数理解析研究所講究録
306巻 1977年 1-17

空間 $B_{p,\mu}(R^N)$ における跡作用素について

広島大 総合科　板野 暢之

$\mathcal{H}_{(m)}(R^N)$ はユークリッド空間 R^N での緩増加超関数 $u\in \mathcal{S}'(R^N)$ で，その Fourier 変換 $\hat{u}$ が局所可積分関数，かつ

$$\int_{\Xi^N} |\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^m d\xi<\infty$$

となる u 全体の作る空間である。これは temperate weight function μ として $(1+|\xi|^2)^{m/2}$ をとった場合の空間 $H^{\mu}(R^N)$ である。$\mathcal{H}_{(m,s)}(R^N)$ も $H^{\mu}(R^N)$ の特殊な場合であり，これらは偏微分方程式論でよく表われてくる基礎空間である。

$m>\frac{1}{2}$, l を $m-\frac{1}{2}$ より小さい最大整数とするとき，写像

$$\mathcal{H}_{(m)}(R^N)\ni u \longrightarrow \left(u(x';0),\cdots,\frac{\partial^l}{\partial x_N^l}u(x';0)\right)\in\prod_{j=0}^{l}\mathcal{H}_{(m-j-\frac{1}{2})}(R^{N-1})$$

は epimorphism であることが知られている。

ここでは，空間 $B_{p,\mu}(R^N)$ ($B_{2,\mu}(R^N)=H^{\mu}(R^N)$) において跡作用素を中心として研究し，超関数の乗法積，section との関係を明らかにしたい。とくに上記に対応する trace mapping が，epimorphism になる簡単な十分条件を求めたい。

R^N とその双対空間 Ξ^N の任意の点を $x=(x_1,\cdots,x_N)$, $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$

とし，そのスカラー積を $\langle x, \xi \rangle = \sum x_j \xi_j$，$x$ の長さを $|x| = (\sum |x_j|^2)^{1/2}$ とする。微分演算子 $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ に対し $D = (D_1, \cdots, D_N)$ とかき，多項式 $P(\xi) = \sum a_\alpha \xi^\alpha$ に対して $P(D) = \sum a_\alpha D^\alpha$，$\bar{P}(\xi) = \sum \bar{a}_\alpha \xi^\alpha$，$\tilde{P}_p(\xi) = \{\sum_{|\alpha| \geq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^p\}^{1/p}$ とおく。ここで $p \geq 1$，$P^{(\alpha)}(\xi) = i^{|\alpha|} D^\alpha P(\xi)$ である。

$\mathcal{S}(R^N)$ の任意の元 ϕ に対し，その Fourier 変換を

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{R^N} \phi(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$$

とし，$u \in \mathcal{S}'(R^N)$ の Fourier 変換は

$$\langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle u, \hat{\phi} \rangle, \qquad \phi \in \mathcal{S}(R^N)$$

で定義する。

Ξ^N 上で定義された正値連続関数 $\mu(\xi)$ が

$$\mu(\xi + \eta) \leq C(1 + |\xi|^k)\mu(\eta), \qquad \xi, \eta \in \Xi^N$$

をみたす定数 C，k が存在するとき，μ は temperate weight function と呼ばれる。μ_1, μ_2 が temperate weight function ならば，$\mu_1 + \mu_2$，$\mu_1\mu_2$，$1/\mu_1$ はまた temperate weight function である。$C_1 \leq \mu_1/\mu_2 \leq C_2$ なる定数 C_1, C_2 が存在するとき，μ_1, μ_2 は同値といって $\mu_1 \sim \mu_2$ と記す。

$1 \leq p \leq \infty$ とし，μ を temperate weight function とする。$u \in \mathcal{S}'(R^N)$ で $\hat{u}(\xi)$ が局所可積分な関数，かつ

$$\| u \|_{p,\mu} = \left(\frac{1}{(2\pi)^N} \int |\hat{u}(\xi)\mu(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} < \infty$$

となる u 全体の作る空間を $B_{p,\mu}(R^N)$ とする。$p = \infty$ のと

き，$\|u\|_{p,\infty}$ は $\mathrm{ess.sup}\,|\hat{u}(\xi)\mu(\xi)|$ とする。$p=2$ のとき $B_{2,\mu}(R^N)$ を $H^{\mu}(R^N)$ と記す。これらの空間の性質は L. Hörmander, L.R. Volevič - B.P. Panejah によってくわしく調べられている。$B_{p,\mu}(R^N)$ は Banach 空間で $\mathcal{S}(R^N) \subseteq B_{p,\mu}(R^N) \subseteq \mathcal{S}'(R^N)$ であり，$p<\infty$ の場合 $\mathcal{D}(R^N)$ が $B_{p,\mu}(R^N)$ で稠密で，$B_{p,\mu}(R^N)$ の strong dual $(B_{p,\mu}(R^N))'$ は $B_{p',1/\mu}(R^N)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$ である。以下 $1<p<\infty$ とする。

