

例外リー群のル-7°空間の \mathbb{Z}_2 係数 homology

京大 理学部 小島一元

G が compact, connected simple Lie 群であるとき、そのル-7°空間 ΩG の homology の計算については R. Bott が generating variety と呼ばれる homogeneous space を用いる方法を示し [4] $Sp(n)$ を除く古典群について $H_*(\Omega G)$ を Hopf algebra として完全に決定した。最近 T. Watanabe はこの方法を例外 Lie 群 G_2, F_4 について用い、 $H_*(\Omega G)$, $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_p)$ ($p=2,3$) の Steenrod operation の dual operation を込めた意味での Hopf algebra structure を決定した。

一方、 $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_p)$ については Eilenberg-Moore spectral sequence を用いることにより、その ring structure を比較的容易に決定することができる。[7], [8]。そこで

問題 $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ を operational structure を込めた Hopf algebra として決定せよ。(G は E_6, E_7, E_8 の type をもつ simple Lie 群.)

ϕ が diagonal であるとき、 $\bar{\phi}(x) = \phi(x) - 1 \otimes x - x \otimes 1$ とおき $\mathbb{Z}_2^{i_*}$ を

$\langle S_2^i \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, S_2^i \beta \rangle$ ($\alpha \in H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, $\beta \in H_*(X; \mathbb{Z}_2)$, \langle, \rangle は Kronecker δ)

で定義される operation とするとき,

結果 適当な生成元を選べば,

$$(i) \quad H_*(\Omega E_6; \mathbb{Z}_2) = \Lambda(\chi_2) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_4, \chi_8, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{16}, \chi_{22}],$$

$$\bar{\Phi}(\chi_i) = 0 \text{ for } i = 2, 10, 14, 22. \quad \bar{\Phi}(\chi_4) = \chi_2 \otimes \chi_2,$$

$$\bar{\Phi}(\chi_8) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4,$$

$$\bar{\Phi}(\chi_{16}) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_4$$

$$+ \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_8 \otimes \chi_8,$$

$$S_2^2 \chi_4 = \chi_2, S_2^2 \chi_8 = \chi_2 \cdot \chi_4, S_2^4 \chi_8 = \chi_4, S_2^2 \chi_{10} = \chi_4^2, S_2^4 \chi_{14} = \chi_{10}, S_2^2 \chi_{16} = \chi_{14} + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8$$

$$S_2^4 \chi_{16} = \chi_4 \cdot \chi_8, S_2^8 \chi_{16} = \chi_8, S_2^2 \chi_{22} = \chi_{10}^2, S_2^8 \chi_{22} = \chi_{14}.$$

$$(ii) \quad H_*(\Omega E_7; \mathbb{Z}_2) = \Lambda(\chi_2, \chi_4, \chi_8) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{16}, \chi_{18}, \chi_{22}, \chi_{26}, \chi_{34}],$$

$$\bar{\Phi}(\chi_i) = 0 \text{ for } i = 2, 10, 14, 18, 22, 26, 34. \quad \bar{\Phi}(\chi_4) = \chi_2 \otimes \chi_2,$$

$$\bar{\Phi}(\chi_8) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4,$$

$$\bar{\Phi}(\chi_{16}) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_4$$

$$+ \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_8 \otimes \chi_8,$$

$$S_2^2 \chi_4 = \chi_2, S_2^2 \chi_8 = \chi_2 \cdot \chi_4, S_2^4 \chi_8 = \chi_4, S_2^4 \chi_{14} = \chi_{10}, S_2^2 \chi_{16} = \chi_{14} + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8,$$

$$S_2^4 \chi_{16} = \chi_4 \cdot \chi_8, S_2^8 \chi_{16} = \chi_8, S_2^2 \chi_{22} = \chi_{10}^2, S_2^8 \chi_{22} = \chi_{14}, S_2^4 \chi_{26} = \chi_{22}, S_2^2 \chi_{34} = \chi_{16}^2,$$

$$S_2^{16} \chi_{34} = \chi_{18}.$$

$$(iii) \quad H_*(\Omega E_8; \mathbb{Z}_2) = \Lambda(\chi_2, \chi_4, \chi_8, \chi_{14}) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_{16}, \chi_{22}, \chi_{26}, \chi_{28}, \chi_{34}, \chi_{38}, \chi_{46}, \chi_{58}],$$

$$\bar{\Phi}(\chi_i) = 0 \text{ for } i = 2, 14, 22, 34, 38, 46, 58. \quad \bar{\Phi}(\chi_4) = \chi_2 \otimes \chi_2,$$

$$\bar{\Phi}(\chi_8) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4,$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\chi_{16}) &= \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_4 \\ &\quad + \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_8 \otimes \chi_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{Z}_2}^2 \chi_4 &= \chi_2, S_{\mathbb{Z}_2}^2 \chi_8 = \chi_2 \cdot \chi_4, S_{\mathbb{Z}_2}^4 \chi_8 = \chi_4, S_{\mathbb{Z}_2}^2 \chi_{16} = \chi_4 + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8, S_{\mathbb{Z}_2}^4 \chi_{16} = \chi_4 \cdot \chi_8, \\ S_{\mathbb{Z}_2}^8 \chi_{16} &= \chi_8, S_{\mathbb{Z}_2}^8 \chi_{22} = \chi_{14}, S_{\mathbb{Z}_2}^4 \chi_{26} = \chi_{22}, S_{\mathbb{Z}_2}^2 \chi_{28} = \chi_{26}, S_{\mathbb{Z}_2}^2 \chi_{34} = \chi_{16}^2, S_{\mathbb{Z}_2}^4 \chi_{38} = \chi_{34}, \\ S_{\mathbb{Z}_2}^2 \chi_{46} &= \chi_{22}^2, S_{\mathbb{Z}_2}^8 \chi_{46} = \chi_{38}, S_{\mathbb{Z}_2}^2 \chi_{58} = \chi_{28}^2, \end{aligned}$$

