

On H-equivalences of $SU(3)$, $U(3)$ and $Sp(2)$

徳大 工 澤下教親

§1. 序

$\mathcal{E}(X)$ を X の自己ホモトピー同値写像の表わすホモトピー類全体の作る群とする (空間はすべて基点をもつ CW 複体とし、写像、ホモトピーはすべて基点を保つものとする)。 X を H 空間, $m: X \times X \rightarrow X$ をその積とし ($m|_{X \times *} = 1 = m|_{* \times X}$ in $[X, X]$), $X = (X, m)$ で表わすことにする。 H 空間 (X, m) から (X, m) への H 写像であるホモトピー同値写像 (H-equivalence) の表わすホモトピー類全体の作る $\mathcal{E}(X)$ の部分群を $\mathcal{E}_H(X) = \mathcal{E}_H(X, m)$ とする。

$\{X_n, f_n: X \rightarrow X_n, p_n: X_n \rightarrow X_{n-1}\}$ を H 空間 X の Postnikov 分解とするとき (すなわち, $\pi_i(X_n) = 0$ ($i > n$), $f_{n*}: \pi_i(X) \cong \pi_i(X_n)$ ($i \leq n$), $p_n f_n = f_{n-1}$ in $[X, X_{n-1}]$, $K(\pi_n(X), n) \xrightarrow{i_n} X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1}$; ファイバー空間), よく知られているように, X_n は p_n, f_n, i_n を H 写像とする H 空間になる。このとき,

$\mathcal{E}(X_n)$ について Y. Nomura [4] による次の結果がある。

定理 1 (Y. Nomura [4, Th 2.1, 2.9]) X を単連結な H 空間とし, $\{X_n, f_n, p_n\}$ を Postnikov 不変量 $\{k^{n+1}\}$ をもつた X の Postnikov 分解とする. このとき, 次の完全系列を得る.

$$0 \longrightarrow H_n \longrightarrow \mathcal{E}(X_n) \longrightarrow G_n \longrightarrow 1.$$

$$\text{ここで } H_n = p_n^* H^n(X_{n-1}; \pi_n(X)) / (\Omega k^{n+1})_* [X_n, \Omega X_{n-1}]$$

$$G_n = \{(h, \varepsilon) \in \mathcal{E}(X_{n-1}) \times \mathcal{E}(K(\pi_n(X), n+1)),$$

$$k^{n+1}h = \varepsilon k^{n+1} \text{ in } H^{n+1}(X_{n-1}; \pi_n(X))\},$$

$p_n^*: H^n(X_{n-1}; \pi_n(X)) \longrightarrow H^n(X_n; \pi_n(X))$ はいつも単射である.

ここでは, この定理を基礎にして $\mathcal{E}_H(X)$ を $X = SU(3), U(3)$ 及び $Sp(2)$ に対して計算するのが目的である.

§ 2. $\mathcal{E}_H(X)$ と $\mathcal{E}_H(X_n)$ との関係

$\{X_n, f_n, p_n\}$ を X の Postnikov 分解とすると, X_n の cell 構造は次で与えられる.

$$(2.1) \quad X_n = X \cup (\cup_{\alpha} e_{\alpha}^{n+2}) \cup (\cup_{\beta} e_{\beta}^{n+3}) \cup \dots$$

X を H 空間とすると, X_n は自然に H 空間となり, 自然な準同型写像 $\varphi_n: \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X_n)$ ($\varphi_n(h)f_n = f_n h$) の制限として, 準同型写像

$$\hat{\varphi}_n: \mathcal{E}_H(X) \longrightarrow \mathcal{E}_H(X_n)$$

が定義できる. このとき, 次の結果を得る.

定理 2.2 X を l 次元 CW 複体でかつ H 空間とする.

(i) $n \geq l$ ならば $\hat{\varphi}_n$ は単射,

(ii) $n \geq 2l$ ならば $\hat{\varphi}_n$ は全射.

