数理解析研究所講究録
301巻 1977年 106-117

ラテン方陣の個数計算について

東女大・文理・数 山本幸一

1. n 次既約ラテン方陣の個数 L_n は $n \leq 9$ が知られている。

$L_1 = L_2 = L_3 = 1$, $L_4 = 4$, $L_5 = 56$, $L_6 = 9408$, $L_7 = 1694\ 2080$,

$L_8 = 5352\ 8140\ 1856$, $L_9 = 37\ 7597\ 5709\ 6425\ 8816$.

非同型のものの個数 L_n' については

$L_4' = L_5' = 2$, $L_6' = 22$, $L_7' = 563$, $L_8' = 167\ 6257$

が知られている。またラテン方陣の種の数 L_n'' については

$L_4'' = L_5'' = 2$, $L_6'' = 12$, $L_7'' = 147$.

ついでながら L_n について筆者は次の漸近式が成立つのではないかと推測している:

$$n!\,(n-1)!\,L_n \sim (n!)^n \exp\left(-\frac{n(9n-13)}{12}\right).$$

さて上の結果のうち L_8 を与える M. B. Wells (J. Comb. Th. vol. 3 (1967), 98-99) 及び L_8' を与える J. W. Brown (J. Comb. Th. vol. 5 (1968), 177-184) はただ結果を示すだけで詳細は不明である。これらはいわば正反対の立場に立

つもので，M.B. Wells は A. Sade に由来する Hall 矩形による逐次的集計であり，J. W. Brown は置換の指標を規準にとって対象を縮小する．従ってこれらにはまるで共通点がないわけで，それら2つの立脚点を統合することが望ましいが，そのためにどのようなことを行ったらいいかという問題を考えたい。

2. 簡単に言えばSade流の逐次集計に際して，同型性を考慮して計算を精密化することとなるが，Sadeの方法の大要をまず説明する．

$r\times n$ ラテン矩形は n 次順列を縦に r 個並べたもので各列には文字の重複が現われないもののことである．今もし各列の中での文字の順序を無視し，各列は

$$\Omega=\{1, 2, \cdots, n\}$$

の部分集合であると考えたときいわゆる Hall 矩形を生ずる．すなわち，Ω の部分集合 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ の系 (indexed subsets)

$$\mathcal{F}=\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$$

があって，

$$\# B_i=r \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

であり，しかも任意の $j\in\Omega$ に対して

$$\#\{\ell ; j\in B_\ell\}=r,$$

すなわち j が丁度 r 個の B に含まれるならば $\mathcal{F}$ を $r\times n$

Hall 矩形という.

この際各 B_i の番号をつけかえること, Ω に置換を施すこと, あるいは関連行列を転置すること, すなわち

$$j \in B_i \iff i \in B_j^*$$

なる性質によって

$$\mathcal{F}^* = \{B_1^*, B_2^*, \ldots, B_n^*\}$$

を作ること. この3種類の操作によって, $r \times n$ Hall 矩形の全体に群 $S_n \times S_n \times S_2$ が作用する. この作用の下で分類して Hall 矩形の同値類を得る. 同値類の個数を h_r で表わす. 又, 各同値類 $\mathcal{L}$ に対して, その中に含まれる Hall 矩形の数を $\lambda(\mathcal{L})$ で表わす. この数は $\mathcal{L}$ に属する Hall 矩形 H の安定群 g_H を知ることによって

$$\lambda(\mathcal{L}) = \frac{2(n!)^2}{\# g_H}$$

で与えられる.

3. $r \times n$ ラテン方陣 L に1行を追加して $(r+1) \times n$ ラテン方陣を作る方法の数を $\nu(L)$ で表わす. これは L から出来る Hall 矩形に依存し, なおその Hall 矩形 H の属する同値類 $\mathcal{L}$ で決る. この函数を $\nu(\mathcal{L})$ とする.

