

Thue-Siegel-Roth の不等式について

早稲田大学 理工学部 足立恒雄

§1 序論

C. L. Siegel ([1]) は genus が正の代数曲線上には有限個しか整数点 (座標がすべて整数である点) が存在しないことを証明した。この有名な定理の non-standard method による再証明が近年 A. Robinson と P. Roquette によって与えられた ([2])。このように non-standard method は主に既に証明された定理の証明の整理, もう少し詳しくいえば, たとえば Siegel の天才のみが解決した凡人には理解出来ない, その必然性の理解出来ない, 計算や手法が整然とした形で再証明される, 一口にいえば, 証明の“合理化”がこの手法, non-standard method の本領であるように思える。

しかしながら, 亡くなった A. Robinson の遺稿, ほんの数枚の notes, をもとにして竹内外史教授が完成された近々公表

が予定されている論文 ([3]) は, この non-standard method に対する評価があてはまらない数少ない例外の一つである。

genus が正の代数曲線上には整数点が有限個しか存在しないことは解った, しかし, その全ての解を求めることが出来るのかどうか, これは明らかに別の問題である。もっと端的に言えば, 方程式が与えられた時, その整数解の大きさの限界がその方程式の係数から定められるであろうか。

特に, 代数曲線が hyper elliptic, その他いくつかの場合には, 解の限界がその曲線の方程式から "explicit" に与えられることが, A. Baker により証明されている (たとえば, [4], [6])。

genus が 0 の代数曲線, 即ち, 有理曲線の場合には, 整数点は無限のこともあり, 0 を含めて有限個のこともある。勿論, どの場合に有限なのか無限なのか判定することも出来る。だから positive genus の場合が大切なのである。

さて, A. Robinson - G. Takauti は次の事柄を証明した:
 α を代数的数とし, その次数 n は $n \geq 2$ であるとする。 k を $k > 2$ なる実数とする。 Roth ([7], [8]) によれば, 適当な正定数 $C = C(\alpha, k)$ をとれば, 1 になる有理数 x/y ($y > 0$) に対して

$$\left| \alpha - \frac{x}{y} \right| > \frac{c}{y^k} \quad \text{---(1)}$$

かなりたつ。

ところでこの c は d, k から effective に定まるであろうか。もしも、任意の d , 任意の $k (> 2)$ に対して $0 < c$, 即ち c が d, k から effective に定まるのであれば, positive genus の代数曲線の整数点の限界は effective に求まる。

これが Robinson - Takemiti の結果である。つまり, "任意" の代数曲線の語が Roth の不等式という "特定" の語に還元された, Roth の不等式に語は押しこめられたのである。

筆者がこの論文においてなすことは, Roth の不等式の語を更にある (後述の) 定数の計算に語をつめることにある。

もっとも Roquette 教授に伺ったところによると, 教授は上述の論文の証明を改良して, 証明が絶対的になるように, 即ち, Roth の不等式を証明から "消去" しようと試みておられるようである。私見では, non-standard method は上のような reduction, 語の煮つめには有力であるが, 新しい証明の編みだしにはやや難点があるように思われる。

我々が本論文に述べる方法は, Roth の不等式 (1) に, A. Baker の開発した linear form of logarithms の結果を活用する。定理の正確な formulation の前にいくつかの結果なしに目標との前後関係を述べよう。

まず上述のように終極的目標は次である：

(A) α を次数 n が $n \geq 3$ なる代数的数とする。また κ を $n > \kappa > 2$ なる実数とする。しからは " α と κ とから effective に計算できる実数 $C = C(\alpha, \kappa) > 0$ かつ" とし、任意の整数 x, y (但し $y > 0$) に対して (1) 加なりたつ。

Remark (i) $n = 2$ の場合には $\kappa > 2 = n$ により、定数 C は容易に計算できるので $n \geq 3$ としおく。

(ii) κ は整数解の限界を求めるという目的のためならば、 $\kappa < n$ をみたす α と無関係な定数でありさえすればよく、"2 より大" の 2 にこだわることはない。更だ、Roquette 教授によれば、 κ はある条件のもとで n に depend してもよい。

