数理解析研究所講究録
302巻 1977年 1-9

Stokesletとその応用

東大理　　橋本 英典

§1　はしがき

ストークス源（Stokeslet）は低いレイノルズ数の粘性流体に働く集中力による流れをあらわすストークスの方程式の解である。粘性流体中を運動する物体による流れにおいてストークス近似が成り立つ範囲（ストークス域）での物体から遠距離での流れの様子はこれによってあらわされ、物体に働く力はこれさえ求まればただちに定まる。また、ストークス域にある外部境界の効果や、外部の慣性域への接続による慣性の効果を見いだすにも重要な役割を演ずるものである[1-4]。ここでは２,３の例題をとって、境界の存在する場合のその求め方や、その応用について論じることにする。

§2 ストークス源

点$\mathbf{X}=\mathbf{X}_0$に集中力$\mathbf{F}\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)$（$\delta$はデルタ関数）が働くときの流速$\mathbf{V}$と圧力$p$に対するストークスの方程式

$$\mu\Delta\mathbf{V} = \mathrm{grad}p - \mathbf{F}\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0), \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = 0 \tag{2}$$

の無限領域における解は，次のようにして求まる。まず(1)のdivをとり，(2)を用いれば

$$\Delta p = \mathbf{F}\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0), \tag{3}$$

これらの一般解は$r=|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0|$とすれば

$$\Delta\phi_0 = \delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0) \tag{4}$$

の基本解

$$\phi_0 = -1/(4\pi r) \qquad \text{（3次元）} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\log r \qquad \text{（2次元）} \tag{5'}$$

を用いて，$\mathbf{F}$の方向の2重わき出しとして

$$p = \mathrm{div}(\mathbf{F}\phi_0) = (\mathbf{F}\cdot\mathrm{grad})\phi_0 \tag{6}$$

によって表わされる。これを(1)に代入し，(4)と$(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)=0$から得られる等式

$$\Delta[(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)\cdot\mathbf{F}\phi_0] = 2(\mathbf{F}\cdot\mathrm{grad})\phi_0 \tag{7}$$

に着目すれば

$$\mu\mathbf{V} = \frac{1}{2}\mathrm{grad}[(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)\cdot\mathbf{F}\phi_0] - \mathbf{F}\phi_0 \tag{8}$$

が得られる。(6)，(8)がストークスレットの表式である。

一般にストークスの方程式の流れの場は、このような集中力の分布によってあらわされると考えられる。これからストークスの方程式の一般解が$\frac{1}{2}\mathbf{F}\phi_0$の重量としての調和関数ベクトル$\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$を用いて、Imai の表式[2)]

$$\mathbf{V} = \mathrm{grad}[\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{\phi}] - 2\boldsymbol{\phi} \tag{9}$$

$$p = 2\mu \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{\phi} \tag{10}$$

に書けることも自然に導ける。

§3　2次元くさび域でのストークス源

2次元の流れについては、速度成分(u, v)に対して(2)を満足するように流れの関数

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1}$$

を導入し、(1)の rot をとればψに対して

$$\mu\Delta^2\psi = \left(F_1\frac{\partial}{\partial y} - F_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0) \tag{2}$$

が得られる。x軸と$\theta = \pm\alpha$の角をなす平板にかこまれたくさび状領域を考えるために円柱座標(r, θ), $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$を導入し、ストークスレットの位置を$r = r_0$, $\theta = \theta_0$とすれば

$$\Delta^2\psi = \frac{-1}{r_0^2}F_r\,\delta(r-r_0)\delta'(\theta-\theta_0) + \frac{1}{r_0}F_\theta\,\delta'(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0) \tag{3}$$

を得る。ただし

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$
$$\frac{1}{\mu}F_r = F_1\cos\theta_0 + F_2\sin\theta_0, \tag{4}$$
$$\frac{1}{\mu}F_\theta = -F_1\sin\theta_0 + F_2\cos\theta_0.$$

(3)の解を求めるにはまづ

$$\Delta^2\Phi \equiv \delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0) \tag{5}$$

の解Φを求めておくと便利である。

いまΦのMellin変換とその逆変換

$$\hat{\Phi}_s = \int_0^\infty r^{s-1}\Phi dr \qquad 0<\mathrm{Re}s<1 \tag{6}$$

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\Phi}_s\, r^{-s}\, ds \tag{7}$$