$u \in B_{p,\mu}(R^N)$，$\omega \in B_{p',1/\mu}(R^N)$ に対して

$$\langle \omega, \bar{u} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\Xi^N} \hat{\omega}\,\bar{\hat{u}}\,d\xi .$$

$N=n+m$ とし，$x=(x',t)$，$x'=(x_1,\cdots,x_n)$，$t=(t_1,\cdots,t_m)$，$\xi=(\xi',\tau)$，$\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_m)$，又 $D^\alpha = D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha''}$ と記す。Volevič - Panejah は μ が Ξ^{n+m} 上の temperate weight function のとき $\int_{\Xi^m}\mu(\xi',\tau)d\tau$ は Ξ^n の任意の点 ξ' で発散するか，又は任意の点 ξ' で収束するかのいづれかであり，収束するときは，Ξ^n 上の temperate weight function であることを証明した。

$\mathcal{D}(R^{n+m})$ の任意の元 $u(x)$ に対して $u(x',0) \in \mathcal{D}(R^n)$ を対応させる写像は連続である。$\mathcal{D}(R^{n+m})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で稠密である。もし $u \to u(x',0)$ が $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ から $\mathcal{D}'(R^{n+m})$ に連続的に拡張されるならば，この拡張された写像を trace mapping と呼び，u のこの写像による像を u の $t=0$ 上への

trace とよび $u(x';0)$ と記す。

これは，任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^n)$ に対して

$$\phi \otimes \delta \in B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$$

を意味することから，$B_{p,\mu}(R^N)$ の任意の元 u が trace $u(x';0)$ をもつための条件は $1/\mu(0,z) \in L^{p'}(R^m)$ である。

$\mathcal{S}(R^{n+m})$ の任意の元 u に対して

$$u(x';0)=\frac{1}{(2\pi)^{n+m}}\iint \hat{u}(\xi';z)e^{i\langle x',\xi'\rangle}d\xi'dz=\frac{1}{(2\pi)^{m}}\int \hat{u}_{\tau}(x';z)dz$$

より

$$\widehat{u(x';0)}=\frac{1}{(2\pi)^{m}}\int_{\Xi^m}\hat{u}(\xi';z)dz$$

を得る。又 多項式 $P(\xi)$ に対して $\tilde{P}_p(\xi)$ は一つの temperate weight function になることから

<u>定理 1.</u>　$P(\xi)=P(\xi';z)$ を non-trivial polynomial，μ を Ξ^{n+m} 上の temperate weight function とする。$B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の各元 u に対して R^n 上への trace $P(D)u(x';0)$ が存在するための条件は，次の条件 (1)，(2) のいずれかが成立することである。

(1) Ξ^n のある点 ξ' で $\dfrac{1}{\mu_{\tilde{P},p'}(\xi')}=\left\{\displaystyle\int_{\Xi^m}\frac{\tilde{P}_{p'}^{p'}(\xi';z)}{\mu^{p'}(\xi';z)}dz\right\}^{1/p'}<\infty.$

(2) Ξ^n の任意の点 ξ' で $\displaystyle\int_{\Xi^m}\frac{|P(\xi';z)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi';z)}dz<\infty.$

このとき，$P(D)u(x';0) \in B_{p,\mu_{\tilde{P},p'}}(R^n)$ である。

$B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元 u に対して $P(D)u(x';0) \in B_{p,\nu}(R^n)$ になるための条件は，次の条件 (1)'，(2)' のいずれかである。

(1)′ $\nu(\xi') \leqq C_1 \mu_{\tilde{P}, p'}(\xi')$.