[証明] (i) [5, Lemma 7.1] より, $n \geq l$ のとき φ_n は同型写像であるから, (i) は明らかである.

(ii) (i) の場合と同様に φ_n ($n \geq 2l$) は同型写像であるから, 任意の元 $h \in \mathcal{E}_H(X_n)$ に対して, $f_n \bar{h} = h f_n$ を満たすある元 $\bar{h} \in \mathcal{E}(X)$ が存在する. f_n は H 写像であるから, $f_{n*} m(\bar{h} \times \bar{h}) = f_{n*} \bar{h} m$ を得る (m は X の積). また仮定 $n \geq 2l$ より $f_{n*} : [X \times X, X] \rightarrow [X \times X, X_n]$ は単射であるから, $\bar{h} \in \mathcal{E}_H(X)$ を得る. 証明終り

上の定理において, 一般には $\hat{\varphi}_n$ が $2l > n \geq l$ に対して同型写像にない例として次をきつ.

例 2.3 $X = S^l$ ($l = 3, 7$), $\{X_n\}$ を X の Postnikov 分解とする. このとき,

$$\mathcal{E}_H(X_n) = \begin{cases} \mathcal{E}(X) = \mathbb{Z}_2 & (l \leq n < 2l) \\ \mathcal{E}_H(X) = 1 & (2l \leq n) \end{cases}$$

[証明] $X_n \wedge X_n$ は $2l-1$ 連結であるから, $[X_n \wedge X_n, X_n] = 0$ ($l \leq n < 2l$). 従って, [6, Prop 2.7] より $\mathcal{E}_H(X_n) = \mathcal{E}(X_n) = \mathcal{E}(X) = \mathbb{Z}_2$ ($l \leq n < 2l$) を得る. また定理 2.2 より

り, $\varepsilon_H(X_n) = \varepsilon_H(X) = 1$ ($2 \leq n$) を得る. 証明終り

X, Y を 2 つの H 空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を H 写像とする.
 f によって誘導されたファイバー空間を $\Omega Y \xrightarrow{i} E_f \xrightarrow{p} X$,
 $l: E_f \times \Omega Y \rightarrow E_f$ をファイバー ΩY の作用とする. このとき,
 [2] より E_f は i, p, l を H 写像とする H 空間となる.

$$K: [E_f, \Omega Y] \longrightarrow [E_f, E_f]$$

を $\alpha \in [E_f, \Omega Y]$ に対して $K(\alpha) = l(1 \times \alpha)d$ (d は対角写像) で
 定義する. このとき, 直ちに $K(\alpha) = 1 + i\alpha$ であることがわか
 る.

補題 2.4 $(\Omega f)_*: [E_f \wedge E_f, \Omega X] \rightarrow [E_f \wedge E_f, \Omega Y]$ において
 $\text{Im}(\Omega f)_* = 0$ のとき, $\alpha \in [E_f, \Omega Y]$ に対して, α が H 写像で
 あることと $K(\alpha)$ が H 写像であることは同値である.

[証明] l は H 写像であるから, α が H 写像のとき,
 $K(\alpha)$ は H 写像となる.

逆に $K(\alpha)$ を H 写像とし, m_1 と m_2 をそれぞれ E_f と Y の上の
 ような積とする. このとき,

$$K(\alpha)m_1 = m_1 + i\alpha m_1, \quad m_1(K(\alpha) \times K(\alpha)) = m_1 + i m_2(\alpha \times \alpha)$$

であるから, $i\alpha m_1 = i m_2(\alpha \times \alpha)$ を得る. また仮定より

$i_*: [E_f \wedge E_f, \Omega Y] \rightarrow [E_f \wedge E_f, E_f]$ は単射であるから,
 α が H 写像となる. 証明終り

§ 3. $SU(3)$ の Postnikov 分解

$SU(3)$ の Postnikov 分解の計算に必要な $SU(3)$ のホモトピー群は M. Mimura and H. Toda [3] において与えられる.

$$S^3 \xrightarrow{i} SU(3) \xrightarrow{p} S^5$$

を主バンドルとする. このとき, 次の補題を得る.