但し、 χ_i は degree i の生成元を表わし、他の $S_{\mathbb{Z}_2}^{2^l}$ (生成元) はすべて 0。
 計算は G の 3-connective fibre space \widehat{G} および u の loop space $\Omega \widehat{G}$ を考えるとき、まず $H^*(\widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ は operation 付き Hopf algebra として完全に決定でき、 $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ から求めた $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ と Eilenberg-Moore spectral sequence を用いて比較すると $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ の operational structure がかなりわかり、これをもとにして $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ の diagonal structure をほとんど決めることができる。さらに $\Omega \widehat{G} \rightarrow \Omega G \rightarrow K(\mathbb{Z}_2)$ なる fibration を考えると $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ を operation 付き Hopf algebra として大略決定することができる。これをただけではわからない operation についてはさらに別の killing を考えることにより、および unstable homotopy theory を用いることにより決定可能である。ここで unstable homotopy theory を必要とする relation $S_{\mathbb{Z}_2}^2 \chi_{12} = \chi_{10}^2$ は次の Watanabe の結果から示される。

$H_*(\Omega F_4; \mathbb{Z}_2)$ (Watanabe) 適当に生成元を選べば

$$H_*(\Omega F_4; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\chi_2) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_4, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{22}]$$

$$\bar{\Phi}(\chi_i) = 0 \text{ for } i=2, 10, 14, 22, \quad \bar{\Phi}(\chi_4) = \chi_2 \otimes \chi_2$$

$$S_2^3 \chi_4 = \chi_2, S_2^2 \chi_{10} = \chi_4^2, S_2^4 \chi_{14} = \chi_{10}, S_2^8 \chi_{22} = \chi_{14}.$$

§ 1. 3-connective fibre space

G を compact connected simple Lie 群とすると次の結果はよく知られている。

Prop. 1.1 $\pi_0(G) = \pi_1(G) = \pi_2(G) = 0$ $\pi_3(G) \cong \mathbb{Z}$ より、また

Prop. 1.2 $\chi_3 \in H^3(G) \cong \mathbb{Z}$ を generator とするとき $\chi_3: G \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$ の homotopy fibre \tilde{G} は associative H-space \mathcal{Z} $i: \tilde{G} \rightarrow G$ なる inclusion および $i^* \chi_3$ は H-map.

$H^*(\tilde{G}; \mathbb{Z}_2)$ ($G = F_4, E_6, E_7, E_8$) は Kachi により計算されているがその基本となるのは $H^*(G; \mathbb{Z}_2)$ に関する Anaki および Shikata の結果である。[1], [2].

Theorem 1.3 $H^*(F_4; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_3]/(\alpha_3^4) \otimes \Lambda(S_2^2 \alpha_3, \alpha_{15}, S_2^8 \alpha_{15}),$

$$H^*(E_6; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_3]/(\alpha_3^4) \otimes \Lambda(S_2^2 \alpha_3, S_2^4 S_2^2 \alpha_3, \alpha_{15}, S_2^8 S_2^4 S_2^2 \alpha_3, S_2^8 \alpha_{15}),$$

$$H^*(E_7; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_3, S_2^2 \alpha_3, S_2^4 S_2^2 \alpha_3]/(\alpha_3^4, (S_2^2 \alpha_3)^4, (S_2^4 S_2^2 \alpha_3)^4)$$

$$\otimes \Lambda(\alpha_{15}, S_2^8 S_2^4 S_2^2 \alpha_3, S_2^8 \alpha_{15}, S_2^4 S_2^8 \alpha_{15}),$$

$$H^*(E_8; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_3, S_2^2 \alpha_3, S_2^4 S_2^2 \alpha_3, \alpha_{15}]/(\alpha_3^{16}, (S_2^2 \alpha_3)^8, (S_2^4 S_2^2 \alpha_3)^4, \alpha_{15}^8)$$

$$\otimes \Lambda(S_2^8 S_2^4 S_2^2 \alpha_3, S_2^8 \alpha_{15}, S_2^4 S_2^8 \alpha_{15}, S_2^2 S_2^4 S_2^8 \alpha_{15})$$

α_i は degree i の generator. Λ かもよく知られた inclusion

$F_4 \hookrightarrow E_6 \hookrightarrow E_7 \hookrightarrow E_8$ に関する \mathbb{Z}_2 本大基存群の中では totally non-homologous to zero になっている。以下では $S_2^j \alpha_k = \alpha_{j+k}$ と略記して表すことにする。

Theorem 1.4 (Thomas) $H^*(G; \mathbb{Z}_2)$ ($G = E_6, F_7, E_8$) $\cong S_2^2 \alpha_{15} = S_2^8 S_2^4 S_2^2 \alpha_3$.

