c = (\varepsilon_1 c_{\tau(1)}, \varepsilon_2 c_{\tau(2)}, \dots, \varepsilon_n c_{\tau(n)})$$

が成立.

補題 2.1. $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n \geq 0$ をみたす $c \in \mathbb{I}$ に対し,

$$L \mathcal{Z}_{\mathbb{I}, c}^k = L(c) K_{\mathbb{I}, c}^k \quad (0 \leq k \leq g),$$

又, 任意の c に対し,

$$L \mathcal{Z}_c^k = L(c) K_c^k \quad (0 \leq k \leq g),$$

が成立つ.

(2.6) H_g^+ を決定する. これは連続主系列である. $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n \geq 0$ を満たす. 整数の行を $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, m_1, m_2, \dots, m_g を整数, i_1, i_2, \dots, i_g ($i = \mathbb{I}, j \in \mathbb{R}$) を純虚数とする.

$$d_j = \frac{1}{2}(m_j + i j_j), \quad d_{-j} = \frac{1}{2}(m_j - i j_j) \quad (1 \leq j \leq g)$$

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_g, d_{-1}, d_{-2}, \dots, d_{-g}), \quad \chi = (c, d),$$

とおく. G 上の不変固有超関数 π_χ を次の様に与える.

$$(21) \quad K_\chi^k(\mathcal{A}) = \mathcal{E}_R^k(\mathcal{A}) \Delta^k(\mathcal{A}) \pi_\chi(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A} \in H_k^+$$

とあく. ここと

Q2) $K_X^k = 0 \quad 0 \leq k \leq g-1$

$$K_X^k = (-1)^{g(g+1)/2} \sum_{\varepsilon \in A^{p-g}} \text{sgn } \varepsilon \left| e(\varepsilon_1 c \mathbb{E}_1) e(\varepsilon_2 c \mathbb{E}_2) \cdots e(\varepsilon_{p-g} c \mathbb{E}_{p-g}) \right|_{c=c_1, \dots, c_{p-g}}$$

$$\times \sum_{\alpha \in S_g} \sum_{\varepsilon, \beta \in A^g} \text{sgn } \varepsilon e(\varepsilon_1 m_1 (\mathbb{E}_{\alpha 1} + i z_1 f_1 t_{\alpha 1})) \cdots e(\varepsilon_g m_g (\mathbb{E}_{\alpha g} + i z_g f_g t_{\alpha g}))$$

又

Q3) $(\mathbb{R}^g, \Delta^g) = (-1)^{g(g+1)/2} \prod_{j=1}^g (e^{\theta_j} - e^{-\theta_j}) \prod_{j=1}^g (e^{\theta_j} - e^{-\theta_j}) \prod_{j=1}^g |e^{\theta_j} - e^{-\theta_j}|$

$$\prod_{1 \leq j < l \leq p-g} (e^{(\theta_j - \theta_l)/2} - e^{-(\theta_j - \theta_l)/2}) \prod_{1 \leq j < l \leq p-g} (e^{(\theta_j + \theta_l)/2} - e^{-(\theta_j + \theta_l)/2})$$

$$\prod_{1 \leq j \leq g} |e^{\alpha_j} - e^{-\alpha_j}|$$

$$\prod_{1 \leq j < l \leq n, p-g < l} |e^{(\alpha_j - \alpha_l)/2} - e^{-(\alpha_j - \alpha_l)/2}| \prod_{1 \leq j < l \leq n, p-g < l} |e^{(\alpha_j + \alpha_l)/2} - e^{-(\alpha_j + \alpha_l)/2}|$$

但し, $(\alpha_j, \alpha_l) = \theta_j \cdot \theta_l$ 以降.

で与えられる.

\mathbb{R} の既約 \mathbb{Z} - \mathbb{R} 表現の指標であることを示す. G の部分群

Q4

| | | | |
|----------|-------|----------|-------|
| α | | β | |
| | 1_g | | |
| | | 1_g | |
| $-\beta$ | | α | |
| | | | 1_g |

$${}^t \alpha \alpha + {}^t \beta \beta = 1_{p-g}, \quad {}^t \alpha \beta = {}^t \beta \alpha$$