補題 3.1 (M. Mimura and H. Toda [3]) $SU(3)$ のホモトピー群 $\pi_i(SU(3))$ ($i \leq 8$) は次の表で与えられる.

i	1, 2	3	4	5	6	7	8
$\pi_i(SU(3))$	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_3$	0	$\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_3$
生成元		$i_* l_3$		$[2l_5]$	$i_* w$		$[2l_7]l_5 + [d_7]$

ここに $[d]$ は $P_*[d] = d$ なる元を表わす.

この補題により, $SU(3)$ の Postnikov 分解 $\{X_n\}$ ($n \leq 8$) は次の図式で与えられることがわかる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_8 & \xrightarrow{p_8} & X_7 & \xrightarrow{p_7} & X_6 & \xrightarrow{p_6} & X_5 & \xrightarrow{p_5} & X_4 & \xrightarrow{p_4} & X_3 = K(\mathbb{Z}, 3) \\
 & & \downarrow k^9 & & & & \downarrow k^7 & & \downarrow k^6 & & \\
 & & K(\mathbb{Z}_{12}, 9) & & & & K(\mathbb{Z}_6, 7) & & K(\mathbb{Z}, 6) & &
 \end{array}$$

命題 3.2 上の図式において, $H^{n+1}(X_{n-1}; \pi_n(SU(3)))$ ($n \leq 8$) は次の表で与えられる.

n	1, 2, 3, 4	5	6	7	8
$H^{n+1}(X_{n-1}; \pi_n(SU(3)))$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_6	0	\mathbb{Z}_{12}

そして Postnikov 不変量 $\{k^{2m}\}$ はそれぞれに対応するコホモロジー群を生成する。

この命題は補題 3.1, (2.1) 及び Serre の完全系列を使うことにより得られる。

$C: SU(3) \rightarrow SU(3)$ と $V: SU(3) \rightarrow SU(3)$ をそれぞれ $C(\alpha) = \bar{\alpha}$ (α の共役行列), $V(\alpha) = \alpha^{-1}$ で定義されるホモトピー同値写像とし, $C_n = \varphi_n(C)$, $V_n = \varphi_n(V)$ とおく。また同型写像 $\varphi_8: E(SU(3)) \rightarrow E(X_8)$ によって, $\xi_n \in E(X_n)$ ($n \geq 8$) と $\xi \in E(SU(3))$ を次のように定義する。

$$\xi_8 = k(x), \quad \xi = \varphi_8^{-1}(\xi_8), \quad \xi_n = \varphi_n(\xi) \quad (n \geq 9).$$

ここに x は $H^8(X_8; \mathbb{Z}_2)$ の生成元とする。このとき, 命題 3.2 と定理 1 を繰返し使って, 帰納的に $E(X_n)$ を計算することにより次の命題を得る。

命題 3.3 $\{X_n\}$ を $SU(3)$ の Postnikov 分解とするとき,

$$(i) \quad E(X_n) = \mathbb{Z}_2 \quad (\text{生成元 } v_n) \quad (n = 3, 4),$$

$$(ii) \quad E(X_n) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \quad (\text{生成元 } v_n \text{ と } c_n) \quad (5 \leq n \leq 7),$$

$$(iii) \quad E(X_n) = D_{12} \times \mathbb{Z}_2 \quad (n \geq 8), \quad \text{ここに } D_{12} = D_{12}(\xi_n, v_n)$$

であり因子 \mathbb{Z}_2 は c_n で生成される。

(iv) $E(SU(3)) = D_{12} \times \mathbb{Z}_2$, ことに $D_{12} = D_{12}(\xi, v)$ であり因子 \mathbb{Z}_2 は c で生成される。