Hall 矩形 H の余形(complement)

$$\mathcal{F}^{**} = \{\Omega - B_1, \Omega - B_2, \ldots, \Omega - B_n\}$$

の類を$\mathcal{L}^*$とすれば，$\nu(\mathcal{L})$は$\mathcal{L}^*$の中のf^*について，その中から相異代表系（system of distinct representatives＝SDR）を取り出す方法の数に当る．それは又H^*の関連行列の永久式に等しい。

さてSadeの方法の要点はHall矩形Hを$r+1$列のものに拡張してえられる$\nu(\mathcal{L})$個を，$(r+1)\times n$ Hall矩形の同値類$\mathcal{D}$ごとに分類して，対応する個数が$m_{\mathcal{L}\mathcal{D}}$個であるとし，$h_r \times h_{r+1}$次行列

$$M_{r,r+1} = (m_{\mathcal{L}\mathcal{D}})$$

を求めるところにある。たとえば，その行和

$$\sum_{\mathcal{D}} m_{\mathcal{L}\mathcal{D}}$$

は，$\mathcal{L}$ごとの$\nu(\mathcal{L})$を与えている．

一方拡張のし方を表わす上の函数$\nu(\mathcal{L})$は，Erdös-Kaplansky及び著者の方法で$\mathcal{L}$の内部構造から決定されて具体的な公式もある．詳細は煩雑なのでここには述べないことにする．要するにSadeの流儀はErdös-Kaplanskyらのラテン拡大の個数計算を，同値類ごとに細分して，その積み重ね（つまり行列の積）としてL_nを決定しようとするものである．

4. 基本的な行列$M_{r,r+1}$が求められたとすれば

$$P_r = M_{0,1} M_{1,2} \cdots M_{r-1,r}$$

は，その$\mathcal{L}$成分が$\mathcal{L}$に属する$r\times n$ラテン方陣の個数を示す．

$$Q_r = M_{r,r+1} \cdots M_{n-1,n}$$

については，その$\mathcal{L}$成分が$\mathcal{L}$の中のラテン矩形をラテン方陣に拡張する方法の数を示す．ゆえに今

$$\Delta_r = \mathrm{diag}\{\lambda(\mathcal{L})\}$$

とおけば対称関係

(1) $$P_r = {}^t(\Delta_r Q_{n-r}) = {}^tQ_{n-r}\Delta_r$$

が成立つ．同様にして基本的行列 $M_{r,r+1}$ についても

(2) $$\Delta_{r+1} M_{n-r-1,n-r} = {}^t(\Delta_r M_{r,r+1}) = {}^tM_{r,r+1}\Delta_r$$

が成立している．

5. 7次の場合．$r=2$ では $h_r=4$．4つの類を Sade のように A, B, C, D と命名する．表1．

$\mathcal{L}$	$\mathcal{G}_H$	$\#\mathcal{G}_H$	$\lambda(\mathcal{L})$
$A=\begin{matrix}1&1&3&3&5&6&7\\2&2&4&4&6&7&5\end{matrix}$	$D_{12}\times D_{34}\times D_{567}$	192	105/4
$C=\begin{matrix}1&1&2&4&5&6&7\\2&3&3&5&6&7&4\end{matrix}$	$D_{123}\times D_{4567}$	48	105
$B=\begin{matrix}1&1&3&4&5&6&7\\2&2&4&5&6&7&3\end{matrix}$	$D_{12}\times D_{34567}$	40	126
$D=\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&5&6&7&1\end{matrix}$	$D_{1234567}$	14	360

$r=3$ では $k_3=14$. Sade の名称を流用する. 但し I 以外.