$i: \tilde{G} \rightarrow G$ を fibre の inclusion とし $j: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ を group の inclusion $G \rightarrow G'$ から induce される Hopf-map とする。

Theorem 1.5 $H^*(F_4; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\gamma_8] \otimes \Delta(\gamma_9, \gamma_{11}, \gamma_{15}, \gamma_{23})$

$$H^*(E_6; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\gamma_{32}] \otimes \Delta(\gamma_9, \gamma_{11}, \gamma_{15}, \gamma_{17}, \gamma_{23}, \gamma_{33})$$

$$H^*(E_7; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\gamma_{32}] \otimes \Delta(\gamma_{11}, \gamma_{15}, \gamma_{19}, \gamma_{23}, \gamma_{27}, \gamma_{33}, \gamma_{35})$$

$$H^*(E_8; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\gamma_{15}, \gamma_{32}] / (\gamma_{15}^4) \otimes \Delta(\gamma_{23}, \gamma_{27}, \gamma_{29}, \gamma_{31}, \gamma_{35}, \gamma_{39}, \gamma_{47})$$

γ_i は degree i の generator, Δ は simple system を表わす。さらに $i^*(\alpha_{15}) = \gamma_{15}$, $i^*(\alpha_{23}) = \gamma_{23}$ (G が F_4, E_6, E_7, E_8) $i^*(\alpha_{27}) = \gamma_{27}$ ($G = E_7, E_8$) $i^*(\alpha_{29}) = \gamma_{29}$ ($G = E_8$) でありさらに同じ degree をもつ γ_i は j^* で対応している。

Theorem 1.6 $S_2^4 \gamma_{11} = \gamma_{15}$. これは H. Kachi [5] の中で示された。

Prop. 1.7 Theorem 1.5 の γ_i はすべて primitive にとれる。

(*) 1511 は $G = E_8$ のとき $\overline{\phi}(\gamma_i) = 0$, $i \neq 47$ は次元の関係より明らか。次元の理由により $\overline{\phi}(\gamma_{47}) = a \gamma_{15} \otimes \gamma_{32} + b \gamma_{32} \otimes \gamma_{15}$ である。 $(S_2 \otimes S_2) \overline{\phi} = \overline{\phi} \circ S_2$ 存のて $\overline{\phi}(S_2^2 \gamma_{47}) = a \gamma_{23} \otimes \gamma_{32} + b \gamma_{32} \otimes \gamma_{23}$ とこの次元の理由により $S_2^2 \gamma_{47} = c \gamma_{23} \gamma_{32}$ だから $a = b = c$ かつ γ_{47} とし $\gamma_{47} + c \gamma_{15} \gamma_{32}$ ととればこれは primitive. 他の場合にも同様にして決めることができる。■

Prop. 1.8 Theorem 1.5 で Δ は Δ とかきなおせる。

これは前 Prop. より容易にわかる。

Prop. 1.9 Theorem 1.5 の F_i は universally transgressive.

$$\textcircled{1} \text{ 実際 } H^*(BF_4; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\beta_9, \beta_{10}, \beta_{12}, \beta_{16}, S_2^8 \beta_9, \beta_{24}, S_2^{16} S_2^8 \beta_9, \dots],$$

$$H^*(BE_6; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\beta_{10}, \beta_{12}, \beta_{16}, \beta_{24}, \beta_{32}, \beta_{34}, S_2^{32} \beta_{33}, S_2^{64} S_2^{32} \beta_{33}, \dots],$$

$$H^*(BE_7; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\beta_{12}, \beta_{16}, \beta_{20}, \beta_{24}, \beta_{28}, \beta_{32}, \beta_{34}, \beta_{36}, S_2^{32} \beta_{33}, \dots],$$

$$H^*(BE_9; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\beta_{16}, \beta_{24}, \beta_{28}, \beta_{32}, \beta_{34}, \beta_{36}, \beta_{38}, \beta_{40}, \beta_{48}, S_2^{32} \beta_{33}, \dots],$$

よって Comparison theorem を用いて 1) を 明かす。

Prop 1.10 Theorem 1.5 に おいて

$$(i) H^*(F_4; \mathbb{Z}_2) \tau(S_2^1 \partial_8 = \partial_9, S_2^2 \partial_9 = \partial_{11}, S_2^1 \partial_{15} = 0)$$

$$(ii) H^*(E_6; \mathbb{Z}_2) \tau(S_2^2 \partial_9 = \partial_{11}, S_2^8 \partial_9 = \partial_{17}, S_2^2 \partial_{15} = 0, S_2^{16} \partial_{17} = \partial_{33}, S_2^1 \partial_{32} = \partial_{33},$$

$$(iii) H^*(E_7; \mathbb{Z}_2) \tau(S_2^8 \partial_{11} = \partial_{19}, S_2^4 \partial_{15} = 0, S_2^4 \partial_{19} = 0, S_2^{16} \partial_{19} = \partial_{35}, S_2^8 \partial_{27} = 0,$$

$$S_2^1 \partial_{32} = \partial_{33}, S_2^2 \partial_{33} = \partial_{35}.$$

$$(iv) H^*(E_9; \mathbb{Z}_2) \tau(S_2^{16} \partial_{23} = 0, S_2^8 \partial_{27} = 0, S_2^1 \partial_{29} = \partial_{15}^2, S_2^4 \partial_{29} = 0, S_2^1 \partial_{32} = \partial_{33}$$

$$S_2^2 \partial_{33} = \partial_{35}, S_2^4 \partial_{35} = \partial_{39}, S_2^8 \partial_{39} = \partial_{47}.$$

$\textcircled{1}$ 証明の方では τ のみ述べていると、まず E_8 に おいて fibration

$E_8 \rightarrow E_8 \xrightarrow{p} K(\mathbb{Z}, 3)$ の \mathbb{Z}_2 -cohomology Serre spectral sequence を考える。

