

Boltzmann 方程式について

奈良女子大(理) 静田 靖
京大(教養) 浅野 潔

§0. 序

Ω は 3次元空間 \mathbb{R}^3 内の有界凸閉領域で, 境界 $\partial\Omega$ の各点における Gauss 曲率は正であるとする。 t は時刻, $x \in \Omega$ は(粒子の)位置, $\xi \in \mathbb{R}^3$ は速度を表わすとし, 密度関数(粒子の分布密度)を $f(t, x, \xi)$ で表わす。 Ω 内の粒子が, お互い同志は弾性衝突をし, 壁 $\partial\Omega$ では完全反射(入射角と反射角とが等しい)をするならば, 粒子の密度 $f(t, x, \xi)$ は, 次の方程式をみたすと考えられる;

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + Q[f, f], & t > 0, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^3, \\ f|_{t=0} = f_0(x, \xi), \\ f(t, x, \xi) = f(t, x, \xi'), & x \in \partial\Omega, \xi' = \xi - 2\langle \xi, n_x \rangle n_x, \end{cases}$$

(ただし n_x は x における $\partial\Omega$ の内向き法線)。

$Q[f, f]$ はいわゆる collision operator で, 次の形をもつとされてゐる;

$$Q[f, g] = \iint_{\mathbb{R}^3 \times S^2} q(|\xi - \xi'|, \theta) \left\{ f(\eta) g(\eta') + f(\eta') g(\eta) - f(\xi) g(\xi') - f(\xi') g(\xi) \right\} d\xi' d\omega,$$

$$\omega \in S^2, \quad \cos \theta = \frac{\langle \omega, \xi - \xi' \rangle}{|\xi - \xi'|},$$

$$\eta = \xi + \langle \omega, \xi - \xi' \rangle \omega, \quad \eta' = \xi' - \langle \omega, \xi - \xi' \rangle \omega.$$

散乱 potential q に対して, 我々は次の仮定をおく;

$$(A) \quad \begin{cases} 0 \leq q(v, \theta) \leq q_0 |\cos \theta| (v + v^{-\delta}) & (0 \leq \delta < 1), \\ \int_0^\pi q(v, \theta) \sin \theta d\theta \geq q_1 v (1 + v)^{-1}. \end{cases}$$

(cut-off hard potential の場合, 条件 (A) はみたさぬ)。)

と ≥ 3 で, Maxwell 分布 $g = \beta e^{-\gamma |\xi|^2}$ ($\gamma > 0$) に対しては,

$Q[g, g] = 0$ となることが知られてゐる。つまり, g は方程式 (1) の定常解である。そこで

$$g_0(\xi) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} |\xi|^2},$$

$$f(t, x, \xi) = g_0(\xi) + g_0(\xi)^{\frac{1}{2}} u(t, x, \xi)$$

とおくと, (1) は次の形に書き直される;

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \Lambda u + Ku + \Lambda \Gamma[u, u], \\ u|_{t=0} = u_0(x, \xi), \\ u(t, x, \xi) = u(t, x, \xi'), \quad x \in \partial\Omega, \quad \xi' = \xi - 2\langle \xi, n_x \rangle n_x. \end{cases}$$

ただし

$$\Lambda u = \nu(|\xi|) \times u(t, x, \xi),$$

$$Ku = \int_{\mathbb{R}^3} K(\xi, \xi') u(t, x, \xi') d\xi',$$

$$\Gamma[u, u] = \nu(|\xi|)^{-1} g_0(\xi)^{-\frac{1}{2}} Q[g_0^{\frac{1}{2}} u, g_0^{\frac{1}{2}} u].$$

我々は(2)の線型部分を発展方程式として考察し、非線型項 $\Lambda \Gamma[u, u]$ を摂動として取扱うことによつて、①初期条件 $u_0(x, \xi)$ が「ある意味で」小さければ、(2)の解 $u(t, x, \xi)$ が $0 < t < \infty$ で一意的存在すること、② $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x, \xi) = 0$ を示す。方法の本質的部分は、Ukai [1]のそれの忠実な模倣である。

§1. 線型発展方程式

次の発展方程式を考へよう；

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \Lambda u + K u, & t > 0, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = u_0(x, \xi), \\ u(t, x, \xi) = u(t, x, \xi'), & x \in \partial\Omega, \xi' = \xi - 2 \langle \xi, n_x \rangle n_x. \end{cases}$$