$X=\begin{matrix}1&1&1&4&4&4&5\\2&2&2&5&5&6&6\\3&3&3&6&7&7&7\end{matrix}$	$[S_{123}]\times(S_{123})\times S_{4567}$	864	35/6
$I=\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&5&6&7&1\\4&5&6&7&1&2&3\end{matrix}$	$SL(3,2)$	168	30
$J=\begin{matrix}1&1&1&3&6&5&5\\2&2&2&5&7&6&6\\3&3&4&4&4&7&7\end{matrix}$	$[12],[67],(12),(67),$ $(16)(27)[16][27][34]$	32	315/2
$K=\begin{matrix}1&1&1&3&3&4&5\\2&2&2&4&6&6&6\\3&4&5&5&7&7&7\end{matrix}$	$S_{345}\times\left\{\begin{matrix}(12),(67),\\(16)(27)[15][26][37]\end{matrix}\right\}$	48	210
$P=\begin{matrix}1&1&1&2&3&4&5\\2&2&4&4&6&6&6\\3&3&5&5&7&7&7\end{matrix}$	$[12],(67),$ $(12)[34],(45)[67]$	16	315
$U=\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&5&6&7&1\\3&4&5&6&7&1&2\end{matrix}$	$D_{1234567}$	14	360
$N=\begin{matrix}1&1&1&2&3&3&4\\2&2&5&5&4&6&6\\3&4&6&7&5&7&7\end{matrix}$	$(12)(67)[34],(34)[12],$ $(16)(27)[16][27]$	8	630
$Y=\begin{matrix}1&1&1&3&4&4&5\\2&2&2&5&5&6&6\\3&3&4&6&7&7&7\end{matrix}$	$[12],$ $(12),(56)$	8	630
$W=\begin{matrix}1&1&1&2&3&4&5\\2&2&3&5&5&6&6\\3&4&4&6&7&7&7\end{matrix}$	$S_{\substack{2\,3\,4\\7\,6\,5}}$	6	840
$Z=\begin{matrix}1&1&1&2&3&4&4\\2&2&3&6&6&5&5\\3&4&5&7&7&6&7\end{matrix}$	$(23)(45)[23][45],(67)[67]$	4	1260

$R=\begin{matrix}1&3&5&2&1&3&5\\2&4&6&4&2&4&6\\3&5&1&6&7&7&7\end{matrix}$	(135)(246)[123][567]	3	1680
■ $Q=\begin{matrix}1&1&1&3&3&4&5\\2&2&2&4&5&6&6\\3&4&5&6&7&7&7\end{matrix}$	(12), (45)(67)[23][45][67]	4■	2520
$V=\begin{matrix}1&1&1&2&3&4&4\\2&2&3&5&6&5&6\\3&4&5&6&7&7&7\end{matrix}$	(17)(26)(34)[17][25][36]	2	2520
$T=\begin{matrix}1&1&1&2&4&3&5\\2&2&3&4&5&6&6\\3&4&5&6&7&7&7\end{matrix}$	(12)(34)(56)[12][34][56]	2	2520

[説明] K, Q は反転 $f \to f^*$ によって他のものに変る．これを■で示した．他の類は反転により不変である．

安定群はその生成元を示すに止めた．その中で

(イ) $D_{ab\cdots c}$ は $ab\cdots c$ を頂点とする正多角形に関する2面体群をあらわす．

(ロ) $S_{ab\cdots c}$ は $a, b, \cdots, c$ に関する対称群をあらわす．

(ハ) SL(3, 2) は特殊線型群．位数168の単純群である．

(ニ) (12)(67)[34] は文字に置換 (12)(67) を施した結果において列に置換(34)を施すことを意味する．

$\lambda(\mathfrak{L})$ はそれを5040で割った商を書いておいた．

$r=3$ の14個の類の中でIだけがブロック・デザインで，IはSadeの方法では現出しない．Iは有限射影平面PG(2, 2)で，その安定群がSL(3, 2)で与えられる．

$$M_{01} = 5040, \quad M_{12} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & C & B & D \end{array} \\ (210, \; 420 \;\; 504 \;\; 720) \end{array} \cdots 1854$$