Q2:

| | | | | |
|-----------|-----------|----------|----------|-----------|
| 1_{p-g} | β | | α | |
| | | β' | | $-\alpha$ |
| | $-\alpha$ | | β | |
| | α | | | β' |

$$\alpha = D(\alpha_1, \dots, \alpha_g), \quad |\alpha_j| = 1$$

$$\beta = D(\beta_1, \dots, \beta_g), \quad |\beta_j| = 1$$

$$\beta' = D(\beta'_1, \dots, \beta'_1)$$

で与えらる. 直積 $Q_1 Q_2$ は $K = Sp(p) \times Sp(g)$ の 2-パートな部分群となる. $R = Q_1 Q_2 H_g$ は H_g の G における中心位群である. M を

R の有限次元既約 \mathcal{U} - \mathfrak{g} 表現でその指標は

$$\begin{aligned} \text{Q5) } \omega_{c,d}(R) &= \frac{\sum_{\varepsilon \in A^{p-g}} \text{sgn } \varepsilon |e(\varepsilon c \bar{\varepsilon}_1) \dots e(\varepsilon \bar{\varepsilon}_g c \bar{\varepsilon}_{p-g})| \sum_{z \in A^g} \text{sgn } z e(z_1 m_1 \bar{\theta}_1 + \dots + z_g m_g \bar{\theta}_g) \prod_{d=1}^g e(i f_d j_d)}{\prod_{1 \leq j < l \leq p-g} (e^{\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_l / 2} - e^{-(\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_l) / 2}) (e^{\bar{\theta}_j + \bar{\theta}_l / 2} - e^{-(\bar{\theta}_j + \bar{\theta}_l) / 2}) \prod_{1 \leq j \leq p-g} (e^{\bar{\theta}_j} - e^{-\bar{\theta}_j}) \prod_{1 \leq j \leq g} (e^{\theta_j} - e^{-\theta_j})} \end{aligned}$$

で与えられているものとする. \mathfrak{g} を G の \mathbb{C} -環, \mathfrak{h}_g を H_g に対応する部分環とする. これは Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$,

$$\mathfrak{k} = \{ X \in \mathfrak{g} : {}^t \bar{X} = -X \}, \quad \mathfrak{p} = \left\{ \begin{array}{cc|cc} 0 & B & 0 & C \\ \bar{B} & 0 & {}^t C & 0 \\ \hline 0 & \bar{C} & 0 & -\bar{B} \\ {}^t \bar{C} & 0 & {}^t B & 0 \end{array} : B, C \in M(p, g; \mathbb{C}) \right\},$$

に対応する Cartan involution に関して不変である. \mathfrak{g} の Iwasawa 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ とし, \mathfrak{n} に対応する G の部分群を N とする. RN は G の Parabolic 部分群となる. M を RN 上の表現に $M(k, n) = M(\mathfrak{g})$, $\gamma n \in RN$ で拡張する.

Q6) $\Gamma^M = \text{Ind}_{RN \uparrow G} M$
 とすると, その指標は $\pi_{\mathfrak{g}}$ となる. (Hirai, P (1)). $c_1 > c_2 > \dots > c_{p-g} > 0$, $\prod_{1 \leq i < j \leq g} (c_i - c_j) \prod_{1 \leq i < j \leq g} (c_i + c_j) \neq 0$, $\prod_{1 \leq j \leq g} c_j \neq 0$ に対して Γ^M は既約 \mathcal{U} - \mathfrak{g} 表現となり, 他の場合には既約 \mathcal{U} - \mathfrak{g} 表現の有限和となる.

(F. Bruhat の R.I.G. 参照) $\sigma \in S_{p-g}$, $\varepsilon \in A^{p-g}$ に対し,

Q7) $K_{\varepsilon \sigma c, d}^k = \text{sgn } \varepsilon \text{sgn } \sigma K_{c, d}^k$, $\pi_{\varepsilon \sigma c, d} = \text{sgn } \varepsilon \text{sgn } \sigma \pi_{c, d}$
 とおく. $\prod_{1 \leq j < l \leq p-g} (c_j - c_l) \prod_{1 \leq j < l \leq p-g} (c_j + c_l) = 0$ 有 $\exists K_{c, d}^k = 0$, $\pi_{c, d} = 0$ と
 なる.