まず

$$A = - \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$B_0 = - \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \nu(|\xi|) \kappa = A - \Lambda,$$

$$B = B_0 + K = A - \Lambda + K$$

とおき、これらの作用素が $\Omega \times \mathbb{R}^3$ 上の適当な関数空間で、作用素の半群を生成することを示し、次にこれらの半群の性質を調べることにする (Ukai [] 参照)。

$$\Sigma = \Omega \times S^2,$$

$$\Sigma_0 = \{ (x, \omega) \in \Sigma ; x \in \partial\Omega, \langle \omega, n_x \rangle = 0 \},$$

$$\Sigma_1 = \Sigma - \Sigma_0.$$

とおく。方程式の境界条件を考慮して、 $x \in \partial\Omega$ のとき、 (x, ω) と (x, ω') は、 $\omega' = \omega - 2\langle \omega, n_x \rangle n_x$ なるとき同値、 $(x, \omega) \equiv (x, \omega')$ と定める。 $-A$ を Σ 上の vector field とみなして、 Σ 上の flow Z_t を作る事ができる。すなわち $(x, \omega) \in \Sigma_1$ に対して

$$Z_t(x, \omega) = (x + t\omega, \omega) \in \Sigma_1 \quad (|t| \text{ が小さいとき}),$$

また $(x, \omega) \in \Sigma_0$ に対しては

$$Z_t(x, \omega) = \partial\Omega \text{ の測地線上の } t \text{ 秒後の位置と速度}$$

とすればよい。 $Z_t Z_s = Z_{t+s}$ により、 Z_t は $t \in \mathbb{R}$ に対して定義される Σ から Σ への写像となり、次の Lemma が成り立つ。

- Lemma 1. (i) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して、 $Z_t(\Sigma_i) \subset \Sigma_i$ ($i=0,1$).
- (ii) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して、 Z_t は Σ から Σ への 1 対 1, onto の連続写像である (故に一樣連続である)。

我々が用いたい相空間は、 $\Omega \times \mathbb{R}^3 = \Sigma \times [0, \infty)$ であるから、 Z_t を Σ まで拡張しなければならぬ。 $(x, \omega) \in \Sigma$ に対して

$$Z_t(x, \omega) = (X(t, x, \omega), Z(t, x, \omega)) \in \Sigma$$

とかく Σ にすれば、 $(x, \xi) = (x, |\xi| \frac{\xi}{|\xi|}) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$ に対して

$$X(t, x, \xi) = X(t, |\xi|, x, \frac{\xi}{|\xi|}),$$

$$Z(t, x, \xi) = |\xi| Z(t|\xi|, x, \frac{\xi}{|\xi|}),$$

$$Z_t(x, \xi) = (X(t, x, \xi), Z(t, x, \xi))$$

とおくことによつて, Z_0 を $\Omega \times \mathbb{R}^3$ の連続変換に拡張できる。

(Σ におけると同様の同値関係の下で, Z_t は $\Omega \times \mathbb{R}^3$ をそれ自身に移す 1 対 1, onto かつ連続写像となる。) 次の Lemma は重要である。(なお $\partial\Omega$ は C^3 級と仮定する。)

Lemma 2. (i) $X(t, x, \xi), Z(t, x, \xi)$ は (t, x, ξ) につき区分的に C^2 級関数である。

$$(ii) N_1(t, x) = \{ \xi \in \mathbb{R}^3; X(-t, x, \xi) \in \partial\Omega \} \quad (t \neq 0),$$

$$N_2(t, x) = \{ \xi \in \mathbb{R}^3; \det \frac{\partial X}{\partial \xi}(-t, x, \xi) = 0 \} \quad (t \neq 0).$$

とおくと, $N_i(t, x)$ は Lebesgue 測度 0 の閉集合で, かつ \mathbb{R}^3 の compact set K に対して, $K \cap N_i(t, x)$ は (t, x) に関して outer semi-continuous である ($i=1, 2$)。

関数空間 $C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3)$: $\Omega \times \mathbb{R}^3$ で定義された (複素数値) 連続関数 $f(x, \xi)$ で,

$$(x, \xi) \equiv (x, \xi') \quad \text{のとき} \quad f(x, \xi) = f(x, \xi'),$$

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} (1+|\xi|)^\alpha \sup_{x \in \Omega} |f(x, \xi)| = 0$$

をみたすものの全体を $C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ で表わす (ただし $\alpha \geq 0$)。

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\xi} (1+|\xi|)^\alpha \sup_x |f(x, \xi)|$$