表2

$$M_{23} = \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{cccccccccccccc} X & I & J & K & P & U & N & Y & W & Z & R & Q & V & T \end{array} & \\ \begin{array}{c} A \\ C \\ B \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 96 & \cdot & 48 & 96 & 48 & \cdot & \cdot & 192 & 96 \\ 2 & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & 24 & 48 & 24 & \cdot & 48 & 48 & 96 & 144 & 120 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 20 & 20 & 40 & 80 & 40 & 40 & 120 & 80 & 140 \\ \cdot & 2 & 7 & 14 & 21 & 10 & 21 & 28 & 28 & 56 & 84 & 112 & 98 & 98 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 580 \\ 578 \\ 580 \\ 579 \end{array} \end{array}$$

$$M_{34} = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cccccccccccccc} X^* & I^* & J^* & K^* & P^* & U^* & N^* & Y^* & W^* & Z^* & R^* & Q^* & V^* & T^* \end{array} & \\ \begin{array}{c} X \\ I \\ J \\ K \\ P \\ U \\ N \\ Y \\ W \\ Z \\ R \\ Q \\ V \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 144 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 8 & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & 56 & \cdot & 56 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 16 & 32 & 32 & \cdot & \cdot & 32 & 32 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 48 & 48 & 48 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & 16 & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & 16 & 32 & 16 & 32 \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 14 & 2 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 28 & 28 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & 16 & 8 & 16 & 8 & 16 & 16 & 24 & 32 \\ \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & 8 & 8 & 16 & 12 & 4 & 24 & 16 & 24 & 32 \\ 1 & 2 & 6 & \cdot & \cdot & 6 & 12 & 9 & 6 & 12 & 10 & 24 & 24 & 36 \\ \cdot & \cdot & 4 & \cdot & 6 & 4 & 4 & 2 & 8 & 16 & 24 & 24 & 24 & 28 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 3 & 3 & 6 & 9 & 5 & 18 & 15 & 24 & 30 & 30 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 & 12 & 16 & 36 & 24 & 28 \\ \cdot & \cdot & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 & 6 & 12 & 12 & 20 & 24 & 32 & 20 \\ \cdot & \cdot & 2 & 4 & 4 & \cdot & 8 & 8 & 8 & 14 & 20 & 28 & 20 & 28 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 144 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \\ 148 \\ 148 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \end{array} \end{array}$$

$$M_{45} = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cccc} A^* & C^* & B^* & D^* \end{array} & \\ \begin{array}{c} X^* \\ I^* \\ J^* \\ K^* \\ P^* \\ U^* \\ N^* \\ Y^* \\ W^* \\ Z^* \\ R^* \\ Q^* \\ V^* \\ T^* \end{array} & \begin{pmatrix} 18 & 36 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 24 \\ \cdot & 16 & \cdot & 16 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 24 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 24 \\ 7 & 7 & 7 & 10 \\ \cdot & 8 & 4 & 12 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & \cdot & 12 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 16 \\ \cdot & 3 & 3 & 18 \\ \cdot & 4 & 6 & 16 \\ 2 & 6 & 4 & 14 \\ 1 & 5 & 7 & 14 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 54 \\ 24 \\ 32 \\ 24 \\ 24 \\ 31 \\ 24 \\ 30 \\ 27 \\ 25 \\ 24 \\ 26 \\ 26 \\ 27 \end{array} \end{array}$$

$$M_{56} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} A^* \\ C^* \\ B^* \\ D^* \end{array} & \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad M_{67} = 1.$$

$$\therefore$$

$$M_{01}M_{12}M_{23}M_{34}M_{45}M_{56}M_{67} = 7! \cdot 121\ 9829\ 7600$$

$$\therefore$$

$$L_7 = 1694\ 2080.$$

(表2，表3の説明は末尾の補足参照)

表3

E	1	1	1
A	210	8	105/4
C	420	4	105
B	504	4	126
D	720	2	360
X	1680	288	35/6
I	1440	48	30
J	1 5120	96	315/2
K	1 0080	48	210
P	1 5120	48	315
U	4 7520	132	360
N	4 5360	72	630
Y	6 0480	96	630
W	8 0640	96	840
Z	9 0720	72	1260
R	10 0800	60	1680
Q	18 1440	72	2520
V	21 1680	84	2520
T	21 1680	84	2520
X*	8 0640	1 3824	35/6
I*	36 8640	1 2288	30

