

P. Erdős の一予想をめぐる数値実験

岡山大 理 頼 永 正 孝  
岡山大 理 内 山 三 郎

1. Erdős の予想

P. Erdős はいろいろなところで次の予想を述べている  
([1, 2, 3]):  $b \geq 2$  はあたえられた整数として, 自然数  
 $n$  に対し  $n - b^k$  が素数となる  $k$  ( $1 \leq k < (\log n)/\log b$ )  
の個数を  $f(n)$  で表すとき

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log n} = 0$$

が成立つ. (1) は多分真であるが, Erdős のいうよう  
に, これを証明することはかなり難しいものと思われる.

個々の  $n$  に対する  $f(n)$  の値について,

定数  $c = c(b) > 0$  が存在して

$$(2) \quad f(n) > c \log \log n$$

が無限個の  $n$  に対して成立つ

ことと,

$b$  と互に素な整数からなる無限等差数列が存在し、  
この数列に属するすべての  $n$  に対して

$$f(n) = 0$$

が成立つ

ことが知られているにすぎない (cf. [1, 2]).

さて,  $n - b^k$  が  $1 \leq k < (\log n) / \log b$  をみたすすべての整数  $k$  に対して素数であるとき, 自然数  $n$  は性質  $P(1, b)$  をもつ, ということにしよう. もし (1) が真ならば, 任意の  $b \geq 2$  に対して, 性質  $P(1, b)$  をもつ  $n$  の個数は有限でなければならぬ. とくに  $b = 2$  のとき次の 7 個の整数

$$4, 7, 15, 21, 45, 75, 105$$

は性質  $P(1, 2)$  をもつが, Erdős はこれらの他に性質  $P(1, 2)$  をもつ自然数は存在しないであろうと予想する. そして彼は, 実際に素数表を用いて, 区間  $105 < n \leq 203775 (= 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19)$  には性質  $P(1, 2)$  をもつ  $n$  が存在しないことを見ている (cf. [1]). W.E. Mientka and R.C. Weitzenkamp [4] は計算機 IBM 7040 を使用して Erdős のこの結果を延長し,

$$105 < n \leq 18734724677955$$

$$(\approx 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 29^2 \cdot 37 \cdot 79 > 2^{44})$$

の範囲にそのような整数の存在しないことを検証した。

われわれはこの数値実験を延長し、これまでに

$$105 < n \leq 152246817378604933869885$$

$$(\approx 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 38916793 > 2^{77})$$

の区間に性質  $P(1, 2)$  をもつ整数  $n$  の存在しないことをたしかめた。使用した計算機は HITAC 20 である。

Mientka-Weitzenkamp [4] は、IBM 7040 を用いて、区間  $3 \leq b \leq 13$  内の各  $b$  についても、性質  $P(1, b)$  をもつ自然数  $n \leq 20000$  の個数をもとめているが、彼らのあたえた数値には誤りがあるように思われる。Mientka-Weitzenkamp によるこの数値と、われわれが HITAC 20 を用いてした実験による数値とを下に掲げる。

No. of numbers  $n \leq 20000$  with  $P(1, b)$

b	M-W's	ours	difference
2	9	7	2
3	23	20	3
4	81	77	4
5	63	58	5
6	240	234	6
7	159	152	7
8	110	102	8
9	280	251	29

10	383	373	10
11	265	254	11
12	351	339	12
13	385	372	13

われわれは更に  $2 \leq b \leq 21$  なる各  $b$  について性質  $P(1, b)$  をもつ正整数  $n \leq 2^m E4$  ( $m = 0(1)10$ ) の個数を数えた。次の表は得られた結果の一部を示すものである。

No. of numbers  $n \leq x$  with  $P(1, b)$ 

b	$x = 32E4$	$x = 1024E4$	largest n found
2	7	7	105
3	20	20	1330
4	92	100	5833497
5	61	66	7726572
6	349	411	9620063
7	199	247	9487050
8	153	210	8531205
9	534	1117	10166362
10	746	1177	9981153
11	639	1581	10219608
12	525	853	10203655
13	751	1511	10177200
14	921	1651	10238703
15	2080	5972	10239754
16	1790	5929	10239467
17	474	773	10120650
18	1086	2473	10228645
19	1580	4016	10230452
20	1472	4933	10233093
21	3717	14395	10237082