を norm とし, $C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ は Banach space とする。

作用素 $A: C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3) \ni f(x, \xi) \longmapsto f(Z_{-t}(x, \xi)) \in C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3)$
 なる対応を T_t とかく。 T_t は $C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ における作用素の
 1-parameter 群で, $\|T_t\| = 1$ である。 A が T_t の generator であ
 ることが容易に示される。 すなわち $T_t = e^{tA}$ ($t \in \mathbb{R}$)。 また
 A の spectrum および essential spectrum を $\sigma(A)$ および $\sigma_e(A)$
 で表わすと, $\sigma(A) = \sigma_e(A) = \mathbb{R}$ 。

作用素 $B_0 = A - \Lambda$: 仮定 (A) より, $0 < \nu_0 \leq \nu_1$ なる定数 ν_0, ν_1 に対して, $\nu_0 \leq \nu(|\xi|) \leq \nu_1(1+|\xi|)$ とする ν が知られてい
 る (Grad [1])。 故に $-\Lambda$ も作用素の半群 $e^{-t\Lambda}$ ($0 \leq t < \infty$)
 を生成する。 $e^{tA} e^{-t\Lambda} = e^{-t\Lambda} e^{tA}$ が成立つので,

$$e^{tB_0} = e^{tA} e^{-t\Lambda}$$

とおくと, B_0 が生成する作用素の半群が得られる。 かつ

$$\|e^{tB_0}\| \leq e^{-\nu_0 t} \quad (t \geq 0),$$

$$\mathcal{D}(B_0) \supset \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(\Lambda),$$

$$\sigma(B_0) = \sigma_e(B_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda \leq -\nu_0\}$$

が成立つ。($\mathcal{D}(B_0)$ は B_0 の定義域)

作用素 $B = B_0 + K$: \mathbb{R}^3 で定義された連続関数 $f(\xi)$ で,

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\xi} (1+|\xi|)^\alpha |f(\xi)| < \infty$$

となるものの全体を $C_\alpha(\mathbb{R}^3)$ で表わす ($\alpha \geq 0$)。 仮定 (A) か

よ、次の条件 (A)' が導びかれる (Grad [1]) ;

$$(A)' \quad \begin{cases} K(\xi, \xi') \in C_0(\mathbb{R}^3; L_1(\mathbb{R}^3)), \\ K \in B(C_\alpha(\mathbb{R}^3), C_{\alpha+1}(\mathbb{R}^3)), \alpha \geq 0, \end{cases}$$

ただし $C_0(\mathbb{R}^3; L_1(\mathbb{R}^3))$ は $L_1(\mathbb{R}^3)$ の値をとる \mathbb{R}^3 上の連続関数全体を表わし, $B(C_\alpha(\mathbb{R}^3), C_{\alpha+1}(\mathbb{R}^3))$ は $C_\alpha(\mathbb{R}^3)$ から $C_{\alpha+1}(\mathbb{R}^3)$ への有界作用素の全体を表わす。(A)' より K は $C_\alpha(\mathbb{R}^3)$ における compact 作用素であることがわかる。そこで $u(x, \xi) \in C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ に対して

$$(Ke^{tB_0}K)(x, \xi) = \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} K(\xi, \xi') e^{-t\nu(|\xi'|)} K(\eta, \xi) \\ \times u(X(-t, x, \xi'), \xi) d\xi' d\xi$$

と書くと, Lemma 2(ii) を利用すると, $t > 0$ のとき $Ke^{tB_0}K$ は $C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ の compact 作用素で, $\|\cdot\|$ の norm で t によって連続 ($t > 0$ のとき) となることがわかる。故に

$$(4) \quad \begin{cases} K(\lambda - B)^{-1}K \quad (\operatorname{Re} \lambda > -\nu_0) \text{ は } C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3) \text{ の compact} \\ \text{作用素,} \\ \lim_{|\operatorname{Im} \lambda| \rightarrow \infty} \|K(\lambda - B)^{-1}K\| = 0 \quad (\operatorname{Re} \lambda \geq \beta > -\nu_0 \text{ で一定}). \end{cases}$$

K が $C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ における有界作用素であるから, B は作用素の半群 e^{tB} を生成するが, (4) を用いて若干の計算を行なうとよくなり, 次の Lemma を得る。

Lemma 3. (i) $\sigma_e(B) = \sigma_e(B_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda \leq -\nu_0\}$,
 かつ $\sigma(B) \subset \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda \leq -\delta_0\}$ ($0 < \delta_0 < \nu_0$).