を導入すれば，(5)にr^{s+2}を乗じて積分することにより

$$L_{s+1}L_{s-1}[\hat{\Phi}_{s-1}] = r_0^{s+2}\,\delta(\theta-\theta_0) \tag{8}$$

をうる。ただし

$$L_\nu \equiv \frac{d^2}{d\theta^2} + \nu^2, \tag{9}$$

(8)の解は

$$L_\nu[\sin\nu|\theta|] = 2\nu\delta(\theta) \tag{10}$$

に着目すれば，補足関数を除いて

$$\hat{\Phi}_{s-1} = \frac{r_0^{s+2}}{8s}(S_- - S_+), \qquad S_\pm = \frac{1}{s\pm1}\sin(s\pm1)|\theta-\theta_0|, \tag{11}$$

と書けることがわかる。$\hat{\Phi}_{s-1}$を用いれば(3)の解は

$$\hat{\Psi}_{s-1} = -\left(\frac{1}{r_0^2}Fr\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r_0}F_\theta\frac{\partial}{\partial r_0}\right)\hat{\Phi}_{s-1}$$
$$= -\frac{r_0^s}{8s}[F_r(C_- - C_+) + (s + 2)F_\theta(S_- - S_+)] \qquad (12)$$

ただし

$$C_\pm = \mathrm{sgn}(\theta - \theta_0)\cos[(s \pm 1)(\theta - \theta_0)] \qquad (13)$$

となる。

$\theta_0 = 0$の場合について、$\theta = \pm\alpha$で，$V = 0$ すなわち $\psi = \partial\psi/\partial\theta = 0$となるように補足関数を決定しよう。

i) F_rの項，

対称性から、補足関数が$\sin(s\pm1)\theta$となることは明らかである。

$$\hat{\Psi}_{s-1} = -\frac{r_0^s}{8s}F_r\,[C_- - C_+ + a_+\sin(s + 1)\theta + a_-\sin(s - 1)\theta] \qquad (14)$$

とおけば境界条件からa_+，a_-に対する連立方程式が得られそれを解けば

$$a_\pm = -[s(1 - \cos2\alpha) \mp (1 - \cos2s\alpha)]/D_- \qquad (15)$$

ただし

$$D_- = s\sin2\alpha - \sin2s\alpha \qquad (16)$$

が得られる。また(7)により逆変換すれば、D_-の0点での極からの寄与だけでψを表わすことができ

$$\Psi = \frac{r_0F_1\sin\alpha}{4\mu}\sum_j A_j\Psi_j(r, \theta) \qquad (17)$$

ただし

$$A_j = \frac{1}{(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\lambda_j)\cos\lambda_j\alpha}, \tag{18}$$

$$\Psi_j = \{\sin(\lambda_j-1)\alpha\sin(\lambda_j+1)\theta - \sin(\lambda_j+1)\alpha\sin(\lambda_j-1)\theta\}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{(\lambda_j-1)\,\mathrm{sgn}(r-r_0)} \tag{19}$$

を得る。ここでλ_jは

$$D_-(\lambda) \underset{\sim}{=} \lambda\sin 2\alpha - \sin 2\lambda\alpha = 0 \tag{20}$$

の根であり、$r \gtrless r_0$に応じて実数部が正又は負のものを全部とる。またψが複素数になるときは実数部をとるように定める。実際半頂角αが約78°*より大きいと有限個の実根が存在するが小さいと複素根が無数個あらわれ、くさびの頂角に向って大きさ、強さが幾何級数的に減少する無限に続く渦模様が生じることはMoffatt[7]の予想に合致するものである。

ii) F_θの項

この時はψが$\theta = 0$に対して対称で、$\hat{\Psi}_{s-1}$は

$$\hat{\Psi}_{s-1} = -\frac{r_0^s}{8s}(s+2)F_2[S_-(\theta) - S_+(\theta) - b_-\cos(s-1)\theta - b_+\cos(s+1)\theta] \tag{21}$$

の形をとり、境界条件を満足させると

$$b_\pm = \pm[(1-\cos 2\alpha)s \pm (1-\cos 2s\alpha)]/(s\pm 1)D_+ \tag{22}$$

ただし

$$D_+(s) = s\sin 2\alpha + \sin 2s\alpha \tag{23}$$

が得られる。また逆変換によって

* Collins, W. M. & Dennis, S.C.R.: J. Fluid Mech. 76 (1976) 417 によればより正確には79.6°である。

$$\Psi = \frac{r_0 F_2}{8\mu\cos\alpha} \sum_j B_j \Psi_j(s, \theta) \tag{24}$$

ただし

$$B_j = \frac{2\sin 2\alpha - \sin 2\lambda_j\alpha}{\sin 2\alpha + 2\alpha\cos 2\lambda_j\alpha} \cdot \sin\lambda_j\alpha, \tag{25}$$

$$\Psi_j = \left[\frac{\cos(\lambda_j-1)\theta}{\cos(\lambda_j-1)\alpha} - \frac{\cos(\lambda_j+1)\theta}{\cos(\lambda_j+1)\alpha}\right]\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda_j-1} \mathrm{sgn}(r-r_0) \tag{26}$$