J*	193 5360	1 2288	315/2
K*	241 9200	1 1520	210
P*	362 8800	1 1520	315
U*	393 9840	1 0944	360
N*	749 9520	1 1904	630
Y*	774 1440	1 2288	630
W*	1032 1920	1 2288	840
Z*	1403 1360	1 1136	1260
R*	1903 1040	1 1328	1680
Q*	2806 2720	1 1136	2520
V*	2854 6560	1 1328	2520
T*	2757 8880	1 0944	2520
A*	1 7418 2400	663 5520	105/4
C*	6 8705 2800	654 3360	105
B*	8 3220 4800	660 4800	126
D*	23 6390 4000	656 6400	360
E*	121 9829 7600	121 9829 7600	1

これから8列r行ラテン矩形の総数N_rについて

$N_2 = 1854$, $N_3 = 107\ 3760$, $N_4 = 15518\ 5920$,

$N_5 = 40\ 5734\ 4000$.　N_2及びN_3は別の方法でも求められるがN_4, N_5を与える一般公式は知られていない.

6. Sade の方法はこのように枚挙の立場からは大そう有効であるが，同型決定にはこのままでは使えない．その理由は $r\times n$ ラテン矩形 L の拡大である $(r+1)\times n$ ラテン矩形 $\tilde{L}$ があった時，それぞれをまず Hall 矩形 H, $\tilde{H}$ で置き換えるのはいいとしても，その後で H と $\tilde{H}$ とを別々に，“大きな群” $\mathfrak{G}$ の下で処理してしまうところに問題がある．同型関係については $\tilde{H}$ と H との相対関係が基本的だから，$\tilde{H}$ を類別する群としては $\mathfrak{G}$ の代りに H の安定群 $\mathfrak{G}_H$ を使う必要がある．だから $\tilde{H}$ と同値な拡大の個数は $m_{\mathfrak{L}\mathfrak{D}}$ の構成する一部分である所の

$$\#\mathfrak{G}_H / \#(\mathfrak{G}_H \cap \mathfrak{G}_{\tilde{H}})$$

でなければならない．このように $M_{r,r+1}$ を構成する $m_{\mathfrak{L}\mathfrak{D}}$ を凡て $\mathfrak{G}_H$ の下で細分することが先ず必要である．一例をあげれば $M_{2,3}$ における $m_{D,U}$ は $=10$ であるが，$\mathfrak{G}_D$，$\mathfrak{G}_U$ ともに2面体群 D_{14} と同型で，この2つの2面体群の入り組み方によって $10=7+1+1+1$ のように4個の小類に分割する．そしてその計算は安定群の位数が $m_{\mathfrak{L}\mathfrak{D}}$ に比べて小さい所では沢山の小類が生ずるため面倒になる．筆者も実のところまだこの分割を完了してはいないが，近いうちに実行したいものと考えている．

なお $n=8$ の場合 $h_2=6$, $h_3=35$ で，それらの安定群もすでに決定されている．しかし h_4 は目下筆者には未知であるが，

恐らく300程度と思われる。このさい現われる $M_{r,r+1}$ は最大 35×300 程度の行列で，電子計算機によれば近づけない計算ではないと思われる。

文献

A. Sade : Énumeration des carrés latins. Application au 7^e ordre. Conjecture pour les ordres supérieurs, Marseille 1948.

K. Yamamoto : On the number of Latin rectangles, Sci. Rep. Tokyo Woman's Christian College, No. 7–11 (1968), pp. 86–97.

- - - - - - - - - - - -

「~~説明~~ 補足」表２の H^* は H の余形(§3) を表わす。むろん $\lambda(H^*)=\lambda(H)$ である。

~~上記~~ 分類表2は電子計算機に実行させたものである。

行列 P_r, Q_r の成分を表3に記す。第1列は各類に含まれるラテン矩形の数を7! で割ったもの，第2列は各類の中の一つ一つのHall矩形の中に含まれるラテン矩形の数をあらわす。