(2)′ $$\nu^{p'}(\xi') \int_{\Xi^m} \frac{|P(\xi';\zeta)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi';\zeta)} d\zeta \leqq C_2.$$

証) $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の各元 u が trace $P(D)u(x';0)$ をもつと仮定する。任意の $\eta \in \Xi^{n+m}$ に対して写像 $u \longrightarrow e^{i\langle x,\eta\rangle} u$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ から $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ へ連続，また $P(D) e^{i\langle x,\eta\rangle} u = e^{i\langle x,\eta\rangle} P(D+\eta)$ より任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^n)$ に対し

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \longrightarrow \langle P(D+\eta)u(x';0), \phi\rangle = \langle u, \overline{P}(D+\eta)(\phi \otimes \delta)\rangle$$

は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ 上の continuous linear functional，即ち

$$\overline{P}(D+\eta)(\phi\otimes\delta) \in B_{p', 1/\mu}(R^{n+m}), \qquad \phi \in \mathcal{D}(R^n).$$

従って $\overline{P}(\xi+\eta)\hat{\phi}(\xi')/\mu(\xi) = \hat{\phi}(\xi') \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \overline{P}^{(\alpha)}(\xi)/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$. $\{\eta^\alpha\}$ は一次独立だから，各 α に対して $\hat{\phi}(\xi')\overline{P}^{(\alpha)}(\xi)/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$. 故に Ξ^n の a.e. の点 ξ' で $\int_{\Xi^m} \frac{\tilde{P}_{p'}^{p'}(\xi';\zeta)}{\mu^{p'}(\xi';\zeta)} d\zeta < \infty$. $\tilde{P}_{p'}$, μ は temperate weight function だから，この積分は，すべての点 $\xi' \in \Xi^{n+m}$ で存在し temperate weight function である。

(1) ⇒ (2) は明らかであるから (2) を仮定する。

$$\widehat{P(D)u(x';0)}(\xi') = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\Xi^m} P(\xi)\hat{u}(\xi) d\zeta, \qquad u \in \mathcal{D}(R^{n+m})$$

より，任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^n)$ に対して

$$|\langle P(D)u(x';0), \bar{\phi}\rangle| = \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \left| \int_{\Xi^{n+m}} P(\xi)\hat{u}(\xi)\bar{\hat{\phi}}(\xi') d\xi \right|$$

$$\leqq \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \left(\int_{\Xi^n} |\hat{\phi}(\xi')|^{p'} \left(\int_{\Xi^m} \frac{|P(\xi)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi)} d\zeta\right) d\xi'\right)^{1/p'} \left(\int_{\Xi^{n+m}} |\hat{u}(\xi)|^p \mu^p(\xi) d\xi\right)^{1/p}.$$

$P(\xi) = \sum_{|\alpha'|\geq 0} \frac{\xi'^{\alpha'}}{\alpha'!} P^{(\alpha')}(0,\zeta)$ と仮定から $\int_{\Xi^m} \frac{|P^{(\alpha')}(0,\zeta)|^{p'}}{\mu^{p'}(0,\zeta)} d\zeta < \infty$. さらに $\mu(0,\zeta) \leqq C(1+|\xi'|^k)\mu(\xi',\zeta)$ より

$$\int_{\Xi^m} \frac{|P^{(\alpha')}(0,\zeta)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi',\zeta)} d\zeta \leqq C^{p'}(1+|\xi'|^k)^{p'} \int_{\Xi^m} \frac{|P^{(\alpha')}(0,\zeta)|^{p'}}{\mu^{p'}(0,\zeta)} d\zeta .$$

従って $\int_{\Xi^m} \frac{|P(\xi)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi)} d\zeta$ は ξ' にかんして緩増加関数である．また $\mathcal{D}(R^{n+m})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で稠密だから $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の任意の元 u は trace $P(D)u(x';0)$ をもつ。

なお $\mathcal{D}(R^{n+m})$ の任意の元 u に対して

$$\|P(D)u(x';0)\|_{p,\mu_{\tilde{P},p'}} \leqq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m/p'} \|u\|_{p,\mu}$$

を示すことができる。このことから $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の任意の元 u に対して $P(D)u(x';0)$ は $B_{p,\mu_{\tilde{P},p'}}(R^n)$ に属することがわかる．

後半の証明も同様である．

<u>定理 2</u> $\frac{1}{\mu_{\tilde{P},p'}(\xi')} = \left\{\int_{\Xi^m} \frac{\tilde{P}_{p'}^{p'}(\xi';\zeta)}{\mu^{p'}(\xi';\zeta)} d\zeta\right\}^{1/p'} < \infty$ とする。写像

$$\tau : B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \longrightarrow P(D)u(x';0) \in B_{p,\mu_{\tilde{P},p'}}(R^n)$$

が epimorphism になるための条件は次の条件のいずれかである．

(1) ${}^t\tau$ の range が $B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$ で閉じている．

(2) $\frac{1}{\nu_{p'}(\xi')} = \left\{\int \frac{|P(\xi';\zeta)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi';\zeta)} d\zeta\right\}^{1/p'}$ が temperate weight function になる．

(3) $f(\xi')$ が Ξ^n の局所可積分関数で $f(\xi')\bar{P}(\xi)/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$ な

らば $f(\xi)/\mu_{\tilde{p},p'}(\xi) \in L^{p'}(\Xi^n)$ である.