(ii) B の固有値 0 に属する固有空間への射影を P とすると、
 $2 \leq \text{rank } P \leq 5$. かつ $0 < \delta < \delta_0$. なる δ と $\alpha > 0$ に対し
 て定数 M が存在して ($M = M(\alpha, \delta)$)

$$\|e^{tB} - P\| \leq M e^{-\delta t} .$$

証明. (4) より $\sigma_e(B) = \sigma_e(B_0)$. また $\text{Re } \lambda > -\nu_0$ なる B
 の固有値 λ に属する固有関数は $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ に属する ((A)' より).
 A は $L_2(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ で skew self-adjoint, $-A$ および $L = -A + K$
 は $L_2(\mathbb{R}^3)$ ($\times L_2(\Omega \times \mathbb{R}^3)$) で非正定値であることから, $\text{Re } \lambda$
 ≤ 0 . L は 0 を孤立固有値にもち, 固有空間は $g_0^{\frac{1}{2}}, \dots, g_0^{\frac{1}{2}}$ (i
 $= 1, 2, 3$), $|3|^2 g_0^{\frac{1}{2}}$ で張られることが知られている. $L_2(\Omega \times \mathbb{R}^3)$
 では $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(B_0) = \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(L)$ となることに注意して,
 B の $\text{Re } \lambda = 0$ となる固有値は, $\lambda = 0$ のみで, その固有空間
 の次元は 2 と 5 の間にあることがわかる. (i) の残りは, (4)
 より明らか. (ii) の評価は, spectral mapping theorem による.

§2. 非線型発展方程式

仮定 (A) より次のことが導びかれる;

$$(A)'' \begin{cases} \text{定数 } C = C(\alpha) \text{ が存在して } |\Gamma[f, f]|_{\alpha} \leq C |f|_{\alpha}^2, \\ C_{\alpha}(\Omega \times \mathbb{R}^3) \ni f \ (\alpha \geq 1) \text{ に対して } P \wedge \Gamma[f, f] = 0. \end{cases}$$

前節までの結果を利用して, 方程式 (2) を $C_{\alpha}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ におけ
 る次の方程式 (5) または (6) の形に書くことができる;

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Bu + \Lambda \Gamma[u, u], & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

$$(6) \quad u(t) = e^{tB} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)B} \Lambda \Gamma[u(s), u(s)] ds.$$

$\Lambda \Gamma[u, u]$ の性質 (A)'' を考慮すれば,

$$(7) \quad Pu_0 = 0 \text{ かつ (従って) } Pu(t) = 0$$

と仮定してさしつかえなう。

関数空間 $X_{\alpha, \delta}$ および $Y_{\alpha, \delta}$ ($\alpha \geq 0, 0 < \delta < \nu_0$): $[0, \infty)$ で定義された $C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ の値をとる連続関数 $f(t)$ で

$$\|f\|_{\alpha, \delta} = \sup_{0 \leq t < \infty} e^{\delta t} \|f(t)\|_\alpha < \infty$$

を満たすものの全体を $X_{\alpha, \delta}$ で表わす。また $f(t) \in X_{\alpha, \delta}$ が $Pf(t) = 0$ と仮定すると、 $f(t) \in Y_{\alpha, \delta}$ とする。

(6) または (5) に対する次の a priori estimate が成り立つ。

Theorem 1. $\alpha \geq 1, 0 < \delta < \delta_0$ とする。正数 $\theta = \theta(\alpha, \delta)$ が存在して、(6) の解 $u(t) \in Y_{\alpha, \delta}$ に対して

$$(8) \quad \|u\|_{\alpha, \delta} \leq M(\alpha, \delta) \|u_0\|_\alpha + \theta(\alpha, \delta) \|u\|_{\alpha, \delta}^2.$$

(8) を証明するためには、次の Lemma 4 と Lemma 5 を示せば十分である。

Lemma 4. $0 < \delta < \nu_0$ とする。

(i) $u_0 \in C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ ならば、 $e^{tB_0} u_0 \in X_{\alpha, \delta}$ かつ

$$\|e^{tB_0} u_0\|_\alpha \leq e^{-\nu_0 t} \|u_0\|_\alpha, \text{ i.e., } \|e^{tB_0} u_0\|_{\alpha, \delta} \leq \|u_0\|_\alpha.$$