ここに $D_i(a, b)$ は $a^i = 1 = b^2$, $ab = ba^{-1}$ なる関係をもつ

た a, b で生成される位数 $2i$ の 2 面体群である。

§ 4. $SU(3)$ と $U(3)$ の H -equivalences

§ 3 で得られた $\mathcal{E}(X_n)$ に関する結果を使って, $\mathcal{E}(X_n)$ の部分群 $\mathcal{E}_H(X_n)$ を計算することにより, 次の主定理を得る。

定理 4.1 $\{X_n\}$ を特殊ユニタリ群 $SU(3)$ の Postnikov 分解とする。このとき,

- (i) $\mathcal{E}_H(X_n) = \mathbb{Z}_2$ (生成元 v_n) ($n = 3, 4$),
- (ii) $\mathcal{E}_H(X_5) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (生成元 v_5 と c_5),
- (iii) $\mathcal{E}_H(X_n) = \mathbb{Z}_2$ (生成元 c_n) ($n \geq 6$),
- (iv) $\mathcal{E}_H(SU(3)) = \mathbb{Z}_2$ (生成元 c).

定理 4.2 ユニタリ群 $U(3)$ に対して, $\mathcal{E}_H(U(3)) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ となる。

定理 4.2 は, $U(n)$ が $S^1 \times SU(n)$ と H -equivalence であり, [6, Example 3.12 (i)] より $\mathcal{E}_H(S^1 \times SU(n)) = \mathbb{Z}_2 \times \mathcal{E}_H(SU(n))$ であるから, 定理 4.1 より直ちに得られる。

[定理 4.1 の証明] $[X_n \wedge X_n, X_n] = 0$ ($n \leq 5$) であるから, [6, Prop 2.7] より $\mathcal{E}_H(X_n) = \mathcal{E}(X_n)$ となる。よって (i) と (ii) は命題 3.3 の (i) と (ii) より得られる。

明らかに $c \in \mathcal{E}_H(SU(3))$ であるから, すべての n に対して

$$(4.3) \quad c_n \in \mathcal{E}_H(X_n)$$

となる. $i: S^3 \rightarrow SU(3)$ を自然な包含写像とするとき, v_6 の定義より $v_6 f_6 i = -f_6 i$ となる. 今 $v_6 \in \mathcal{E}_H(X_6)$ と仮定すると, $-f_6 i$ が H 写像となり, 従って, $(f_6 i)_* \alpha = 0$ (in $[S^3 \times S^3, X_6]$) を得る. $\alpha = \alpha$ に $\alpha \in [S^3 \times S^3, S^3]$ は $\alpha(a, b) = a b a^{-1} b^{-1}$ (積は S^3 の canonical な積) で定義される写像の表わす類とする. $\pi: (S^3 \times S^3, S^3 \vee S^3) \rightarrow (S^6, *)$ を collapsing map とするとき, 次の可換図を得る.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_6(S^3) & \xrightarrow{i_*} & \pi_6(SU(3)) & \xrightarrow[\cong]{f_{6*}} & \pi_6(X_6) \\ \downarrow \pi^* & & & & \downarrow \pi^* \\ [S^3 \times S^3, S^3] & \xrightarrow{(f_6 i)_*} & & & [S^3 \times S^3, X_6] \end{array}$$

この図式において, $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}_{12}$, $\pi_6(SU(3)) = \mathbb{Z}_6$, 補題 3.1 より i_* は全射, π^* は両方共に単射である. また $\alpha \in \pi^*(\pi_6(S^3))$ である. 故に $(f_6 i)_* \alpha = 0$ より $\alpha = 0$ となる. これは I. M. James [1, p. 176] の結果に矛盾する. よって $v_6 \notin \mathcal{E}_H(X_6)$. 従って, 命題 3.3 の (ii) と (4.3) より (iii) の $n=6, 7$ の場合を得る.