任意の整数から成る行 $c = (c_1, c_2, \dots, c_{p-g})$, \times 矢 $d = (d_1, d_2, \dots, d_g,$

$d_1, d_2, \dots, d_g)$ に対し, $R \in H_g$,

$$\begin{aligned} (28) \quad \delta^2(R; X) &= \delta^2(R; c, d) \\ &= \prod_{j=1}^{p-g} e(c_j \Phi_j) \prod_{j=1}^g \{ e(d_j z_j + d_j \bar{z}_j) - e(d_j z_j + d_j \bar{z}_j) \} \\ &= \prod_{j=1}^{p-g} e(c_j \Phi_j) \prod_{j=1}^g e(m_j \Theta_j) \{ e(i p_j x_j) - e(-i p_j x_j) \}, \end{aligned}$$

又,

$$\begin{aligned} (29) \quad \mathcal{Z}_X^2(R) &= \mathcal{Z}_{c,d}^2(R) \\ &= \sum_{\varepsilon \in A^{p-g}} \sum_{\sigma \in S_{p-g}} \sum_{\alpha \in A^g} \sum_{\tau \in S_g} \text{sgn } \alpha \delta^2(R; \varepsilon \sigma c; \alpha \tau d) \\ &= \sum_{\varepsilon \in A^{p-g}} \sum_{\sigma \in S_{p-g}} \sum_{\alpha \in A^g} \sum_{\tau \in S_g} \delta^2(R; \varepsilon \sigma c; \alpha \tau m, \tau p), \end{aligned}$$

但し, $\varepsilon \sigma c = (\varepsilon_1 c_{\sigma(1)}, \varepsilon_2 c_{\sigma(2)}, \dots, \varepsilon_{p-g} c_{\sigma(p-g)})$,

$\alpha \tau d = (\alpha_1 d_{\tau(1)}, \alpha_2 d_{\tau(2)}, \dots, \alpha_g d_{\tau(g)}, \alpha_1 d_{-\tau(1)}, \alpha_2 d_{-\tau(2)}, \dots, \alpha_g d_{-\tau(g)})$,

と定義する.

補題 2.2.

$$L \mathcal{Z}_X^2(R) = (-1)^{\frac{g(g+1)}{2}} L(\alpha) K_X^2(R), \quad R \in H_g,$$

但し, $L(\alpha) = L(c_1, c_2, \dots, c_{p-g}, d_1, d_2, \dots, d_g, d_{-1}, d_{-2}, \dots, d_{-g})$.

(2.7) $H'_r (1 \leq r \leq g-1)$ を決定する. $C_1 \geq C_2 \geq \dots \geq C_{n-2r} \geq 0$ をみたす整数の行を $C = (C_1, C_2, \dots, C_{n-2r})$, $I_{n-2r} = \{1, 2, \dots, n-2r\}$ の $p-r$ 個の元からなる I_{n-2r} の部分集合を I とする. m_1, m_2, \dots, m_r を整数, i_1, i_2, \dots, i_r ($i = \sqrt{-1}$, $p_j \in \mathbb{R}$) を純虚数とする.

$$d_j = \frac{1}{2}(m_j + i p_j), \quad d_{-j} = \frac{1}{2}(m_j - i p_j),$$

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_r, d_{-1}, d_{-2}, \dots, d_{-r}), \quad \chi = (c, d)$$

よおく、 G 上の不変固有超関数 $\pi_{\chi, X}$ を次の様に与える。

$$(36) \quad K_{\mathbb{I}, \chi}^k(h) = \sum_{\mathbb{R}^k} \Delta^k(h) \pi_{\mathbb{I}, \chi}(h) \quad (h \in H_{\mathbb{R}})$$

とする。ここで、

$$(37) \quad K_{\mathbb{I}, \chi}^k(h) = 0 \quad (0 \leq k < r)$$

$$K_{\mathbb{I}, \chi}^k(h) = (-1)^{(g+r)r} \sum_{\substack{\alpha \in S_k \\ \alpha(1) < \dots < \alpha(r) \\ \alpha(r+1) < \dots < \alpha(k)}} K_d^\alpha(z_{\alpha(1)}, \dots, z_{\alpha(r)}, z_{-\alpha(1)}, \dots, z_{-\alpha(r)}) \\ \times K_{\mathbb{I}, c}^{p-r}(\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_{p-k}, z_{\alpha(r+1)}, \dots, z_{\alpha(k)}, \mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_{g-k}, z_{-\alpha(r+1)}, \dots, z_{-\alpha(k)}).$$

但し、 K_d^α は $Sp(r, r)$ の H_r 、 $K_{\mathbb{I}, c}^{p-r}$ は $Sp(p-r, g-r)$ の H_0 で与えられるものとする。 $\pi_{\mathbb{I}, \chi}$ が実際 既約 \mathbb{Z} - r 表現の指標であることを示す。 G の部分群

$$(38) \quad Q_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline d_1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline d_2 & 0 & \beta_2 & 0 \\ \hline \gamma_1 & 0 & \delta_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \gamma_2 & 0 & \delta_2 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} p-r \\ r \\ p-r \\ r \\ r \\ r \\ r \\ r \end{array}$$

$$Q_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1_{p-r} & & & \\ \hline & \beta & & \\ \hline & \beta' & & \\ \hline & & 1_{p-r} & \\ \hline & & & \beta \\ \hline & & & \beta' \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} d = D(d_1, \dots, d_r) \\ \beta = D(\beta_1, \dots, \beta_r) \\ \beta' = D(\beta'_1, \dots, \beta'_r) \\ |d_j| = 1 \\ |\beta_j| = 1 \end{array}$$

空は 0.

