数理解析研究所講究録
307巻 1977年 1-28

Long-range potentialを持つSchrödinger作用素の散乱理論（修正波動作用素の完全性）

厚生省　　北田　均

本稿の目的はlong-range potentialを持つSchrödinger作用素に関する散乱理論を展開することにある。特にtime-dependent wave operatorの完全性の証明に重点をおいて述べる。我々の方法を使えば，Pinchuk氏[10]，磯崎洋氏[4]によって構成されたstationary wave operatorとtime-dependent wave operatorとの関係をつけることもできるが今回は省略する。詳細は[7]，[8] を参照されたい。また証明は概略を述べるにとどめる。これも詳細は前記論文を参照されたい。

§1. 主結果.

H_1, H_2 をHilbert空間 $\mathcal{H}=L^2(R^N)$, $N\geq 1$, における次のようなSchrödinger作用素とする.

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} H_1=-\Delta=-\sum_{j=1}^{N}\partial^2/\partial x_j^2, \\ H_2=H_1+V. \end{cases}
$$

ここで，H_1は $-\Delta|_{C_0^\infty(R^N)}$ の$\mathcal{H}$における自己共役拡張を表わ

す．また，Uは次の仮定をみたすpotentialとする．

<u>仮定1.1.</u>　Uは$U=V+V_S$と分解され，V，V_Sはそれぞれ以下の条件(L)，(S)をみたすR^N上の実数値可測関数V，V_Sによる$\mathcal{H}=L^2(R^N)$における極大掛算作用素である．

(L)　VはR^N上の実数値C^∞関数で，

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C\,(1+|x|)^{-|\alpha|-\varepsilon_0} \tag{1.2}$$

を$|\alpha|\leq K_0$なる任意の多重指数αに対してみたす．但し，$0<\varepsilon_0<1$，$C>0$，$K_0\geq 4$とする．また，$\partial_x=(\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_N)$.

(S)　V_SはR^N上の実数値可測関数で，

$$|V_S(x)| \leq C\,(1+|x|)^{-1-\varepsilon_0} \tag{1.3}$$

をみたす．但し，C，ε_0は(L)に同じ．

この仮定のもとに，H_2は$\mathcal{H}$における自己共役作用素となり，$\mathcal{D}(H_2)=\mathcal{D}(H_1)=H^2(R^N)$である．但し，$H^2(R^N)$は2階のSobolev空間を，また$\mathcal{D}(T)$は作用素$T$の定義域を表わす．

我々の主結果を定式化するために，Hörmander [1]による結果を述べておく。

<u>定理1.2.</u>　仮定1.1のもとに$R^N\times R^1$上の実数値C^∞関数$X(\xi,t)$が存在して，$R^N-\{0\}$の任意のcompact集合Ωに対し，次の三条件をみたす．

i)　任意の$\xi\in R^N$に対し，$X(\xi,0)=0$.

ii)　ある正数Tがあって，任意の$\xi\in R^N$，$|t|>T$なるtに

対し，

(1.4) $$(\partial_t X)(\xi,t)=\nabla(2t\xi+(\partial_\xi X)(\xi,t)).$$

但し，$\partial_t=\partial/\partial t$，$\partial_\xi=(\partial/\partial\xi_1,\cdots,\partial/\partial\xi_N)$.

iii) 任意の $0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$ なる ε_1 に対し，ある正数 C があって，任意の $\xi\in\Omega$，$t\in R^1$，及び，$|\alpha|\leq K_0-1$ なる多重指数 α に対し，

(1.5) $$|(\partial_\xi^\alpha X)(\xi,t)|\leq C\,(1+|t|)^{1-\varepsilon_1}$$

が成り立つ.

この定理から数学的帰納法により，次の系が容易に導かれる.

系 1.3. 仮定 1.1 のもとに，定理 1.2 の $X(\xi,t)$ は次をみたす： $R^N-\{0\}$ の任意の compact 集合 Ω と $0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$ なる ε_1 に対し，ある正数 C があって，

(1.6) $$|(\partial_t^\alpha\partial_\xi^\beta X)(\xi,t)|\leq C(1+|t|)^{1-|\alpha|-\varepsilon_1},\quad \xi\in\Omega,\ t\in R^1$$

が $|\alpha|+|\beta|\leq K_0-1$ なる任意の 1 次元，及び，N 次元多重指数 α，β に対して成り立つ．特に，$\alpha\neq 0$ のときは，(1.6) は $\varepsilon_1=\varepsilon_0$ として成り立つ.