$X_8 \wedge X_8$ は 5 連結で, $\pi_i(\Omega X_7) = 0$ ($i \geq 6$) であるから, $[X_8 \wedge X_8, \Omega X_7] = 0$ となる. よって補題 2.4 の仮定が $f = k^9$, $X = X_7$, $Y = K(\mathbb{Z}_{12}, 9)$ に対して満たされる. よって $d \in H^8(X_8; \mathbb{Z}_{12})$ に対して, d が H 写像であることと $k(d)$ が H 写像であることは同値である. よって $H^8(X_8; \mathbb{Z}_{12})$ は自明

でない原始的な元を含まないから，従って自明でない H 写像を含まない．故に次を得る．

$$(4.4) \quad K(\alpha) \notin \mathcal{E}_H(X_8) \quad (\alpha (\neq 0) \in H^8(X_8; \mathbb{Z}_{12}))$$

また K の定義より $K(\alpha) f_8 i = f_8 i$ ，従って $K(\alpha) v_8 f_8 i = -f_8 i$ となる．よって $v_6 \notin \mathcal{E}_H(X_6)$ の証明と同様の方法によつて

$$(4.5) \quad K(\alpha) v_8 \notin \mathcal{E}_H(X_8) \quad (\alpha \in H^8(X_8; \mathbb{Z}_{12}))$$

を得る．故に (4.3)，(4.4)，(4.5) 及び命題 3.3 の (iii) より (iii) の $n=8$ の場合を得る．また (4.3) より $\mathcal{E}_H(X_n)$ ($n \geq 9$) は自明でない元 c_n を含まないから，定理 2.2 の (i) より (iii) の $n \geq 9$ の場合を得る．(iv) も同様に得られる． 証明終り

§5. $Sp(2)$ の Postnikov 分解

$Sp(2)$ の Postnikov 分解の計算に必要な $Sp(2)$ のホモトピー群は M. Mimura and H. Toda [3] によつて与えられる．

$$S^3 \xrightarrow{i} Sp(2) \xrightarrow{p} S^7$$

を主バンドルとする．このとき，次の補題を得る．

補題 5.1 (M. Mimura and H. Toda [3]) $Sp(2)$ のホモトピー群 $\pi_i(Sp(2))$ ($i \leq 10$) は次の表で与えられる．

i	1, 2	3	4	5	6	7	8, 9	10
$\pi_i(Sp(2))$	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0	$\mathbb{Z}_8 + \mathbb{Z}_3 + \mathbb{Z}_5$
生成元		$i_* l_3$	$i_* \eta_3$	$i_* \eta_3^2$		$[l_2 l_7]$		$[V_7] + i_* d_2 + i_* d_{1,5}$

ここに $[d]$ は $p_*[d] = d$ なる元を表わす。

この補題により, $Sp(2)$ の Postnikov 分解 $\{X_n\}$ ($n \leq 10$) は次の図式で与えられることがわかる。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 X_{10} & \xrightarrow{p_{10}} & X_9 & \xrightarrow{p_9} & X_8 & \xrightarrow{p_8} & X_7 & \xrightarrow{p_7} & X_6 & \xrightarrow{p_6} & X_5 & \xrightarrow{p_5} & X_4 & \xrightarrow{p_4} & X_3 = K(\mathbb{Z}, 3) \\
 & & \downarrow f_9^{11} & & & & \downarrow f_8^8 & & & & \downarrow f_6^6 & & \downarrow f_5^5 & & \\
 & & K(\mathbb{Z}_{120}, 11) & & & & K(\mathbb{Z}, 8) & & & & K(\mathbb{Z}_2, 6) & & K(\mathbb{Z}_2, 5) & &
 \end{array}$$

命題 5.2 上の図式において, $H^{n+1}(X_{n+1}; \pi_n(Sp(2)))$ ($n \leq 10$)

は次の表で与えられる。

n	1, 2, 3	4	5	6	7	8, 9	10
$H^{n+1}(X_{n+1}; \pi_n(Sp(2)))$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}_{12}	0	\mathbb{Z}_{120}