Theorem 1.5 と Prop. 1.9 より 明かかに $\tau(\partial_i) = 0$ for $i = 15, 23, 27, 29, \tau(\partial_{15}^2) = 0$

同様に $\tau(\partial_i) \neq 0$ for $i = 32, 33, 35, 39, 47$ 。一方 $H^*(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[v_3, S_2^2 v_3,$

$S_2^4 S_2^2 v_3, S_2^8 S_2^4 S_2^2 v_3, \dots]$ だから 明かかに $p^* v_3 = d_3 \tau$ あり transgression τ

kill する τ による元は $H^*(E_8; \mathbb{Z}_2)$ の relation に 対応する $v_3^{16}, (S_2^2 v_3)^8,$

$(S_2^4 S_2^2 v_3)^4, (S_2^8 S_2^4 S_2^2 v_3)^2, \text{ と } S_2^{16} S_2^8 S_2^4 S_2^2 v_3$ 。よって $\tau(\partial_{32}) = S_2^{16} S_2^8 S_2^4 S_2^2 v_3,$

$\tau(\partial_{33}) = (S_2^8 S_2^4 S_2^2 v_3)^2, \tau(\partial_{35}) = (S_2^4 S_2^2 v_3)^4, \tau(\partial_{39}) = (S_2^2 v_3)^8, \tau(\partial_{47}) = v_3^{16}$

あとは Adem relation $\tau \circ S_2^i = S_2^i \circ \tau$ によつて結果をうる。 $\widehat{G} = E_7$ のときはこの結果と naturality により $S_2^1 \partial_{32} = \partial_{33}, S_2^2 \partial_{33} = \partial_{35}, S_2^4 \partial_5 = 0, S_2^8 \partial_{27} = 0$ などが得られ他のものについで \widehat{E}_8 のときと同様にすべし。 $\widehat{E}_6, \widehat{F}_4$ のときも同様。 ■

$H^*(\widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ ($G = F_4, E_6, E_7, E_8$) は Prop. 1.7 により primitively generated. S_2^i は primitivity を保つた Steenrod algebra の構造より $H^*(\widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ の operational structure を完全に決めるためには S_2^i (generator) を決めればよいので Theorem 1.6 と Prop. 1.10 によつて決まる。

§ 2. $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2), H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$

ΩG は homotopy commutative H-space であり従つて $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ は可換環である。 Bott によりさらに $H_*(\Omega G)$ が even で free しかなく wlog とし有限生成であることが示すことができる。 Borel の定理により $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2) \cong (\otimes_{i \in I} A_i) \otimes (\otimes_{j \in J} B_j) \otimes (\otimes_{k \in K} C_k), A_i \cong \Lambda(x_i), B_i \cong \mathbb{Z}_2[\theta_j]/(\theta_j^{2^j}), C_k \cong \mathbb{Z}_2[\xi_k]$ I, J, K は finite set. すると $\text{Ext}_{H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong (\otimes_{i \in I} \mathbb{Z}_2[sx_i]) \otimes (\otimes_{j \in J} (\Lambda(s\theta_j) \otimes \mathbb{Z}_2[\theta_j])) \otimes (\otimes_{k \in K} \Lambda(s\xi_k))$ ここで $s\alpha$ は $\text{bideg} = (1, \text{deg } \alpha)$, θ_j は $\text{bideg} = (2, 2^j \text{deg } \theta_j)$ なる元。

さて ΩG の Eilenberg-Moore spectral sequence は Hopf algebra spectral sequence に存する。 すなわち各 E_n term は bigraded, bi commutative, bi associative Hopf algebra であり d_n は derivative か coderivative. また各 $s\alpha, \theta_j$ は primitive (E_2 -term) であり E_2 -term, E_∞ -term の Hopf algebra structure は geometric に定義されたものと compatible.

Theorem 2.1 $H_*(\Omega F_4; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\chi_2) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_4, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{22}]$,

$$H_*(\Omega E_6; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\chi_2) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_4, \chi_8, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{16}, \chi_{22}]$$

$$H_*(\Omega E_7; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\chi_2, \chi_4, \chi_8) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{16}, \chi_{18}, \chi_{22}, \chi_{26}, \chi_{34}]$$

$$H_*(\Omega E_8; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\chi_2, \chi_4, \chi_8, \chi_{14}) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_{16}, \chi_{22}, \chi_{26}, \chi_{28}, \chi_{34}, \chi_{38}, \chi_{46}, \chi_{58}]$$

χ_i は degree i の generator.

① 証明の大略のみ述べる。 $H_*(\Omega G; \mathbb{Q})$ を考之ると、

$$H_*(\Omega F_4; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\chi_2, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{22}]$$

$$H_*(\Omega E_6; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\chi_2, \chi_8, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{16}, \chi_{22}]$$

$$H_*(\Omega E_7; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\chi_2, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{18}, \chi_{22}, \chi_{26}, \chi_{34}]$$

$$H_*(\Omega E_8; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\chi_2, \chi_{14}, \chi_{22}, \chi_{26}, \chi_{34}, \chi_{38}, \chi_{46}, \chi_{58}]$$