A. Baker が [4] にあつて証明してゐるように、(A) は次の (B) から平均値の定理を用いて簡単に導かれる：

(B) $f(x, y)$ を整数係数の既約多項式とし、 x, y について同次であるとする。 f の次数 n は $n \geq 3$ とする。 κ は $2 < \kappa < n$ なる実数とする。 m が整数であれば、

$$f(x, y) = m$$

をみたす整数 x, y はすべて

$$\text{Max}(|x|, |y|) < C m^{\frac{1}{n-\kappa}}$$

をみたす。ここに C は κ と n と、 f の係数とから effective に計算できる正定数である。

ところで(A) は次の(A') と同値である:

(A) α を次数 $n \geq 3$ なる代数的数とする。 $K \in \mathbb{N}$ $n > K > 2$ なる実数とする。また c は正実数とする。このとき

$$|\alpha - \frac{x}{y}| < \frac{c}{y^k} \quad \dots (2)$$

を満たすような整数 x, y ($y > 0$) に対し 2 は常に

$$y < C \quad \dots (3)$$

かなりたつような α, k, c から effective に計算できる定数 C が存在する。

(A) と (A') との同値性は比較的容易であるから略する。

特に (B) \Rightarrow (A') である。(A') における (3) の C は c, k のとらう order なのか明示されていない。一般には方程式より弱い形の不等式に関する結果が方程式の結果から導かれてくるので弱い結果となつてゐるのである。(A') を仮定すれば、よく知られた Thue の元来の方法によつて (B) の弱い形:

(B') 仮定は (B) と同じとする。よからば

$$\text{Max}(|x|, |y|) < C,$$

こゝに C は n, m , および f の係数から effective に 定まる定数である。が得られる。以上から

$$(B) \Rightarrow (A) \Leftrightarrow (A') \Rightarrow (B')$$

であることを知る。(A) の強い形、即ち、(2) の C に関する order が入った評価が得られれば、それから (B) は (A') から

(B') を導いたようにして導かれる。我々の結果は k も十分 n に近くとると先のような強い形の結果を得るともいふことができる。

§2 定理とその証明

A. Baker は [5] にあり 2 次の結果を示した:

(C) d_1, \dots, d_n を 0 でない代数的数とし、それぞれの次数はすべて d を越えないとし、height はすべて A を越えないとする。 d_0 を 0 でない代数的数とし次数は d を越えず、また height は A を越えないとする。 b_1, \dots, b_n を整数とし、

$\max_j |b_j| \leq B$ とする。 $\Lambda = b_1 \log d_1 + \dots + b_n \log d_n - \log d_0$ とおけば、 $\Lambda = 0$ であるか、または任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|\Lambda| > A^{-C} e^{-\varepsilon B}$$

がなりたつ。 C は ε, A, n, d から effective に計算できる定数である。

Baker が述べているように、(C) から (1) がなりたつような d, C から effective に計算できる $k (< n)$ が存在することがいえる。これは (C) から (B) がある k についてなりたつことを導き、それからその k について (A) がなりたつことを意味する。

さて我々の証明する結果は次のとおり:

定理 d を次数 $n \geq 3$ なる代数的数とする。 C を正実数と

とする。こゝから、 α から effective に計算できる $k (< n)$ が存在して、(2) を満たす任意の整数 $x, y (y > 0)$ に対して常に

$$y < (C, C)^{\frac{1}{n-k}}$$

がなりたつ。こゝに C は α だけによつて effective に計算される定数である。

k が $2 < k < n$ なる任意の実数になれば、その結果は最も強い結果となる。

Remark (1) k は実は、 $Q(\alpha)$ が Q 上の Galois の時、

$$k \geq \frac{n}{1 + \frac{1}{2c}}$$

にとればよい。この C は証明中にあらわれる特定の $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ によつて定まる (C) 中にあらわれる Baker の定数 C である。従つて特別な場合に (C) の中の定数 C がとれ位小さくとれるかが次の課題となる。