Q_1 は群 $Sp(p-r, r)$ と同型、とする。 $R = Q_1 Q_2 H_r$ は H_r の G における中心化群、 $\omega \in R$ の次の指標で与えられた表現とする。

$$(39) \quad \omega_d(z_1, \dots, z_r, z_{-1}, \dots, z_{-r}) \times \pi_{\mathbb{I}, c}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \dots, \mathbb{E}_{p-k}, z_{r+1}, \dots, z_r, \mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_{g-k}, z_{-r+1}, \dots, z_{-k}),$$

但し、 ω_d は (38) で与えたもの、 $h \in H_{\mathbb{R}}$ 、 $(r \leq k \leq g)$ 、他の時は 0.

(α, β, γ) の正のルートに対するルートベクトルにより張

られるもの部分環に対する G の部分群を N とする。(ここで、
 (6) で与えた正のルート α の制限ルート $\alpha|_N$ と必ずしもなっており
 なくとも、) RN の表現に先と同様にする誘導表現

(34)
$$\begin{array}{c} \text{Ind } M \\ \text{RN} \uparrow G \end{array}$$

の指標は $\pi_{\mathbb{Z}, \chi}$ で与えられる。 $G > C_2 > \dots > C_{n-2r} > 0$, $\prod_{1 \leq i < j \leq r} (p_i - p_j) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (p_i + p_j) \neq 0$, $\prod_{j=1}^r m_j \neq 0$ のとき $\pi_{\mathbb{Z}, \chi}$ は既約 \mathbb{Z} - \mathbb{Z} 表現の指標となる。
 他の場合は、既約 \mathbb{Z} - \mathbb{Z} 表現の有限和となる。(Harish-Chandra (7))

Hirai, (1)) $\chi = (c, d)$ に対して、

(35)
$$\pi_{\chi} = \pi_{c, d} = \sum_{\mathbb{Z}} \pi_{\mathbb{Z}, \chi} \quad , \quad K_{\chi}^k = K_{c, d}^k = \sum_{\mathbb{Z}} K_{\mathbb{Z}, c, d}^k$$

$$\pi_{\varepsilon \alpha c, d} = \text{sgn } \varepsilon \text{sgn } \alpha \pi_{c, d} \quad , \quad K_{\varepsilon \alpha c, d}^k = \text{sgn } \varepsilon \text{sgn } \alpha K_{c, d}^k \quad (\varepsilon \in A^{n-2r}, \alpha \in S_{n-2r})$$

とおく。但し、 I は \mathbb{Z}^{n-2r} の $p-r$ の元から成る行全体にわたる和。

任意の $\chi = (c, d)$ に対して、

(36)
$$\begin{aligned} \mathcal{S}^k(\mathbb{R}; \chi) &= \mathcal{S}^k(\mathbb{R}; c, d) \\ &= \prod_{j=1}^{p-k} e(c_j \mathbb{Z}_j) \prod_{l=1}^{q-k} e(c_{p-r+l} \mathbb{Z}_l) \prod_{j=1}^r e(m_j \mathbb{Z}_j) \{ e(i p_j t_j) - e(-i p_j t_j) \} \\ &\quad \prod_{j=1}^{b-r} \text{sgn}(t_{j+r}) e \{ - |c_{p-b+j} - c_{n+b+j}| |t_j| + (c_{p-b+j} + c_{n+b+j}) \mathbb{Z}_{j+r} \} \end{aligned}$$

(37)
$$\mathcal{I}_{\chi}^k(\mathbb{R}) = \mathcal{I}_{(c, d)}^k(\mathbb{R}) = \sum_{\varepsilon \in A^{n-2r}} \sum_{\alpha \in A^r} \sum_{\tau \in S_{n-2r}} \sum_{\sigma \in S_k} \mathcal{S}^k(\sigma \mathbb{R}; \varepsilon \tau \sigma ; \alpha d)$$

$$\alpha(r+1) < \alpha(r+2) < \dots < \alpha(k)$$

但し、 $\sigma \in S_k$, α は \mathbb{Z} -part の変換、 $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}_1, \dots, \mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}_{-1}, \dots, \mathbb{Z}_{-k})$ の \mathbb{Z} $\sigma \mathbb{Z} =$