猶, R. C. Vaughan [5] は  $1 \leq k \leq (\log n)/\log 2$  なる  $k$  の整数  $k$  に対しても  $n - 2^k$  が素数であるような自然数  $n \leq N$  の個数  $E_2(N)$  の評価式

$$E_2(N) < N \exp\left(-\frac{c(\log N) \log \log \log N}{\log \log N}\right) \quad (c > 0 \text{ 定数})$$

をあたえている。

## 2. 問題の一般化

われわれは問題を次のように一般化する。整数  $a, b$  は  $1 \leq a < b$  をみたすものとする。  $1 \leq k < (\log n)/\log(b/a)$  なるすべての整数  $k$  に対して  $a^k n - b^k$  が素数であるとき、自然数  $n$  は性質  $P(a, b)$  をもつ、ということにする。どんな整数の組  $(a, b)$  ( $1 \leq a < b$ ) に対しても性質  $P(a, b)$  をもつ自然数は高々有限個しか存在しないのではないか？  $G.C.D.(a, b) > 1$  なる  $(a, b)$  についてはこれは明らかであるから  $G.C.D.(a, b) = 1$  なるものだけを考えればよい。

われわれは  $1 \leq a < b \leq 21$ ,  $G.C.D.(a, b) = 1$  をみたす整数の組  $(a, b)$  (のいくつか) についてこの問題を考察し実験を試みた。次に得られた結果の一部を示す。

No. of numbers  $n \leq 5E12$  with  $P(a, b)$

a, b	number of n	n found
7, 10	1	3
7, 9	1	2
4, 5	1	2
5, 6	none	—
6, 7	1	2
7, 8	none	—
8, 9	none	—

(  $b/a (> 1)$  の値が十分小ならば  $n$  に対する限界は殆ど

無制限に上げられる! )

No. of numbers  $n \leq x$  with  $P(a, b)$

a, b	$x = 2E4$	$x = 512E4$	largest n found
2, 3	5	5	8
2, 5	34	34	507
2, 7	46	48	3305430
2, 9	87	99	1594135
2, 11	113	163	4373430
2, 13	135	196	4534467
2, 15	404	1036	5104333
2, 17	393	751	4946795
2, 19	187	476	5119215
2, 21	460	1026	5074165
3, 4	3	3	5
3, 5	4	4	24
3, 7	15	15	352
3, 8	12	12	497
3, 10	42	42	4409
3, 11	25	25	2160
3, 13	76	83	537808
3, 14	63	87	4696235
3, 16	45	47	202545

(附記)  $1 \leq a < b$ ,  $\text{G.C.D.}(a, b) = 1$  とする. 自然数  $n$  に対して  $a^k n - b^k$  が素数となる整数  $k$  ( $1 \leq k < (\log n) / \log(b/a)$ ) の個数をふたたび  $f(n)$  で表すとき, (1) の成立つことが予想される. いまのところ, われわれに証明できることは, (2) すなわち

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log \log n} \geq c$$

なる定数  $c = c(a, b) > 0$  の存在, および  $a, b$  と互に素な整数からなる密度正 (positive density) の集合があってこれに属する各  $n$  に対して  $f(n) = 0$  が成立つこと, だけである. 証明は Erdős [1] における論法による.

### 文 献

- [1] P. Erdős: On integers of the form  $2^k + p$  and some related problems. *Summa Brasil. Math.* 2 (1950), 113-123.
- [2] ———: Quelques problèmes de la théorie des nombres. *Monographies de l'Enseignement Mathématique* No. 6, Genève (non-dated). *Esp. Problème* 54, pp. 121-122.
- [3] ———: Résultats et problèmes en théorie des nombres. *Séminaire Delange-Pisot-Poitou* (14e année: 1972/73). *Secrétariat Mathématique*, Paris (1973). *MR* 53(1977), #243.
- [4] W. E. Mientka and R. C. Weitzenkamp: On  $f$ -plentiful numbers. *J. Combinatorial Theory* 7 (1969), 374-377.
- [5] R. C. Vaughan: Some applications of Montgomery's sieve. *J. Number Theory* 5 (1973), 64-79. *Esp. formula* (1.5), p. 65.