そして Postnikov 不変量 $\{f_n^{n+1}\}$ はそれぞれ X_n の対応するコホモロジー群を生成する。

この命題は補題 5.1, (2.1) 及び Serre の完全系列を使うことにより得られる。

$v: Sp(2) \rightarrow Sp(2)$ を $v(d) = d^{-1}$ で定義されるホモトピー同値写像とし, $v_n = \varphi_n(v)$ とおく。また同型写像 $\varphi_{10}: E(Sp(2)) \rightarrow E(X_{10})$ によって, $\xi_n \in E(X_n)$ ($n \geq 10$) と

$\xi \in \mathcal{E}(Sp(2))$ を次のように定義する.

$$\xi_{10} = k(x), \quad \xi = \varphi_{10}^{-1}(\xi_{10}), \quad \xi_n = \varphi_n(\xi) \quad (n \geq 11).$$

ξ は $H^{10}(X_{10}; \mathbb{Z}_{120})$ の生成元とする. このとき, 命題 5.2 と定理 1 を繰返し使, て, 帰納的に $\mathcal{E}(X_n)$ を計算することにより次の命題を得る.

命題 5.3 $\{X_n\}$ を $Sp(2)$ の Postnikov 分解とするとき,

- (i) $\mathcal{E}(X_n) = \mathbb{Z}_2$ (生成元 v_n) ($3 \leq n \leq 9$),
- (ii) $\mathcal{E}(X_n) = D_{120}$ ($n \geq 10$), $\xi = \xi_n, v_n$ に $D_{120} = D_{120}(\xi_n, v_n)$,
- (iii) $\mathcal{E}(Sp(2)) = D_{120}$, $\xi = \xi, v$ に $D_{120} = D_{120}(\xi, v)$.

§ 6. $Sp(2)$ の H -equivalences

§ 5 で得られた $\mathcal{E}(X_n)$ に関する結果を使って $\mathcal{E}_H(X_n)$ を計算することにより, 次の主定理を得る.

定理 6.1 $\{X_n\}$ をシンプレクティック群 $Sp(2)$ の Postnikov 分解とする. このとき,

- (i) $\mathcal{E}_H(X_n) = \mathbb{Z}_2$ ($3 \leq n \leq 9$),
- (ii) $\mathcal{E}_H(X_n) = 1$ または \mathbb{Z}_2 ($10 \leq n \leq 13$),
- (iii) $\mathcal{E}_H(X_n) = 1$ ($n \geq 14$),
- (iv) $\mathcal{E}_H(Sp(2)) = 1$.

この定理の証明には次の命題を使う.

命題 6.2 $Sp(2)(5)$ を $Sp(2)$ の (5) における局所化とすると
 き, H 空間 $Sp(2)(5)$ の任意のループ積はホモトピー可換でな
 い. また $(X_n)(5)$ ($n \geq 14$) の $Sp(2)$ の canonical な積が
 誘導された積はホモトピー可換でない.

この命題の証明の概略は次の通りである.

$Sp(2)(5) = \Omega Y$ とおく. $E: S\Omega Y \rightarrow Y$ を evaluation
 map とする. このとき, ΩY のループ積がホモトピー可換
 であると仮定すると, J. D. Stasheff [7, Th. 1.10] により
 $EVE: S\Omega Y \vee S\Omega Y \rightarrow Y$ の拡張 $f: S\Omega Y \times S\Omega Y \rightarrow Y$ が存在す
 る. 従って次の可換な図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc} H^8(S\Omega Y; Z_5) & \xleftarrow{E^*} & H^8(Y; Z_5) & \xrightarrow{P^1} & H^{16}(Y; Z_5) \\ \downarrow \nabla^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ H^8(S\Omega Y \vee S\Omega Y; Z_5) & \xleftarrow{j^*} & H^8(S\Omega Y \times S\Omega Y; Z_5) & \xrightarrow{P^1} & H^{16}(S\Omega Y \times S\Omega Y; Z_5) \end{array}$$