$(\mathbb{Z}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbb{Z}_{\sigma(k)}, \mathbb{Z}_{-\sigma(1)}, \dots, \mathbb{Z}_{-\sigma(k)})$ とする変換とする。

補題 2.3. $L(\alpha) = L(c_1, c_2, \dots, c_{p-r}, d_1, \dots, d_r, c_{p-r+1}, \dots, c_{n-2r}, d_{-1}, \dots, d_{-r})$

とすると, $L\chi^k = (-1)^{r+\frac{1}{2}r(r-1)} L(\alpha) K_X^k$ が成立.

以上の結果をまとめ2次の定理を得る.

定理1. $0 \leq r \leq g$ とする. $C_1 > C_2 > \dots > C_{n-2r} > 0$, $\prod_{1 \leq i < j \leq r} (\alpha_i - \alpha_j) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\alpha_i + \alpha_j) \neq 0$, $\prod_j m_j \neq 0$ と I とに対して (15), (21), (30) で与えた $\pi_{I,c,d}$ は既約 $\mathcal{U} = \mathcal{S}$ の表現の指標となる. $C_1 > C_2 > \dots > C_{n-2r} > 0$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_r > 0$, $m_j > 0$ ($j=1, \dots, r$) なる互いに同値に存在する. $\chi = (c, d)$ に対 $\int_L(\chi) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-2r} (c_i - c_j)$
 $\prod_{1 \leq i < j \leq n-2r} (c_i + c_j) \prod_{1 \leq j \leq r} m_j$, $RL(\chi) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\alpha_i - \alpha_j) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\alpha_i + \alpha_j)$ とおく. $\int_L(\chi) = 0$ のとき $\pi_{I,c,d} = 0$. $RL(\chi) = 0$ のとき, 既約 $\mathcal{U} = \mathcal{S}$ の表現の有限和の指標となる.
 $r=0$ のときが2乗可積分表現の指標に対応する.

§3. G 上の不変固有超関数の性質

d_g を G 上で与えられた Haar measure. H_k 上の Haar measure を

$$d_k R = d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{p-k} d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_{q-k} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_k d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_k,$$

とする. $\varphi_j, \psi_l, \theta_j, \theta_l$ は $R \in H_k$ の座標成分である. $d_k \bar{g}$ を $\bar{G}^i = G/H_i$ の左不変 measure とする. 正の定数 $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ が存在して, G 上可

積分な関数 $f(g)$ に対し,

$$(38) \quad \int_G f(g) d_g = \left. \int_{H_j} \left\{ \int_{\bar{G}^j} f(gAg^{-1}) d_j \bar{g} \right\} |\Delta^j(R)|^2 d_j R \right\}$$

が成立つ. $f \in C_0^\infty(G)$ に対して,

$$(39) \quad K_f^j(R) = \varepsilon_R^j(R) \text{conj}(\Delta^j(R)) \int_{\bar{G}^j} f(gAg^{-1}) d_j \bar{g} \quad (R \in H_j^i)$$

とおく.

$$(40) \int_G f(g) dg = \sum_{j=0}^8 \alpha_j \int_{H_j} K_f^j(A) \varepsilon_f^j(A) \Delta^j(A) d_j A \quad (f \in C_c^\infty(G))$$

となる。

$$(41) H_k(\mathbb{I}) = \left\{ A \in H_k : \prod_{j=1}^{p-k} \prod_{l=1}^h (e^{2j-2l} - 1) (e^{2j+2l} - 1) \neq 0 \right\}$$

とおく。

補題 3.1. $K_f^j (f \in C_c^\infty(G), 0 \leq j \leq 8)$ は次の性質をもつ。

(i) H_k 上の関数 $K_f^j(A)$ は $H_k(\mathbb{I})$ 上の無限回微分可能関数に拡張でき、この拡張した関数を $H_k(\mathbb{I})$ の各連結成分に制限した関数はその成分の閉包上の無限回微分可能関数となる。

$$(ii) K_f^k(\omega A) = \varepsilon(\omega) K_f^k(A) \quad (\omega \in W_k, A \in H_k(\mathbb{I})).$$

閉包の境界上の微分は極限で与えておくものとする。

(Harish-Chandra の I.E.G, Hirai, P. (4))