となる。ただし λ_j は $D_+(\lambda) = 0$ の根で、他のときは i) のときと同じである。このときも半頂角 α が約73°より大きいと有限個の実数根だけだが、それより小さいと、無数の複素根があらわれ Moffatt の渦模様が生じることになる。(17) − (19), (24) − (25) は Kim[5] が学位論文で特別な工夫によって求めたものと一致していることがわかる。

§4 柱状領域[8),9)]

一般に柱状領域を論じるには一般解として (1,9) に調和関数 ϕ_0 の勾配を加えた

$$\mathbf{V} = \mathrm{grad}(\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\phi} - \phi_0) - 2\boldsymbol{\phi} \tag{1}$$

をとっておくのが便利である。x_3 軸が母線の方向断面 $C: x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$ であらわされる柱で境された領域について、境界で $\mathbf{V} = 0$, 無限遠の速度 0 の条件を満たす解[6]は、面上での接線速度 0 の条件から C上で $\phi_3 = 0$,

$$\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{\phi} = x_1\phi_1 + x_2\phi_2 = \phi_0, \quad \phi_s = x_1'\phi_1 + x_2'\phi_2 = 0 \tag{2}$$

あるいは，$\omega = x_1x_2' - x_1'x_2$ とすれば

$$\phi_3 = 0,\ \omega\phi_1 = x_2'\phi_0,\ \omega\phi_2 = -x_1'\phi_0 \qquad (C上) \qquad (3)$$

を満足し、また接線速度0から

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial n} + \frac{1}{\omega}\theta_0 = \sum_{j=1}^{3} x_j \frac{\partial\phi_j}{\partial n} \qquad (C上) \qquad (4)$$

を満足し，指定した特異点をもつ調和関数として定まる。半径1の円管内のストークスレット $\mathbf{X}_0 = (\rho_0, 0, 0)$ に対しては，

$$\mu\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\phi_G + \tilde{\boldsymbol{\phi}},\quad \mu\phi_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{X}_0)\phi_G + \tilde{\phi}_0$$

ただし $\phi_G = 1/4\pi|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|$ ととれる。円柱座標を用いてやれば $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ と $\hat{\phi}_0$ をいたるところで解析的な調和関数として定めることができる。またこれを用いると円管内を速度 $\mathbf{U}$ で任意の方向に運動する半径 ε の微小球に働く力も

$$F_j = -6\pi\mu\varepsilon U[1 + \varepsilon k_j + O(\varepsilon')]$$

の形に定められる。任意の3次元微小物体に働く力も自由空間での運動で働く力がわかっていれば k_j を用いて求まる。特に中 軸に近い所 ($\rho_0 \ll 1$) で

$$k_r = 1.80436 + 2.50084\rho_0^2 \ldots$$

$$k_\theta = 1.80436 + 0.83983\rho_0^2 + \cdots$$

$$k_z = 2.10444 - 0.69793\rho_0^2 + \cdots$$

となり、軸方向に動くときの抵抗に比べ（k_z と一致する）軸に垂直な方向に運動した方が境界の効果で抵抗が小さくなっていることは新しい著しい結果である。

References

1) Hasimoto, H.: Theor. & Appl. Mech. 22 (1972)

2) 今井功：流体力学（前編）（裳華房 1973）p 313

3) 成瀬文雄：数理研講究録 234 (1975) 4.

4) Happel, J. and Brenner, H. : Low Reynolds Number Hydrodynamics (prentice Hall) 1965

5) 金文彦：東大理学博士論文（1976）

6) 橋本英典：数理研講究録 293 (1977) 3.

7) Moffatt, H.K.: J. Fluid Mech. 18 (1964) 1

8) Hasimoto, H.: J. Phys. Soc. Japan 41 (1976) 2143

9) Sano, O. & Hasimoto, H.: J. Phys. Soc. Japan 40 (1976) 884 42 (1977) 306