が知られてゐる。今、 $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ に $\chi^{2^h} = 0$ なる type の relation があると $H_*(\Omega G; \mathbb{Q})$ が polynomial ならば $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ に $2^h \cdot \deg \chi$ の degree を $\neq 0$ indecomposable element があるはず。よって $H^*(G; \mathbb{Z}_2)$ に degree $4k+1$ の indecomposable element を得る。逆は $H^*(G; \mathbb{Z}_2)$ に degree $4k+1$ の indecomposable element があったとすると再び spectral sequence 中の Hopf algebra structure を用いることにより χ の filtration degree 1 の元に対応して $H_*(\Omega G; \mathbb{Q})$ をみると $G = E_6$ の χ_8, χ_{16} 以外は $(4k+2) \dim$ の $\neq 0$ の χ があるから $H^*(G; \mathbb{Z}_2)$ の $4k+1 \dim$ の indecomposable elem. は $H^*(E_6; \mathbb{Z}_2)$ の α_4, α_8 を除いて $H^*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ の relation に対応して α_4, α_8 が $S\chi_8, S\chi_{16}$ に対応してゐることから

易にわかる。これによって結果を得る。cf. T. Petrie [7]. ■

次に $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ を求める。Borel の定理により, χ_i の dual element を χ_i^* と書くとき,

$$H^*(\Omega G; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\chi_i^*] / (\chi_i^{*2^p}) \otimes A \quad \text{の形をしていりか,}$$

$H^2(\Omega G) \cong \mathbb{Z}$ の generator を表わす map を $f: \Omega G \rightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$ とし $H_*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(u_2, u_4, \dots, u_{2^k}, \dots)$ (ここで u_{2^k} は v_2 が $H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}_2)$ の 2 次元の generator であるとき v_2^k の dual を表わす。) とするとき,

Lemma 2.2 Theorem 2.1 で $\chi_{2^k} \in H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ を次の式をみたすようにとれる:

$$f_* \chi_{2^k} = u_{2^k} \quad \text{for } G = F_4, k=1, 2, \text{ or } G = E_6, E_7, E_8, k=1, 2, 3, 4.$$

① 例えは $K(\mathbb{Z}, 2)$ の Bilenberg-Moore s.s. と ΩG のと本とを比較す本はよい。■

によれば $G = F_4$ のとき $p \geq 2$, $G = E_6, E_7, E_8$ のとき $p \geq 4$ がわかる。

よるが例えは $G = F_4$ のとき $p \geq 3$ とすると $\chi_{2^2}^* \neq 0$ この元は

$H^*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ の primitive (したがって $\mathbb{Z} \otimes H_4(\Omega F_4; \mathbb{Z}_2)$ に 8 次元の non zero

element を得るか) 本は Theorem 2.1 に反す。同様にして $G = E_6, E_7,$

E_8 のときは $p=4$ であることが示す。

ここで $S^1 \rightarrow \Omega G \rightarrow \Omega G$ なる fibration を用いれば Gysin sequence より 明らかに結果を得ることができ;

$$\text{Prop. 2.3} \quad H_*(\Omega F_4; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\mathbb{Z}_7) \otimes \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}],$$

$$H_*(\Omega \widehat{E}_6; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\mathbb{Z}_{31}) \otimes \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_{22}, \mathbb{Z}_{32}],$$

$$H_*(\Omega \widehat{E}_7; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\mathbb{Z}_{31}) \otimes \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{18}, \mathbb{Z}_{22}, \mathbb{Z}_{26}, \mathbb{Z}_{32}, \mathbb{Z}_{34}],$$

$$H_*(\Omega \widehat{E}_8; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{31}) \otimes \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_{22}, \mathbb{Z}_{26}, \mathbb{Z}_{28}, \mathbb{Z}_{32}, \mathbb{Z}_{34}, \mathbb{Z}_{38}, \mathbb{Z}_{46}, \mathbb{Z}_{58}]$$

⊙ 先程の Gysin sequence により Λ を Δ でかきかえた結果は明らかである。もし $\mathbb{Z}_7 \neq 0$ in $H_*(\Omega F_4; \mathbb{Z}_2)$ ならば“次元の理由で” $\mathbb{Z}_7^2 = \mathbb{Z}_{14}$ $\Omega i: \Omega \widehat{G} \rightarrow \Omega G$ を考えたと $\Omega i_* \mathbb{Z}_7 = 0, \Omega i_* \mathbb{Z}_{14} = \chi_{14}$ よりこれはありえない。 $\mathbb{Z}_{31}^2 = 0$ in $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ for $G = E_6, E_7, E_8, \mathbb{Z}_{14}^2 = 0$ in $H_*(\Omega \widehat{E}_8; \mathbb{Z}_2)$ も同様により naturalty からわかる。 ■

この証明はさらに次のことを示している。

Prop. 2.4 Theorem 2.1 および Prop. 2.3 において

$$(i) G = F_4, \Omega i_* \mathbb{Z}_7 = 0, \Omega i_* \mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_4^2, \Omega i_* \mathbb{Z}_{10} = \chi_{10}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{14} = \chi_{14}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{22} = \chi_{22},$$

$$(ii) G = E_6, \Omega i_* \mathbb{Z}_{31} = 0, \Omega i_* \mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_4^2, \Omega i_* \mathbb{Z}_{10} = \chi_{10}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{14} = \chi_{14}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{16} = \chi_{8}^2,$$

$$\Omega i_* \mathbb{Z}_{22} = \chi_{22}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{32} = \chi_{16}^2$$

$$(iii) G = E_7, \Omega i_* \mathbb{Z}_{31} = 0, \Omega i_* \mathbb{Z}_{10} = \chi_{10}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{14} = \chi_{14}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{18} = \chi_{18}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{22} = \chi_{22},$$

$$\Omega i_* \mathbb{Z}_{26} = \chi_{26}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{32} = \chi_{16}^2, \Omega i_* \mathbb{Z}_{34} = \chi_{34}.$$

$$(iv) G = E_8, \Omega i_* \mathbb{Z}_{14} = \chi_{14}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{31} = 0, \Omega i_* \mathbb{Z}_{22} = \chi_{22}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{26} = \chi_{26}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{28} = \chi_{28},$$

$$\Omega i_* \mathbb{Z}_{32} = \chi_{16}^2, \Omega i_* \mathbb{Z}_{34} = \chi_{34}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{38} = \chi_{38}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{46} = \chi_{46}, \Omega i_* \mathbb{Z}_{58} = \chi_{58}$$