このとき $\nu_{p'}(\xi) \sim \mu_{\tilde{p},p'}(\xi)$ である.

この定理から $P(\xi;\tau)$ が τ のみの多項式のとき

$$\frac{1}{\nu_{p'}(\xi)} = \left\{\int_{\Xi^m} \frac{|P(\tau)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi;\tau)} d\tau\right\}^{1/p'} < \infty$$

であれば, $\nu_{p'}$ は Ξ^n 上の temperate weight function になり, 写像 $u \longrightarrow P(D_t)u(x;0)$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ から $B_{p,\nu_{p'}}(R^n)$ への epimorphism である.

M を non-negative integer とし, $\int_{\Xi^m} \frac{|\tau|^{Mp'}}{\mu^{p'}(\xi;\tau)}d\tau < \infty$ とする.
non-negative integer k_j の組 $k=(k_1,\cdots,k_m)$ が $|k| \leqq M$ のとき

$$\frac{1}{\nu_{k,p'}(\xi)} = \left\{\int_{\Xi^m}\frac{|\tau^k|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi;\tau)}d\tau\right\}^{1/p'}$$

とおき, trace mapping τ :

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \longrightarrow \{D_t^k u(x;0)\}_{|k|\leqq M} \in \prod_{|k|\leqq M} B_{p,\nu_{k,p'}}(R^n)$$

を考える. ${}^t\tau$ は $H' = \prod_{|k|\leqq M} B_{p',1/\nu_{k,p'}}(R^n)$ から $B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$ への写像で $v=\{v_k\}_{|k|\leqq M} \in H'$ に対して

$$\widehat{{}^t\tau v}(\xi) = \sum_{|k|\leqq M}\hat{v}_k(\xi)\tau^k$$

となることから ${}^t\tau$ は injective であることがわかり, 次の結果を得る.

定理3. τ が epimorphism になるための条件は、${}^t\tau$ の range が $B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$ で閉じていることである。

定理4. $p=2$ のとき、τ が epimorphism になるための条件は次の条件のいずれかが成立することである。

(1). $\det|\chi_{k+\ell}| \geq C\prod_{|k|\leq M}\chi_{2k}$ ただし $\chi_k(\xi')=\int_{\Xi^m}\frac{\tau^k}{\mu^2(\xi';\tau)}d\tau$.

(2). $u\in H^{1/\mu}(R^{n+m})$ で、$\hat{u}(\xi)=\sum_{|k|\leq M} f_k(\xi')\tau^k$ ならば、すべての k に対して $f_k/\nu_{k,2}\in L^2(\Xi^n)$.

(3) $u\in H^{1/\mu}(R^{n+m})$ で、$\hat{u}(\xi)=\sum_{|k|\leq M} f_k(\xi')\tau^k$ ならば、$j=1,2,\cdots,m$ に対して

$$\hat{u}(\xi',\tau_1,\cdots,\tau_{j-1},\frac{\tau_j}{2},\tau_{j+1},\cdots,\tau_m)/\mu(\xi)\in L^2(\Xi^{n+m}).$$

$1<p<\infty$ なる任意の p に対し

定理5. 次の条件は同値である。

(1) $u\in B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$, $\hat{u}(\xi)=\sum_{|k|\leq M} f_k(\xi')\tau^k$ ならば すべての k に対して $f_k/\nu_{k,p'}\in L^{p'}(\Xi^n)$.

(2) $u\in B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$, $\hat{u}(\xi)=\sum_{|k|\leq M} f_k(\xi')\tau^k$ ならば $j=1,2,\cdots,m$ に対して

$$\hat{u}(\xi',\tau_1,\cdots,\tau_{j-1},\frac{\tau_j}{2},\tau_{j+1},\cdots,\tau_m)/\mu(\xi)\in L^{p'}(\Xi^{n+m}).$$

(3) $u\in B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$, $\hat{u}(\xi)=\sum_{|k|\leq M} f_k(\xi')\tau^k$ ならば、任意の整数 $i_j\geq 0$ に対して $\hat{u}(\xi',\frac{\tau_1}{2^{i_1}},\cdots,\frac{\tau_m}{2^{i_m}})\in L^{p'}(\Xi^{n+m})$.