\cong $j: S\Omega Y \vee S\Omega Y \rightarrow S\Omega Y \times S\Omega Y$ は包含写像, $\nabla: S\Omega Y \vee S\Omega Y$
 $\rightarrow S\Omega Y$ はおりたたみ写像. $H^8(S\Omega Y; Z_5) = Z_5$ の生成元を a
 とし, $b \in H^8(Y; Z_5)$ を $E^*(b) = a$ なる元とする. このとき,
 次のことがわかる (計算略).

$$f^* P^1(b) \neq 0, \quad P^1 f^*(b) = 0.$$

これは上の図式の可換性に矛盾する. 故に ΩY のループ積は
 ホモトピー可換でないことがわかる.

この命題の後半も同様の方法で証明される.

[定理 6.1 の証明] (i) 容易に $[X_n \wedge X_n, X_n] = 0$ ($3 \leq n \leq 9$) であることがわかるから, [6, Prop. 2.7] より $\varepsilon_H(X_n) = \varepsilon(X_n)$ を得る. 従って命題 5.3 の (i) より (i) を得る.

(ii) $Sp(2) = S^3 \cup e^7 \cup e^{10}$ であるから, $\Omega P_{10*}: [Sp(2) \wedge Sp(2), \Omega X_{10}] \rightarrow [Sp(2) \wedge Sp(2), \Omega X_9]$ は全射である. 従って, $\Omega P_{10*}: [X_{10} \wedge X_{10}, \Omega X_{10}] \rightarrow [X_{10} \wedge X_{10}, \Omega X_9]$ も全射である. よって補題 2.4 の仮定が $f = k''$, $X = X_{10}$, $Y = K(\Sigma_{120}, 11)$ に対して満たされる. よって (4.4) の証明と同様の方法により, 次を得る.

$$(6.3) \quad \xi_{10}^k \notin \varepsilon_H(X_{10}) \quad (0 < k < 120)$$

今, $\xi_n^k v_n \in \varepsilon_H(X_n)$ ($0 \leq k < 120$, $n \geq 10$) と仮定すると, $(\xi_n^k v_n) v_n = v_n (\xi_n^k v_n)$ となるから, 命題 5.3 の (ii) より $k = 0 \pmod{60}$ となる. よってこのことと (6.3) と命題 5.3 の (ii) より (ii) を得る.

(iii) 今 $\xi_n^k v_n \in \varepsilon_H(X_n)$ と仮定する. このとき, $k = 0 \pmod{60}$ であるから, $(\xi_n^k v_n)(5) = (v_n)(5)$ となることがわかる. 従って $(v_n)(5)$ は H 写像となる. とするがこのことは命題 6.2 の後半に矛盾する. 故に次を得る.

$$\xi_n^k v_n \notin \varepsilon_H(X_n) \quad (0 \leq k < 120, n \geq 14)$$

これと (6.3) と命題 5.3 の (ii) より (iii) を得る.

(iv) は (iii) と定理 2.2 より明らかである. 証明終り

参 考 文 献

- [1] I.M. James, On H-spaces and their homotopy groups, *Quart. J. Math.* 11 (1960), 161-179.
- [2] _____, On extensions of H-spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 105 (1962), 126-135.
- [3] M. Mimura and H. Toda, Homotopy groups of $SU(3)$, $SU(4)$ and $Sp(2)$, *J. Math. Kyoto Univ.* 3-2 (1964), 217-250.
- [4] Y. Nomura, Homotopy equivalences in a principal fibre space, *Math. Zeit.* 92 (1966), 380-388.
- [5] N. Sawashita, On the group of self-equivalences of the product of spheres, *Hiroshima Math. J.* 5 (1975), 69-86.
- [6] _____, On the self-equivalences of H-spaces, *J. Math. Tokushima Univ.* 10 (1976), 17-33.
- [7] J. D. Stasheff, On homotopy abelian H-spaces, *Proc. Camb. Soc.* 57 (1961), 734-745.