π を G 上の不変固有超関数とし、

$$(42) K_f^j(A) = \varepsilon_f^j(A) \Delta^j(A) \pi(A), \quad \tilde{\varepsilon}_f^j(A) = L K_f^j(A) \quad (A \in H_j^+),$$

とおく。特に $\pi = \pi_x$ のときは $\tilde{\varepsilon}_f^j(A) = \pm L \omega \tilde{\varepsilon}_f^j$ である。

補題 3.2. $K_f^j(A) (A \in H_j^+)$ は次の性質をもつ。

(i) $K_f^j(A)$ は $H_j^+(\mathbb{R})$ 上の解析関数に拡張できる。この拡張した関数を $H_j^+(\mathbb{R})$ の各連結成分に制限した関数は $A \in H_j^+(\mathbb{R})$ の座標 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ の多項式と exponential 関数との積で表わされる。 $\tilde{\varepsilon}_f^j(A)$, $\tilde{\varepsilon}_f^j(A)$ も同様の性質をもつ。

(ii) $K^j(\omega R) = \varepsilon(\omega) K^j(R)$, $\xi^j(\omega R) = \varepsilon'(\omega) \xi^j(R)$, $\eta^j(\omega R) = \varepsilon(\omega) \eta^j(R)$,
 $(\omega \in W_j, R \in H_j^+(\mathbb{R}))$. (Hirai, T(4))

$c = (c_1, c_2, \dots, c_{n-2r})$, $d = (d_1, d_2, \dots, d_r, d_1, d_2, \dots, d_r)$ に対する $\chi = (c, d)$ を r 型とする.

定理 2. G 上の不変固有超関数 π に対し,

$$(43) \quad \int_G f(g) \pi(g) dg = \sum_{j=0}^{\delta} \alpha_j \int_{H_j} L K_f^j(R) L K^j(R) d_j R$$

が成立. 但し, $L K^j = \alpha_j \pi K^j$ ($0 \leq j \leq \delta$). 特に, $\chi = (c, d)$ が r 型 ($0 \leq r \leq \delta$) のとき

$$(44) \quad \varepsilon_r L(\chi) \int_G f(g) \pi(\chi g) dg = \sum_{j=0}^{\delta} \alpha_j \int_{H_j} L K_f^j(R) \lambda^j(R) d_j R$$

但し, $\varepsilon_r = (-1)^{r+1} \gamma(r-1/2)$.

この定理は K_f^j と K^j の $H_j^+(\mathbb{R})$, $H_j^+(\mathbb{R})$ での境界値を調べ, 部分積分をくり返し用いることにより得られる. Harish-Chandra (2), B. D. Rooman (1), Hirai, T(3) 参照.

§ 4. Plancherel の定理.

$f \in C_0^\infty(G)$ に対し,

$$(45) \quad \begin{aligned} F_f^j(R) &= \alpha_j L K_f^j(R) & R \in H_j^+(\mathbb{R}) \\ A_f^j(\chi) &= \int_G f(g) \pi(\chi g) dg & (\chi = (c, d), \text{ type } r) \end{aligned}$$

とおく.

定理 2 より,

$$(46) \quad \varepsilon_r L(\omega) A_f^r(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \left. \begin{array}{l} F_f^j(\omega) \chi^j(\omega) \omega_f^r \\ H_j \end{array} \right\} = \sum_{j=r}^{\infty} \left. \begin{array}{l} F_f^j(\omega) \chi^j(\omega) \omega_f^r \\ H_j \end{array} \right\} \quad (\chi^0 = \dots = \chi^{r-1} = 0).$$

補題 4.1. F_f^j ($f \in C_0^\infty(G)$, $0 \leq j \leq \infty$) は次の性質をもつ.

(i) $F_f^j(\omega)$ は $H_j^c(\Omega) \subset H_j$ の相対コンパクト部分集合の外で 0 で、 H_j 全体で定義される連続関数に拡張される.

(ii) $F_f^j(\omega) = \varepsilon(\omega) F_f^j(\omega)$ (補題 3.1 (ii) と (i) の性質より)

(iii) $F_f^j(\omega)$ の $H_j(\Omega)$ の各連結成分 Λ の制限は、その連結成分の閉包上の無限回微分可能関数となる.

補題 4.2. 正数 δ_0 が存在して,

$$(47) \quad F_f^0(\omega) = \delta_0 f(\omega) \quad f \in C_0^\infty(G)$$

が成立.