このとき、上記 trace mapping τ は epimorphism である。

証) (1)⇒(2). (1) より $f_k/\nu_{k,p'} \in L^{p'}(\Xi^n)$. これは $f_k(\xi')z^k/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$ を意味する。$f_k(\xi')z^k/2^{k_j}\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$ を k について加えることにより $\hat{u}(\xi', z_1, \dots, \frac{z_j}{2}, \dots, z_m)/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$ を得る。

(2)⇒(3). (2) より $\hat{u}(\xi', z_1, \dots, \frac{z_j}{2}, \dots, z_m)/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$. また $\hat{u}(\xi', z_1, \dots, \frac{z_j}{2}, \dots, z_m) = \sum_{|k| \le M} f_k(\xi')z^k/2^{k_j}$ より $\hat{u}(\xi', z_1, \dots, \frac{z_j}{4}, \dots, z_m)/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$. これをくりかえすことにより (3) を得る。

(3)⇒(1). (3) より $\hat{u}(\xi', \frac{z_1}{2^{i_1}}, \dots, \frac{z_m}{2^{i_m}})/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$. $i_1, \dots, i_{m-1}$ を固定して i_m を $0, 1, \dots, M$ と動かすことにより、各 $j = 0, 1, \dots, M$ に対し

$$\sum_{k_1+\dots+k_{m-1} \le M-j} f_{k_1 \cdots k_{m-1}, j}(\xi')\left(\frac{z_1}{2^{i_1}}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{z_{m-1}}{2^{i_{m-1}}}\right)^{k_{m-1}} z_m^j/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m}).$$

この操作をくりかえして、$|k| \le M$ なるすべての k に対して $f_k(\xi')z^k/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$, すなわち $f_k/\nu_{k,p'} \in L^{p'}(\Xi^n)$ を得る。

(3) が成立するとき、${}^t\tau$ の range が $B_{p', 1/\mu}(R^{n+m})$ で閉じていることを示す。$\vec{v}^j = (v_k^j)_{|k| \le M} \in H' = \prod B_{p', 1/\nu_k}(R^n)$ に対し ${}^t\tau \vec{v}^j$ が $B_{p', 1/\mu}(R^{n+m})$ で u に収束するとする。即ち $\sum_{|k| \le M} \hat{v}_k^j(\xi')z^k/\mu$ は $L^{p'}(\Xi^{n+m})$ で $\hat{u}/\mu$ に収束する。μ は正値連続関数だから $\sum \hat{v}_k^j(\xi')z^k$ は $L^1_{loc}(\Xi^{n+m})$ で $\hat{u}$ に収束する。このことから $\hat{u} = \sum_{|k| \le M} \hat{v}_k(\xi')z^k$, $\hat{v}_k \in L^1_{loc}(\Xi^{n+m})$ と書かれる。(3) より $\hat{u}(\xi', \frac{z_1}{2^{i_1}}, \dots, \frac{z_m}{2^{i_m}})/\mu =$

$\sum \hat{v}_k(\xi')\left(\frac{\tau_1}{2^{i_1}}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\tau_m}{2^{i_m}}\right)^{k_m}/\mu \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$. $i_1,\cdots,i_{m-1}$ を固定して $i_m=0,1,\cdots,M$ と動かすことにより，各 $j=0,1,\cdots,M$ に対して

$$\sum_{k_1+\cdots+k_{m-1}\leq M-j} \hat{v}_k(\xi')\left(\frac{\tau_1}{2^{i_1}}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\tau_{m-1}}{2^{i_{m-1}}}\right)^{k_{m-1}}\tau_m^{\,j}/\mu \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$$

を得る．この操作をくりかえすことにより，$|k|\leq M$ なる k に対して $\hat{v}_k(\xi')\tau^k/\mu \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$ がわかる．$v_k=\mathcal{F}_{x'}^{-1}(\hat{v}_k(\xi'))$ と定義すれば $v_k \in B_{p',1/\nu_k}(R^n)$ となり u は τ の range に属する．

<u>系</u> μ が Ξ^{n+m} 上の temperate weight function で

$$\mu(\xi';\tau_1,\cdots,\tau_{j-1},2\tau_j,\tau_{j+1},\cdots,\tau_m)\geq C\mu(\xi';\tau),\ j=1,2,\cdots,m$$