と (2) かつ (1)。

次に $\Omega \widehat{G}$ に對する Eilenberg-Moore spectral sequence を考えたと
明らか:

Prop 2.5 Theorem 2.1 & Prop. 2.3 にあ. 1) σ は homology suspension χ^* を χ の dual element とする.

$$(i) \sigma(z_7) = \gamma_8^*, \sigma(z_8) = \gamma_9^*, \sigma(z_{10}) = \gamma_{11}^*, \sigma(z_{14}) = \gamma_{14}^*, \sigma(z_{22}) = \gamma_{22}^* \text{ for } G = F_4.$$

$$(ii) \sigma(z_{31}) = \gamma_{32}^*, \sigma(z_8) = \gamma_9^*, \sigma(z_{10}) = \gamma_{11}^*, \sigma(z_{14}) = \gamma_{15}^*, \sigma(z_{16}) = \gamma_{17}^*, \sigma(z_{22}) = \gamma_{23}^*$$

$$\sigma(z_{32}) = \gamma_{33}^*, \text{ for } G = E_6.$$

$$(iii) \sigma(z_{31}) = \gamma_{32}^*, \sigma(z_{10}) = \gamma_{11}^*, \sigma(z_{14}) = \gamma_{15}^*, \sigma(z_{18}) = \gamma_{19}^*, \sigma(z_{22}) = \gamma_{23}^*, \sigma(z_{26}) = \gamma_{27}^*,$$

$$\sigma(z_{32}) = \gamma_{33}^*, \sigma(z_{34}) = \gamma_{35}^* \text{ for } G = E_8.$$

$$(iv) \sigma(z_{14}) = \gamma_{15}^*, \sigma(z_{31}) = \gamma_{32}^*, \sigma(z_{22}) = \gamma_{23}^*, \sigma(z_{26}) = \gamma_{27}^*, \sigma(z_{28}) = \gamma_{29}^*,$$

$$\sigma(z_{32}) = \gamma_{33}^*, \sigma(z_{34}) = \gamma_{35}^*, \sigma(z_{38}) = \gamma_{39}^*, \sigma(z_{46}) = \gamma_{47}^*$$

よく知られたように σ は Pontryagin product を annihilate する。
また $\sigma \circ S_2^i = S_2^i \circ \sigma$ であるから $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ における S_2^i operation が mod decomposable である。よって

Lemma 2.6 Prop. 2.3, 2.4, 2.5 にあ. 1) τ .

(i) $z_{22} \in \widehat{G} = F_4, \widehat{E}_6$, (ii) $z_{26}, z_{34} \in \widehat{G} = \widehat{E}_7$, (iii) $z_{26}, z_{46}, z_{58} \in \widehat{G} = \widehat{E}_8$ を primitive にとることからできる。

次元の関係により容易にわかるのでこの $z_{22}, z_{26}, z_{34}, z_{46}, z_{58}$ の選び方のもとで $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ の元を次のように定義する。

Definition. (i) $G = F_4$, $z_{14}' = S_2^8 * z_{22}$, $z_{10}' = S_2^4 * z_{14}$, $z_8' = S_2^2 * z_{10}'$, $z_7' = S_2^1 * z_8'$,

$$(ii) $z_{14}' = S_2^8 * z_{22}$, $z_{10}' = S_2^4 * z_{14}$, $z_8' = S_2^2 * z_{10}'$, $z_{16}' = S_2^{16} * z_{32}$,$$

$$(iii) $z_{22}' = S_2^4 * z_{26}$, $z_{14}' = S_2^8 * z_{22}'$, $z_{10}' = S_2^4 * z_{14}$, $z_{32}' = S_2^2 * z_{34}$, $z_{31}' = S_2^1 * z_{32}'$$$

$$z_{18}' = S_2^{16} * z_{34}.$$

$$(iv) \bar{z}_{22}' = S_2^4 * \bar{z}_{26}, \bar{z}_{14}' = S_2^8 * \bar{z}_{22}, \bar{z}_{38}' = S_2^8 * \bar{z}_{46}, \bar{z}_{34}' = S_2^4 * \bar{z}_{38}, \bar{z}_{32}' = S_2^2 * \bar{z}_{34}' \\ \bar{z}_{31}' = S_2^4 * \bar{z}_{32}' . (\text{Remark. この元の元は } \Omega_j \Omega_k \rightarrow \Omega_l \text{ として対応していろ。})$$

よって χ_i をうまくとれば Prop 2.3, Prop 2.4, Prop 2.5 が成立するよ
にして \bar{z}_i' を \bar{z}_i のかわりに使ってよいことがわかる。

Prop 2.7. Prop 2.3 で $H_*(\Omega E_6; \mathbb{Z}_2)$ の $\bar{z}_{16}, \bar{z}_{32}$ および $H_*(\Omega E_7; \mathbb{Z}_2)$ の
 \bar{z}_{28} 以外は primitive. さらに $\bar{\phi}(\bar{z}_{28}) = \bar{z}_{14} \otimes \bar{z}_{14}$.