(2) k は実際は n と α の height だけから定められることがわかる。

さて定理の証明を考へよう。手続は (C) から (B) を導く手続に類似してゐるから、Baker の [4], pp 188-190 又は [6], pp - を参照しながら進めることにする。

まず、ある k と x, y に対して (2) がなりたつてゐるとす

る。いゝ忘れたが、 α は代数的整数であるとしても一般性を
たぬない、一定整数 a をかけて $a\alpha$ を代数的整数にできるか
らで、 $a\alpha$ を c とおけばよいからである。

$K = \mathbb{Q}(\alpha)$ を有理数体に α を添加した代数体とし、 $\nu = \nu +$
 $t-1$ を通常のように定める。(ν , t は K の実共役体の個数、
および虚の共役体の個数の半分である。)

次に $\beta = x - \alpha y$ とおく。 β は代数的整数である。(2) から

$$|\beta| < c y^{1-k} \quad \dots (4)$$

また根の分離といふことから

$$c_1 y < |\beta^{(j)}| < c_2 y \quad (j=2, \dots, n) \quad \dots (5)$$

こゝに、 y 以下においても、 c_k は " α から" effective に計
算される ^正 定数である。また (j) は共役写像をあらわす。(1) と

(2) から

$$N|\beta| < c c_3 y^{n-k} \quad \dots (6)$$

こゝに N は K からの絶対ノルムを表わす。

Lemma 1 (Landau-Siegel) 次の条件をみたすよ
うな K の単数 η_1, \dots, η_r が存在する;

$$|\log |\eta_k^{(j)}|| < C_4 \quad (k=1, \dots, r; j=1, \dots, r+1) \quad \dots (7)$$

$$\text{かつ } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \log |\eta_1^{(1)}| & \dots & \log |\eta_1^{(r+1)}| \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \log |\eta_r^{(1)}| & \dots & \log |\eta_r^{(r+1)}| \end{vmatrix} \text{ とおくとき } |\Delta| > C_5 \quad \dots (8)$$

この Lemma はよく知られたものである。

Lemma 2 整数 b_1, \dots, b_r に対して $\gamma = \beta \eta_1^{b_1} \dots \eta_r^{b_r}$ とおく
と,

$$|\log |e^{b_0} \gamma^{(j)}|| < c_6 \quad (j=1, 2, \dots, r+1) \quad \dots (9)$$

をみたすように整数 b_0, b_1, \dots, b_r を選ぶことができる。従って,
(9) の和をとると

$$|\log |\gamma^{(j)} / \gamma^{(k)}|| < c_7 \quad (j, k=1, 2, \dots, r+1) \quad \dots (10)$$

証明は, $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $(\log |\eta_1^{(j)}|, \dots, \log |\eta_r^{(j)}|)$ ($j=1, \dots, r$)
 $\in \mathbb{R}^{r+1}$ は \mathbb{R} 上一次独立なベクトルであり, (7), (8) によ
り, これらのベクトルの張る平行体の大きさが限定されるから, 容易に導かれる。
(こと)

Lemma 3 $\gamma^{(j)} / \gamma^{(k)}$ は全 2 次数が $n(n-1)$ 以下, height が
 $c_8 y^{(n-k)(n-1)}$ 以下の代数的数である。 K/\mathbb{Q} が, とくに, 加
口の拡大であれば, $\gamma^{(j)} / \gamma^{(k)}$ の次数は n 以下, height は高々
 $c_8 y^{n-k}$ となる。