(証明) $\overline{\Delta^0(\omega)} = \Delta^0(\omega)$, $\frac{1}{2}(\dim G/K - \text{rank } G + \text{rank } K) = 2p \geq$

より, K_f に対 (Havish-Chandra (i)) と同様に (2) 得る. 終

補題 4.3. $\chi = (c, d)$, type r に対して,

$$\sum_{c_1, \dots, c_{n-2r}} \sum_{m_1, \dots, m_r} L(\omega) A_f^r(\omega)$$

は絶対一様収束する. 但し, $-\infty \leq c_1, \dots, c_{n-2r}, m_1, \dots, m_r \leq +\infty$

にわたる和.

\mathbb{Z} を整数全体の集合, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ とする.

補題 4.4. F を \mathbb{C}^* 上のコンパクトな台をもつ、連続微分可能関数とする.

$$(40) \quad \check{F}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} F(e^z) \operatorname{sgn} t e^{\{-|a-b||t| + (a+b)i\theta\}} dt d\theta \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

$$\hat{F}(m, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} F(e^z) e^{ipt} e^{im\theta} dt d\theta \quad (m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{R})$$

但し, $z = t + i\theta$, $i = \sqrt{-1}$, とおくと,

$$(i) \quad \check{F}(a, b) = \check{F}(b, a)$$

(ii) $F(e^z)$ が $t=0$ に関 (2 奇関数のとき,

$$\begin{aligned} \sum_{a=-\infty}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \check{F}(a, b) &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} F(e^t) \operatorname{coth}(t/2) dt + \pi \int_{-\infty}^{\infty} F(e^t) \tanh(t/2) dt \\ &= -\frac{i}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(m, p) \operatorname{coth}(\pi p) dp \\ &\quad - \frac{i}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(m, p) \operatorname{cosech}(\pi p) dp. \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_0 = 2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_1 = 2\mathbb{Z} - 1$, とおくと,

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}} \sum_{b \in \mathbb{Z}} \check{F}(a, b) = -\frac{i}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(m, p) \operatorname{coth}(\pi p/2) dp - \frac{i}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(m, p) \tanh(\pi p/2) dp,$$

とまとめられる。ここで和は極限で意味付けるものとする。

注意. この関係式は $Sp(p, q)$, $SU(p, q)$ には同じものになる。
 $SL(n, \mathbb{R})$, $SO^*(2n)$ は別の式で与えられる。 $Sp(n, \mathbb{R})$ では両方の関係式が必要となる。

$0 \leq k \leq g$, $\lambda = (c, d)$ type γ , $f \in C_0^\infty(G)$ に対 (2,

$$(49) \hat{F}_f^k(x; \lambda) = \int_{H_k} F_f^k(t) S^k(t; \lambda) dt$$

と定義する。 $e_{\pm}(\lambda) = (\pm 1/2) \coth(\pi \lambda)$ $e_{\pm}(\mu) = (\pm 1/2) \tanh(\pi \mu)$ と (,

$$(50) b_k^h = \frac{1}{2^g} \sum_{j_1, \dots, j_r=0,1} \sum_{c \in \mathbb{R}} \dots \sum_{c_{r-2} \in \mathbb{R}} \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}_{j_1}} \dots \sum_{m_r \in \mathbb{Z}_{j_r}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_f^k(x; \lambda) e_{j_1}(\lambda_1) e_{j_2}(\lambda_2) \dots e_{j_r}(\lambda_r) d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_r$$

と置く。

補題 9.5 (i) $0 \leq k \leq g$ に対 (2, $b_0^k = b_1^k = \dots = b_k^k$ が成立。

(ii) $\forall f \in C_0^\infty(G)$ に対 (2, $b_0^0 = (2\pi)^n \int_G f(e) = (2\pi)^n \alpha_k \gamma_0 \int_G f(e)$ が成立。

また,

$$(51) a^r = \frac{1}{2^g} \sum_{j_1, \dots, j_r=0,1} \sum_{c \in \mathbb{R}} \dots \sum_{c_{r-2} \in \mathbb{R}} \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}_{j_1}} \dots \sum_{m_r \in \mathbb{Z}_{j_r}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(x) A_f^r(x) \prod_{l=1}^r e_{j_l}(\lambda_l) d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_r$$

と置く。

補題 4.6. $\varepsilon_r a^r = \alpha_r^r b^r + \alpha_{r+1}^r b^{r+1} + \dots + \alpha_{b-1}^r b^{b-1} + \alpha_b^r b^b$ 但し,
 $\varepsilon_r = \Gamma(1)^{p_r + r(n-1)/2}$, $\alpha_b^r = 2^{n-r} (n-2r)! b! / (b-r)!$ 成立.