をみたす定数 $C>0$ が存在すれば，trace mapping τ は epimorphism である．

次に $\prod_{|k|\leq M}B_{p,\nu_k}(R^n)$ の元を与えて，それを trace にもつ $u\in B_{p,\mu}(R^{n+m})$ を L. Hörmander の方法で構成する．

<u>定理 6.</u> $\prod_{|k|\leq M}B_{p,\nu_k}(R^n)$ の任意の元を $\vec{f}=(f_k(x'))_{|k|\leq M}$ とする．ψ を $\mathcal{D}(R^m)$ の元で 0 近傍で 1 に等しい任意の関数とする．temperate weight function $\mu(\xi';\tau)$ に対して

$$\mu(\xi';\lambda_k(\xi')\tau)\leq \lambda_k^{|k|+\frac{m}{p'}}(\xi')\,\nu_k(\xi')\,\Phi_k(\tau)$$

をみたす Ξ^n 上の正値連続関数 λ_k と，Ξ^n 上で緩増加な連続関数 $\Phi_k(\tau)$ が存在するとき，

$$\hat{u}_{x'}(\xi', t) = \sum_{|k|\leq M} \hat{f}_k(\xi') \frac{(it)^k}{k!} \psi(\lambda_k(\xi') t)$$

とおくと，$u \in B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で $|k| \leq M$ なる各 k に対して $D_t^k u(x', 0) = f_k(x')$ をみたす．

証）
$$\hat{u}(\xi', \tau) = \sum_{|k|\leq M} \frac{(-i)^{|k|}}{k!} \hat{f}_k(\xi') D_\tau^k \int_{\Xi^m} \psi(\lambda_k t) e^{-i\langle t, \tau\rangle} d\tau$$

$$= \sum_{|k|\leq M} \frac{(-i)^{|k|}}{k!} \hat{f}_k(\xi') \frac{1}{\lambda^{|k|+m}} D_\tau^k \hat{\psi}\left(\frac{\tau}{\lambda_k}\right)$$

より

$$\int_{\Xi^{n+m}} |\hat{u}\mu|^p d\xi \leq C \sum_{|k|\leq M} \int_{\Xi^n} \frac{1}{(k!)^p} |\hat{f}_k(\xi')|^p \frac{d\xi'}{\lambda_k^{p(|k|+m)-m}} \int_{\Xi^m} |D_\tau^k \hat{\psi}(\tau)|^p \mu^p(\xi', \lambda_k\tau) d\tau$$

$$\leq C \sum_{|k|\leq M} \int_{\Xi^n} \frac{1}{(k!)^p} |\hat{f}_k(\xi')|^p \nu_k^p(\xi') d\xi' \int_{\Xi^m} |D_\tau^k \hat{\psi}(\tau)|^p |\Phi_k(\tau)|^p d\tau.$$

ここで $D_\tau^k \hat{\psi}(\tau) \in \mathcal{S}(\Xi^m)$，$\Phi_k(\tau)$ は緩増加関数だから右辺の積分は収束する．u の作り方から $D_t^k u(x', 0) = f_k(x')$ は明らか．

trace mapping と他の概念との関係を調べてみる．

$u, v \in \mathcal{D}'(R^N)$ とする．R^N 上の任意の δ-列 $\{\rho_j\}$ に対して，超関数的極限 $\lim_{j\to\infty} (u * \rho_j) v$ が存在すれば，この極限は一意的にきまるから，これを u, v の strict sense の乗法積

とよび $u \cdot v$ とかく。このとき任意の δ-列 $\{\rho_j\}$ に対して $\lim_{j\to\infty} u(v*\rho_j)$ も存在し

$$\lim_{j\to\infty}(u*\rho_j)v = \lim_{j\to\infty} u(v*\rho_j) .$$

$\mathcal{D}(R^N)$ の元 ϕ が $\phi \geq 0$, $\int_{R^N}\phi\, dx = 1$ をみたすとき, $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ とおき, 上の $\{\rho_j\}$ の代りに $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ でおきかえたとき $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(u*\phi_\varepsilon)v$ が存在すれば weak sense の積とよび uv とかく。このとき $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は次の restricted δ-sequence によっておきかえられることが白石氏により示されている。restricted δ-seq. とは $\rho_j \in \mathcal{D}(R^N)$ で

(i) $\quad \operatorname{supp}\rho_j \to \{0\} \qquad (j\to\infty)$

(ii) $\quad \int \rho_j\, dx \to 1 \qquad (j\to\infty)$

(iii) $\quad \int |x|^{|k|}|D^k\rho_j(x)|\,dx \leq M_k$ (M_k は ρ_j に無関係な定数)