証明 $\gamma^{(j)} / \gamma^{(k)}$ は整係数の多項式 $\prod_{i \neq k} (\gamma^{(k)} x - \gamma^{(i)}) = \prod_{i \neq k} (\gamma^{(k)} x - \gamma^{(i)}) / (\prod_i \gamma^{(i)}) (x-1)^n$ の根である。

$$\text{右辺の分子} = (N\gamma)^n \prod_{i \neq k} (x - \frac{\gamma^{(i)}}{\gamma^{(k)}})$$

$$\text{右辺の分母} = N\gamma \cdot (x-1)^n$$

$N\gamma = N\beta$ と (6) により $|N\gamma| < c c_3 y^{n-k}$. こと (10) によ
り結果を得る。ガロワ拡大の場合には, $\gamma^{(j)} / \gamma^{(k)}$ は $N(\gamma^{(k)} x -$

$\gamma^{(j)}$ の零点に"から Lemma の主張が通りである。

Lemma 4 λ を $0 < \lambda \leq \text{Min}\{\frac{\kappa+1}{2}, \kappa-1\}$ なる実数とすると, $|\frac{\beta^{(j)}}{\beta^{(0)}}| < c y^{-\lambda} e^{-c_9 H}$ かなりたつ, $\equiv \equiv H$

は $\text{Max}\{|b_0|, |b_1|, \dots, |b_{r+1}|\}$ である。

証明 $|\log |e^{b_0} \gamma^{(j)} / \beta^{(j)}||$ の最大値が $j = J$ のとき与えらるるといふ。 i からいふ, $|\log |e^{b_0} \gamma^{(J)} / \beta^{(J)}|| > c_{10} H$, 故に

$$|\log |\beta^{(J)}|| \geq |\log |e^{b_0} \gamma^{(J)} / \beta^{(J)}|| - |\log |e^{b_0} \gamma^{(J)}|| > c_{10} H - c_6$$

もし $\log |\beta^{(J)}| \geq 0$ ならば $J \neq 1$, といふのは $|\beta^{(1)}| < 1$ であるから。(4), (5) によつて

$$|\beta^{(1)} \beta^{(J)}| < c c_2 y^{2-\kappa} \text{ 故に } H \text{ かなり大ならば } |\beta^{(1)}| < c y^{2-\kappa} e^{-c_{11} H}$$

もし $\log |\beta^{(J)}| < 0$ ならば $J = 1$. $\therefore |\beta^{(1)}| < e^{c_6 - c_{10} H} < e^{-c_{12} H}$

$$\text{よって (4) とから } |\beta^{(1)}| < \kappa y^{\frac{1-\kappa}{2}} e^{-\frac{c_{12}}{2} H}$$

一方, (5) から $|\beta^{(2)}| > c_1 y$ であるから, 上のいずれの場合にも Lemma がかなりたつ。

Lemma 5 $\alpha_j = \frac{\eta_j^{(2)}}{\eta_j^{(3)}} \quad (j=1, 2, \dots, r)$, かつ $d_0 = \frac{(d^{(3)} - d^{(1)}) \gamma^{(2)}}{(d^{(2)} - d^{(1)}) \gamma^{(3)}}$ とおくと

$$H(d_j) < c_{13} \quad (j=1, 2, \dots, r), \quad H(d_0) < c_{14} (c y^{d-\kappa})^{(n-1)(n-2)}$$

$\equiv \equiv H(d_j)$ は, 勿論, d_j の height を表わす。よって, K/\mathbb{Q} が加口閉体であるならば $H(d_0) < c_{14} c y^{d-\kappa}$ である。

証明 α_0 は整係数の多項式 $\prod (\alpha^{(2)} - \alpha^{(k)}) \gamma^{(k)} x - (\alpha^{(2)} - \alpha^{(k)}) \gamma^{(k)}$ の零点である。こゝに積は相異なる k , l の $\alpha^{(k)}$ と $\alpha^{(l)}$ だけである。Lemma 3 のようにしてあらは示される。