(ii) $f(t) \in X_{\alpha, \delta}$ とし, $g(t) = \int_0^t e^{(t-\lambda)B_0} \Lambda f(\lambda) d\lambda$ とおくと,
 $g(t) \in X_{\alpha, \delta}$ かつ

$$\|g\|_{\alpha, \delta} \leq \frac{\nu_0}{\nu_0 - \delta} \|f\|_{\alpha, \delta}.$$

Lemma 5. $\alpha \geq 1, 0 < \delta < \delta_0$ とする。

(i) $u_0 \in C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3), P u_0 = 0$ ならば, $e^{tB} u_0 \in Y_{\alpha, \delta}$ 且,
 $\|e^{tB} u_0\|_\alpha \leq M(\alpha, \delta) e^{-\delta t} \|u_0\|_\alpha.$

(ii) $f(t) \in X_{\alpha, \delta}, P \Lambda f(t) = 0$ (i.e., $\Lambda f(t) \in Y_{\alpha-1, \delta}$) とする。
 $g(t) = \int_0^t e^{(t-\lambda)B} \Lambda f(\lambda) d\lambda$ ($\in C_{\alpha-1}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$) とおくと,
 $g(t) \in Y_{\alpha, \delta}$, かつ正定数 $\ell = \ell(\alpha, \delta)$ が存在して

$$\|g\|_{\alpha, \delta} \leq \ell \|f\|_{\alpha, \delta}.$$

証明. (ii)のみ示す。 $\|\Lambda f(\lambda)\|_{\alpha-1} \leq \nu_1 e^{-\delta_1 \lambda} \|f\|_{\alpha, \delta}$ に注意し,
 Lemma 3 (ii) を ($\|e^{tB} - P\| \leq M_1 e^{-\delta_1 t}, 0 < \delta < \delta_1 < \delta$ として) 用いると,
 $g(t) \in Y_{\alpha-1, \delta}$ ($\|g\|_{\alpha-1, \delta} \leq \frac{M_1 \nu_1}{\delta_1 - \delta} \|f\|_{\alpha, \delta}$) を得る。

$$e^{tB} = e^{tB_0} + \int_0^t e^{(t-\lambda)B_0} K e^{\lambda B} d\lambda$$

を用いると

$$g(t) = \int_0^t e^{(t-\lambda)B_0} \Lambda f(\lambda) + \int_0^t e^{(t-\lambda)B_0} \Lambda \Lambda^{-1} K g(\lambda) d\lambda$$

と書ける。 K の性質 (A) より $\|\Lambda^{-1} K g\|_{\alpha, \delta} \leq \nu_0^{-1} C(\alpha) \|g\|_{\alpha-1, \delta}$

となるので, Lemma 4 より $g(t) \in X_{\alpha, \delta}$, $\ell = \ell(\alpha, \delta)$ の値は

$$\|g\|_{\alpha, \delta} \leq \frac{\nu_0}{\nu_0 - \delta} \left(\|f\|_{\alpha, \delta} + \frac{C(\alpha)}{\nu_0} \frac{M(\alpha, \delta_1)}{\delta_1 - \delta} \nu_1 \|f\|_{\alpha, \delta} \right)$$

から定めればよい。

方程式 (6) に逐次近似法を適用し、Theorem 1 を利用すると次の結果を得る。

Theorem 2. $\alpha \geq 1$, $0 < \delta < \delta_0$ とする。正定数 $d = d(\alpha, \delta)$ が存在して, $\|u_0\|_\alpha \leq d$, $Pu_0 = 0$ であれば, (6) の解 $u(t)$ が $Y_{\alpha, \delta}$ の中に唯一つ存在する。

上で得た解 $u(t, x, \xi)$ が, 通るの意味で (2) の方程式を各真的に満たしていることもわかる。 $u(t, x, \xi)$ は t に因りて指数関数的に減少するから, 我々の目標は一端達成されたといえる。

参考文献

- [1] H. Grad: Asymptotic theory of the Boltzmann equation, II, in "Rarefied Gas Dynamics, vol. 1", Academic Press (1963).
- [2] H. Grad: Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and non-linear Boltzmann equation, in "Proceedings of Simposia in Applied Mathematics vol. 17", 154-183 (1965)
- [3] S. Ukai: On the Existence of Global Solutions of Mixed Problem for Non-linear Boltzmann Equation, Proc. Japan Acad., vol. 50, no. 3, 179-184 (1974)
(to appear).
- [4] Y. Shizuta; On the classical solutions of the Boltzmann equation,