① 上のことから $\bar{\phi}(\bar{z}_{28})$ のみ問題であるが $S_2^2 * \bar{z}_{28} = \bar{z}_{26} + \text{decomposable}$
であり 26-次元には decomposable が存在することから $S_2^2 * \bar{z}_{28} = \bar{z}_{26}$ かつ
よから $S_2^2 * S_2^4 * S_2^2 * \bar{z}_{28} = \bar{z}_{14}$ Adem relation により $S_2^{14} * \bar{z}_{28} = \bar{z}_{14}$ により $\bar{\phi}(\bar{z}_{28}) = \bar{z}_{14} \otimes \bar{z}_{14}$
は明らか。

また上のことと Prop. 2.4 を用いて naturality により

Prop 2.8 $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ での ring の generator χ_i を適当に選ぶと、

$$(i) G = F_4, \quad S_2^8 * \chi_{22} = \chi_{14}, S_2^4 * \chi_{14} = \chi_{10}, S_2^2 * \chi_{10} = \chi_4^2, S_2^2 * \chi_4 = \chi_2$$

$$(ii) G = E_6, \quad S_2^8 * \chi_{22} = \chi_{14}, S_2^8 * \chi_{16} = \chi_8, S_2^4 * \chi_{14} = \chi_{10}, S_2^2 * \chi_{10} = \chi_4^2, S_2^4 * \chi_8 = \chi_4, \\ S_2^2 * \chi_4 = \chi_2.$$

$$(iii) G = E_7, \quad S_2^2 * \chi_{34} = \chi_{16}^2, S_2^{16} * \chi_{34} = \chi_{18}, S_2^4 * \chi_{26} = \chi_{22}, S_2^8 * \chi_{22} = \chi_{14}, S_2^8 * \chi_{18} = \chi_{10}, \\ S_2^8 * \chi_{16} = \chi_8, S_2^4 * \chi_{14} = \chi_{10}, S_2^4 * \chi_8 = \chi_4, S_2^2 * \chi_4 = \chi_2.$$

$$(iv) G = E_8, \quad S_2^8 * \chi_{46} = \chi_{38}, S_2^4 * \chi_{38} = \chi_{34}, S_2^2 * \chi_{34} = \chi_{16}^2, S_2^2 * \chi_{28} = \chi_{26}, S_2^4 * \chi_{26} = \chi_{22}, \\ S_2^8 * \chi_{22} = \chi_{14}, S_2^8 * \chi_{16} = \chi_8, S_2^4 * \chi_8 = \chi_4, S_2^2 * \chi_4 = \chi_2.$$

また Prop. 2.7, Prop. 2.4 を用いて naturality により

Prop. 2.9 $\chi_4, \chi_8, \chi_{16}, \chi_{28}$ 以外は primitive 2"

$$\overline{\phi}(\chi_4) = \chi_2 \otimes \chi_2, \overline{\phi}(\chi_8) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4,$$

$$\overline{\phi}(\chi_{16}) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 + \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4$$

$$+ \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_4 + \chi_4 \otimes \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_8 \otimes \chi_8, \overline{\phi}(\chi_{28}) = \chi_{14} \otimes \chi_{14}$$

① Lemma 2.2 のあとで述べたことにより $\chi_4^* = (\chi_2^*)^2, \chi_8^* = (\chi_2^*)^4, \chi_{16}^* = (\chi_2^*)^8$ であるから最初の 3 つの formula が正しい。最後の 1 は明らか。

Prop. 2.10 $S_2^{2*} \chi_8 = \chi_2 \cdot \chi_8, S_2^{4*} \chi_{16} = \chi_4 \cdot \chi_8, S_2^{8*} \chi_{16} = \chi_{14} + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8$

① Prop 2.9 より E_8 で示せば充分であることがわかる。

$H^*(\Omega E_8; \mathbb{Z}_2) \cong \sum \mathbb{Z}_2[\chi_2^*] \otimes \Lambda(\chi_{14}^*)$ for $\dim \leq 16$ であり Thomas の結果と合致する結果である。

$H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ の operation を χ の χ を決定するには

S_2^{2*} (generator) を調べればよい。また調べておきたいのは、

$$S_2^{2*} \chi_{22} = \chi_{10}^2 \quad \text{in } H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2) \text{ for } G = F_4, E_6, E_7 \text{ あたり}$$

$$S_2^{2*} \chi_{44} = \chi_{22}^2, S_2^{2*} \chi_{78} = \chi_{28}^2 \quad \text{in } H_*(\Omega E_8; \mathbb{Z}_2)$$

最初に述べたように最後の 2 つは E_8 を $H^*(E_8; \mathbb{Z}_2)$ の元 α_{23} および α_{29} による χ killing した spaces を考えることで求まることになっている。これに関し 2 次の問題がある。

問題 適当な条件下で $0 \neq \chi \in H^n(X; \mathbb{Z}_2)$ s.t. $S_2^i \chi \neq 0$ と $(S_2^i \chi)^2 = 0$

とするとき $\exists z \in H^{2n-2}(\Omega X; \mathbb{Z}_2)$ s.t. $S_2^i z \neq 0$ (かつ $\overline{\phi}(z) = \chi \otimes \alpha$)

と存在するか。 Remark $\Omega \bar{X}$ が、あるならば \bar{X} の homology の状態がわか

かるといってこの問題はとけるが今の case には役立たず。

(ここで \bar{X} は $\alpha: X \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, n)$ の homotopy fibre.)