をみたす列である。

strict sense の場合も同様に論じられるので weak sense の場合に限って以下のべる。$w \in \mathcal{D}'(R^m)$, $u \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$ に対して部分積 wu は $(1\otimes w)u$ が存在するとき, これで定義する。$\delta \in \mathcal{D}'(R^m)$ とする。δu は R^m 上の任意の restricted δ-seq. $\{\rho_j\}$ に対して $\lim_{j\to\infty}(\delta*\rho_j)u$ または $\lim_{j\to\infty}\delta(u *_t \rho_j)$ として定義される。ここで $*_t$ は t にかんする partial convolution である。$\{\rho_j\}$ は上でのべた $\{\phi_\varepsilon(t)\}_{\varepsilon>0}$ でもおきかえられる。

S. Łojasiewicz は超関数に対し section の概念を導入した。$u \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$ が R^n 上に section $\in \mathcal{D}'(R^n)$ をもつとは，超関数的極限 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} u(x'; \varepsilon t)$ が存在し，t に無関係であることである。これは δu の存在と同値である。事実 u が R^n 上に section をもつことは，$\phi(t) \geq 0$，$\int_{R^m} \phi(t)dt = 1$ なる任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^m)$ に対して，超関数的極限 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \langle u, \phi_\varepsilon \rangle$ が存在し，ϕ に無関係にきまることである。$\langle u, \phi_\varepsilon \rangle \otimes \delta = \delta(u *_t \check{\phi}_\varepsilon)$ であるから section の存在は δu の存在と同値である。u の section を α とすると $\alpha = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \langle u, \phi_\varepsilon \rangle$ であり，また $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} u(x'; \varepsilon t) = \alpha \otimes 1_t$，$\delta u = \alpha \otimes \delta$ である。

<u>定理7</u>. 空間 $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ において次の条件は同値である。

(1) trace mapping $B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \to u(x'; 0) \in \mathcal{D}'(R^n)$ が存在する。

(2) $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元 u が section をもつ。

(2)' 条件 (2) が strict sense でいえる。

(3) $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元 u に対し，$\delta \in \mathcal{D}'(R^m)$ との乗法積 δu が存在する。

(3)' $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元 u に対し $\delta \cdot u$ が存在する。

(4) $\mathcal{D}(R^{n+m})$ のある δ-列 $\{\rho_j\}$ に対して $\lim\limits_{j\to\infty} (u * \rho_j)\delta$ が存在する。

(5) $\mathcal{D}(R^m)$ のある δ-列に対して $\lim\limits_{j\to\infty} \rho_j u$ が存在する。

証) (2), (3) の同値は既に注意した. 同様に (2)′, (3)′ も同値. (3)′ ⇒ (3), (3) ⇒ (4), (5) は定義より明らかだから (1) ⇒ (3)′, (4) ⇒ (1), (5) ⇒ (1) を証明すればよい.

(1) ⇒ (3)′. (1) を仮定すれば任意の $\psi \in \mathcal{D}(R^n)$ に対して $\psi \otimes \delta \in B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$. $u \in B_{p,\mu}(R^{n+m})$ とし, $\{\rho_j\}$ を R^{n+m} 上の任意の δ-列とする. $u*\rho_j$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で u に収束する. 任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ に対して等式

$$\langle (u*\rho_j)\delta, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle u*\rho_j, \phi(x',0)\otimes\delta \rangle_{B_{p,\mu}, B_{p',1/\mu}}$$

より $\lim_{j\to\infty}(u*\rho_j)\delta$ の存在がわかる. 即ち $\delta\cdot u$ が存在する.

(4) ⇒ (1). $\{\rho_j\}$ をある固定した $\mathcal{D}(R^{n+m})$ での δ-列とする.

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \to (u*\rho_j)\delta = (u*\rho_j)(x',0)\otimes\delta \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$$

なる写像は, 各 j に対して連続で, 空間 $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ は barrelled だから写像

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \longrightarrow \lim_{j\to\infty}(u*\rho_j)\delta \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$$

は連続である. 故に任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ に対して

$$\langle \lim_{j\to\infty}(u*\rho_j)\delta, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle u, \omega_\phi \rangle_{B_{p,\mu}, B_{p',1/\mu}}$$

なる $\omega_\phi \in B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$ が存在する.