$z = b_1 \log d_1 + \dots + b_r \log d_r - \log d_0$ とおく。 \log は主値をとるものとしておく。さらに $\omega = d_1^{b_1} \dots d_r^{b_r} - d_0$ とおけば、

$$\omega = - \frac{(\alpha^{(3)} - \alpha^{(1)})}{(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)})} \cdot \frac{\beta^{(1)}}{\beta^{(2)}} \cdot \frac{\gamma^{(2)}}{\gamma^{(3)}} \quad \dots (11)$$

がなりたつ。従って $\omega/d_0 = e^z - 1$ である。Lemma 4 により、 $|e^z - 1| < 1/4$ であるから、 $|z - ib\pi| < 4|e^z - 1|$ を満足する $b \in \mathbb{Z}$ が存在する。証明は [], p176 にある。

よって $\Lambda = z - b \log(-1)$, $B = 2rH$ とおく。すると $|b| < B$, $|b_j| < B$ ($j=1, \dots, r$), 明らかに $\Lambda \neq 0$ がなりたつ。

こゝで定理 (C) を利用しよう。Lemma 5 と併せると

$$|\Lambda| > \left\{ c_{14} (c y^{n-k})^{(n-1)(n-2)} \right\}^{-c_{15}(\varepsilon)} e^{-\varepsilon B} \quad \dots (12)$$

である。こゝに $c_{15}(\varepsilon)$ は ε と α にかゝり effective に計算できる正数である。

一方, (11) と Lemma 4 を用いると

$$|\Lambda| < 4|e^z - 1| = 4|\omega/d_0| < c c_{16} y^{-\lambda} e^{-c_9 H} \quad \dots (13)$$

(12) と (13) とから

$$e^{(c_{17} - \varepsilon)B} < c' y^{c_{15}(\varepsilon)(n-1)(n-2)(n-k) - \lambda}$$

がなりたつ。 c' は α と c と ε とにかゝり effective に計算できる定

数である。故に $C'' = C_{15}(\varepsilon)(n-1)(n-2)$ とおけば

$$C''(n-K) - \lambda \leq 0$$

のとき, $\lambda \leq 2$ ならば, $\lambda = K/2$ とおけば $K \geq \frac{n}{1+(2C'')^{-1}}$ のとき,

$H < B < \frac{\log C'}{C_{17}-\varepsilon}$ である。Lemma 2 と併せて

$$|\beta^{(2)}| < C' C_{19}(\varepsilon) \quad \therefore y < \frac{|\beta^{(2)}|}{c_1} < C' C_{20}(\varepsilon)$$

$C' = C^{(n-1)(n-2)} C_{15}(\varepsilon) C_{14}^{C_{15}(\varepsilon)}$ であるから, K を

$$(n-1)(n-2) C_{15}(\varepsilon) C_{20} \leq \frac{1}{n-K}$$

にとおけば定理は示されたことになる。

とくに, K/\mathbb{Q} が Galois 拡大であれば, $C'' = C_{15}(\varepsilon)$ である。たとえば, (A') には $K > \frac{n}{2}$ と ~~する~~^{出来る} ためには,

$$C_{15}(\varepsilon) \leq \frac{1}{2}$$

が示されればよいことになる。

文 献

- [1] Siegel, C. L., "Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen", Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. (1929)
- [2] Robinson, A. - Roquette, P., "On the finiteness theorem of Siegel and Mahler concerning Diophantine equations, J. Number Th. 7 (1975)
- [3] Robinson, A., "A relatively effective procedure getting all quasi-integer solutions of diophantine equations with positive genus" (written by G. Takenti), to appear,

- [4] Baker, A., "Contributions to the theory of Diophantine Equations", *Philosophical Transactions of Roy. Soc. London*, Vol. 263 (1968),
- [5] Baker, A., "A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms II", *Acta Arith.* XXIV (1973),
- [6] Baker, A., *Transcendental Number Theory*, Cambridge, 1975,
- [7] Roth, K.F., "Rational approximations to algebraic numbers," *Mathematika* 2 (1955),
- [8] Lang, S., "Diophantine Geometry," Interscience.