この場合すなわち $X = E_8, \chi = d_{23}, \text{ or } d_{29}$ のときにはこの問題はよく
 決る。 $S_2^1 d_{23} \neq 0, S_2^1 d_{29} \neq 0$ により \bar{X} は Kono [6] により、

Theorem 2.11. 適当な $\alpha_{15} \in H^{15}(E_8; \mathbb{Z}_2)$ を選ぶと、

$$\bar{\phi}(\alpha_{15}) = \alpha_3 \otimes \alpha_3^4 + \alpha_5 \otimes \alpha_5^2 + \alpha_9 \otimes \alpha_3^2, \quad \bar{\phi}(d_{23}) = \alpha_3 \otimes \alpha_5^4 + \alpha_5 \otimes \alpha_9^2 + \alpha_{15} \otimes \alpha_3^2$$

$$\bar{\phi}(d_{29}) = \alpha_5 \otimes \alpha_3^8 + \alpha_9 \otimes \alpha_5^4 + \alpha_{17} \otimes \alpha_3^4,$$

よって $\bar{\phi} \circ S_2^1 = (S_2^1 \otimes S_2^1) \circ \bar{\phi}$ より $\bar{\phi}(S_2^1 d_{23}) = \alpha_3^2 \otimes \alpha_9^2 + \alpha_9^2 \otimes \alpha_3^2,$

$$\bar{\phi}(S_2^1 d_{29}) = \alpha_3^2 \otimes \alpha_3^8 + \alpha_5^2 \otimes \alpha_5^4 + \alpha_9^2 \otimes \alpha_3^4 \quad \chi = 3 \text{ かつ } \alpha_3, \alpha_5, \alpha_9 \text{ は } \mathbb{Z}_2 \text{ により}$$

primitive であるから $\bar{\phi}(S_2^1 d_{23} - \alpha_3^2 \otimes \alpha_9^2) = \bar{\phi}(S_2^1 d_{29} - \alpha_{15}^2) = 0$ 24, 30次元の
 primitive element は存在し $S_2^1 d_{23} = \alpha_3^2 \otimes \alpha_9^2, S_2^1 d_{29} = \alpha_{15}^2$ である。すなわち先程

の \mathbb{Z}_2 の dual χ^* は χ と χ^* の場合に $\chi_{22}^2 \neq \text{indecomposable}$ or $\chi_{28}^2 \neq \text{indecomposable}$

よって χ_{22}^2 or $\chi_{28}^2, \chi_{22}, \chi_{28}$ の dual は χ_{22}^*, χ_{28}^* とすべし。これは primitive 元
 であるから, $S_2^2 \chi_{22}^*, S_2^2 \chi_{28}^* \neq \text{primitive}$ である。よって 24, 30次元の primitive

は存在しない。よって $\bar{\phi}(S_2^2 \chi) = 0$ かつ $\bar{\phi}(S_2^2 \chi)$ の dual
 は indecomposable. よって $H_*(\Omega E_8; \mathbb{Z}_2)$ の 46, 58 次元の indecompo-

sible elem. は $\chi_{46} + \text{dec.}, \chi_{58} + \text{dec.}$ である。よって $S_2^2 \chi_{58} = \chi_{22}^2$ or $S_2^2 \chi_{46} = \chi_{22}^2$
 かわかる。

最後の $S_2^2 \chi_{22} = \chi_{16}^2$ により $\bar{\chi}$ は essential には $S_2^2 \chi_{22} = 0$ とす
 べし。 $\begin{matrix} S_2^4 & S_2^8 \\ \circ & \circ & \circ \\ e_{10} & e_{14} & e_{22} \end{matrix}$ なる complex を \widehat{E}_6 あるいは ΩE_6 の \mathbb{Z}_2 係数
 cohomology をもとにして構成することかできるか。このよき
 complex の存在は Toda による球面の homotopy に矛盾するのを示す。

文中引用したreferenceの2を掲げ"付け".

- [1] S. Anaki. Cohomology modulo 2 of the compact exceptional groups, J. Math. Osaka Univ. 12 (1961), 43-65.
- [2] S. Anaki - Y. Shikata, Cohomology mod 2 of the compact exceptional group E_8 , Proc. Japan Acad, 57 (1961), 619-622.
- [3] R. Bott, An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), 251-281,
- [4] R. Bott, The space of loop on Lie groups, Mich. Math. J. 5 (1958) 35-61.
- [5] H. Kachi, Homotopy groups of compact Lie groups E_6, E_7 and E_8 , Nagoya Math. J. 32 (1968) 109-139.
- [6] A. Kono, Hopf algebra structure and cohomology operation of the mod 2 cohomology of exceptional Lie groups, Japanese J. Math,
- [7] T. Petrie The weakly complex bordism of Lie groups, Ann of Math. 88 (1968), 371-402.
- [8] M. Rothenberg - M. Steenrod The cohomology of the classifying spaces of H-spaces, Bull. American Math. Soc. 71 (1965) 872-875.
- [9] H. Toda. Composition methods in homotopy groups of spheres, Annals of Math. Studies 49, Princeton Univ. Press, 1962.
- [10] E. Thomas Exceptional Lie groups and Steenrod squares, Mich. Math. J. 11 (1964) 151-156.