ただし

$$(52) A_f^r \alpha_1 = \sum_{\mathbb{Z}} S_p (|T_{\mathbb{Z}, X}^r(f)|) \quad , \quad |T_{\mathbb{Z}, X}^r(f)| = \int_G |T_{\mathbb{Z}, X}^r(g)| |f(g)| dg$$

と定義する. 以上の補題を用い 2 次の定理を得る.

定理 3. $f_1, f_2 \in C_0^\infty(G)$, $f = f_1 * f_2$ に対し,

$$(53) \int |f| dx = \sum_{0 \leq k \leq l} \frac{1}{2^{2k} \gamma!} \sum_{j_1, \dots, j_k=0,1} \sum_{G_1 > G_2 > \dots > G_{k-2r} > 0} \sum_{\substack{m_s \in \mathbb{Z}_{j_s}^+ \\ (s=1, \dots, r)}} \int \left\{ \sum_{\mathbb{Z}} S_p (|T_{\mathbb{Z}, X}^r(f)|) \right\} |L(\alpha, e_{j_1}(f_1), e_{j_2}(f_2), \dots, e_{j_r}(f_r))| dx$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq l} \sum_{j_1, \dots, j_k=0,1} \sum_{G_1 > G_2 > \dots > G_{k-2r} > 0} \sum_{\substack{m_s \in \mathbb{Z}_{j_s}^+ \\ (s=1, \dots, r)}} \int \left\{ \sum_{\mathbb{Z}} S_p (|T_{\mathbb{Z}, X}^r(f)|) \right\} |L(\alpha, e_{j_1}(f_1), e_{j_2}(f_2), \dots, e_{j_r}(f_r))| dx$$

$p_1 > p_2 > \dots > p_r > 0$

但し, $\mathbb{Z}_{j_s}^+ = \mathbb{Z}_{j_s} \cap \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^+ = \{m \in \mathbb{Z}, m > 0\}$, $\gamma = (2\pi)^n dx_0, \gamma_0$ 成立する.

文献

- Harish-Chandra: (1) Two theorems on semi-simple Lie groups, *Ann. of Math.* vol. 83 (1966), pp. 74-128.
 (2) Discrete series for semi-simple Lie groups I, II, *Acta Math.* vol. 113 (1965), pp. 241-318., vol. 116 (1966), pp. 1-111.
 (3) Harmonic analysis on semisimple Lie groups, *Bull. A.M.S.* 78 (1970), 529-551.
 (4) On the theory of the Eisenstein integral, in *Lecture Notes in Math.* vol. 266, pp. 123-149, Springer-Verlag, 1971.
 (5) Harmonic analysis on real reductive groups I, *J. Funct. Anal.* 19 (1975) 104-204.
 (6) Harmonic analysis on real reductive groups II, *Inventiones math.* vol. 36, (1976), 1-55.
 (7) Harmonic analysis on real reductive groups III, *Annals of Math.* vol. 104 (1976), 117-201.
- Hirai, T.: (1) The characters of some induced representations of semi-simple Lie groups, *J. Math. Kyoto Univ.* vol. 8 (1968), pp. 313-363.
 (2) Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups I, *Japan J. Math.* 39 (1970), 1-68.
 (3) The Plancherel formula for $SU(p, q)$, *J. Math. Soc. Japan.* vol. 22 (1970), pp. 134-179.
 (4) Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups II, *Japan J. Math. New Series* 2, (1976), pp. 27-89.
 (5) Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups III, *Japan J. Math. New Series* 2, (1976), pp. 269-341.
 (6) Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups IV, preprint.
 (7) The characters of the discrete series for semisimple Lie groups. preprint.
- Lipsman, R.: (1) On the characters and equivalence of continuous series representations, *J. Math. Soc. Japan.* vol. 23 (1971), pp. 452-480.
- Midorikawa, H.: (1) On the explicit formula of characters in the discrete series. preprint.
- Romm, B.D.: (1) Analogue to the Plancherel formula for the real unimodular group of the n th order, *Amer. Math. Soc. Translations* (2), vol. 58 (1966), pp. 155-215.
- Sugiura, M.: (1) Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semi-simple Lie algebras, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 11 (1959), pp. 374-434.
- Takahashi, R.: (1) Sur les fonctions sphériques et la formule de Plancherel dans le groupe hyperbolique, *Jap. J. Math.* vol. 31 (1961), pp. 55-90.
- Warner, G.: (1) Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I, II, Springer-Verlag, New York, 1972.
- Zuckerman, G.: Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie groups. preprint.