$u = \alpha \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ をとると

$$\langle \alpha\delta, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle \alpha, \phi(x',0)\otimes\delta \rangle = \langle \alpha, \omega_\phi \rangle.$$

$\mathcal{D}(R^{n+m})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で稠密だから $\phi(x;0)\otimes\delta=\omega_\phi\in B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$.
すなわち trace mapping が存在する.

(5) ⇒ (1). $\{\rho_j\}$ を $\mathcal{D}(R^m)$ でのある δ-列とする. 写像

$$B_{p,\mu}(R^{n+m})\ni u\longrightarrow \rho_j u\in\mathcal{D}'(R^{n+m})$$

は連続であるから Banach-Steinhaus の定理から, 写像

$$B_{p,\mu}(R^{n+m})\ni u\longrightarrow \lim_{j\to\infty}\rho_j u\in\mathcal{D}'(R^{n+m})$$

は連続になり, 任意の $u\in\mathcal{D}(R^{n+m})$ に対して $\lim_{j\to\infty}\rho_j u=u(x;0)\otimes\delta$
だから, このことは trace mapping の存在を示している.

$1/\mu(0,\tau)\in L^{p'}(\Xi^m)$ を仮定し, $\dfrac{1}{\nu_{p'}(\xi)}=\left\{\int\dfrac{1}{\mu^{p'}(\xi;\tau)}d\tau\right\}^{1/p'}$ とおく.
t_0 を R^n の任意の点, u を $\mathcal{D}(R^{n+m})$ の元とすると, $\tau_{t_0}u$
$\in\mathcal{D}(R^{n+m})$ で, $(\tau_{-t_0}u)^\wedge=e^{i\langle t_0,\tau\rangle}\hat{u}$ である. また定理
1 の証明の中でのべた如く

$$\|u(\cdot,t)\|_{p,\nu_{p'}}\leqq\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m/p'}\|u\|_{p,\mu}$$

である. $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の任意の元 u をとると, $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の
中で $u=\lim u_j$ となる $u_j\in\mathcal{D}(R^{n+m})$ が存在し

$$\|u_j(\cdot,t_0)-u(\cdot,t_0)\|_{p,\nu_{p'}}\leqq\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m/p'}\|u_j-u\|_{p,\mu}.$$

この式から $u_j(\cdot,t_0)$ は $B_{p,\nu_{p'}}(R^n)$ で $u(\cdot,t_0)$ に t_0 にかんして
一様に収束することがわかる. $t\longrightarrow u_j(\cdot,t)$ は $B_{p,\nu_{p'}}(R^n)$-
valued continuous function だから $u(\cdot,t)$ は t にかんして連

続な $B_{p,\nu}(R^n)$-valued function $\mathfrak{u}(t)$ である。このことから

<u>定理 8</u>. $1/\mu(0,\tau) \in L^{p'}(\Xi^m)$ と仮定すると, $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元は $B_{p,\nu_{p'}}(R^n)$-valued continuous function $\mathfrak{u}(t)$ でき ある超関数とみなされる。ここで $\nu_{p'}$ は $\frac{1}{\nu_{p'}(\xi)} = \left\{\int_{\Xi^m} \frac{1}{\mu^{p'}(\xi,\tau)} d\tau\right\}^{1/p'}$ で定まる Ξ^n 上の temperate weight function である。

証) $\mathcal{D}(R^{n+m})$ の任意の元 ϕ に対して

$$\langle \mathfrak{u}, \phi \rangle = \int_{R^m} \langle \mathfrak{u}(t), \phi(\cdot, t) \rangle dt$$

とおく。

$\mathfrak{u}(t) = u(x,t) \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ にとると $\langle \mathfrak{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle_{\mathcal{D}';\mathcal{D}}$.

$\mathcal{D}(R^{n+m})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で稠密であるから, この関係は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の任意の元 u に対して成立する。

引用文献

[1] L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, (1963).

[2] M. Itano, On a trace theorem for the space $H^{\mu}(R^N)$, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 30(1966), 11-29.

[3] M. Itano, Note on the canonical extensions and the boundary

values for distributions in the space H^{μ}, Hiroshima Math. J. 1(1971), 405-425.

[4] B. P. Panejah, Theorems on traces and on the extension of distributions, Mat. Zametki 2(1967), 577-588.

[5] R. Shiraishi, On the value of distributions at a point and the multiplicative products, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 31(1967), 89-104.

[6] L. R. Volevič and B. P. Panejah, Some spaces of generalized functions and embedding theorems, Uspehi Mat. Nauk, 121 (1965), 3-74.