さて，$\mathcal{F}$ を $L^2(R^N)$ における Fourier 変換とする：

$$(\mathcal{F}u)(\xi)=\hat{u}(\xi)\equiv(2\pi)^{-N/2}\ \underset{M\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{|x|\leq M}e^{-i\langle x,\xi\rangle}u(x)\,dx,\quad u\in L^2(R^N).$$

定義 1.4. 任意の $t\in R^1$ に対し，

(1.7) $\qquad X(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\xi,t)\cdot]\mathcal{F}.$

$X(t)$は明らかに$\mathcal{H}$におけるH_1と可換な自己共役作用素を定義する。主結果を述べよう。

定理1.5(修正波動作用素の完全性). 仮定1.1が$K_0=[(N+7)/\varepsilon_0]$としてみたされるとする([ ]はGauss記号)。この時，強極限

(1.8) $\qquad W_D^{\pm} = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{itH_2}e^{-itH_1-iX(t)}$

が存在し，$W_D^{\pm}$は始集合$\mathcal{H}_{1,ac}=\mathcal{H}$，終集合$\mathcal{H}_{2,ac}$なる$\mathcal{H}$における部分等距離作用素を定義する．($\mathcal{H}_{j,ac}$は$H_j$の絶対連続部分空間を表わす.) さらに任意の$R^1$のBorel集合$\Delta$に対し，

(1.9) $\qquad W_D^{\pm}E_1(\Delta) = E_2(\Delta)W_D^{\pm}$

が成り立つ．ここで，E_jはH_jに随伴するスペクトル測度を表わす．

次にInvariance principleを述べるために，若干の準備をする．Γを$\Gamma\subset(0,\infty)$なる有界Borel集合とし，Iを$(0,\infty)$内の開区間で$\bar{\Gamma}\subset I$なるものとする．$\varphi\in C^\infty(I)$を実数値関数とし，$\eta\in C_0^\infty(R^1)$を$\eta(\lambda)=1$, $\lambda\in\Gamma$，及び，$\operatorname{supp}\eta\subset I$ととる．そして，

(1.10) $\qquad a_\varphi(t,r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\lambda)e^{-it\varphi(\lambda)+ir\lambda}\,d\lambda$

とおくと，任意の$t\in R^1$に対し，$a_\varphi(t,\cdot)\in L^1(R^1)$．従って，

$u\in\mathcal{H}$, $t\in R^1$に対し,

$$Q_\varphi(t)u=\int_{-\infty}^{\infty}a_\varphi(t,r)e^{-irH_1-iX(r)}u\,dr \tag{1.11}$$

が定義でき，$Q_\varphi(t)\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$となる。但し，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$は$\mathcal{H}$における有界作用素全体のなすBanach空間を表わす．さて，Invariance principleを定式化しよう．

<u>定理1.6</u> (Invariance principle). 仮定1.1が$K_0=[(N+7)/\varepsilon_0]$としてみたされるとする．また，上記の$\varphi$がI上$\varphi'>0$, $\varphi''\neq 0$をみたすとする．このとき，強極限

$$W_\varphi^\pm(\Gamma)=\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty}e^{it\varphi(H_2)}Q_\varphi(t)E_{1,ac}(\Gamma) \tag{1.12}$$

が存在し，

$$W_\varphi^\pm(\Gamma)=W_D^\pm E_{1,ac}(\Gamma) \tag{1.13}$$

が成り立つ．ここで，$E_{j,ac}$はE_jの絶対連続部分を表わす．

§2. 固有関数展開．

本節では前節で導入したSchrödinger作用素H_1, H_2に関する固有関数展開について述べる．本節の結果は後節で定理1.5, 1.6の証明の際に用いられる．

<u>定義2.1.</u> $r>0$, $\omega\in R^N$, $\lambda\in R^1$, $\xi\in R^N$, $t\in R^1$に対し,

$$f(r,\omega,\lambda;\xi,t)=\langle\omega,\xi\rangle+t(\lambda-|\xi|^2)-X(\xi,rt)/r \tag{2.1}$$

とおく．但し，Xは定理1.2で定義されたC^∞関数である．

このとき，次の命題が成り立つ．

<u>命題2.2.</u> 仮定1.1が$K_0=4$としてみたされるとする．K

を$(0,\infty)$内のcompact区間とする．このとき正数$R=R_K$, $S^{N-1}\times K$の開近傍$U=U_K$, 及び，唯一つのC^∞関数$(\xi_c^\pm, t_c^\pm)$: $(R,\infty)\times U\longrightarrow R^N\times R^1$が定まって，次の三条件をみたす．

i) 任意の$r>R$, 及び，$(\omega,\lambda)\in U$に対し，

$$
(2.2)\qquad \begin{cases} (\partial_\xi f)(r,\omega,\lambda;\xi_c^\pm(r,\omega,\lambda), t_c^\pm(r,\omega,\lambda)) = 0, \\ (\partial_t f)(r,\omega,\lambda;\xi_c^\pm(r,\omega,\lambda), t_c^\pm(r,\omega,\lambda)) = 0. \end{cases}
$$

ii) $0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$なる任意の$\varepsilon_1$に対し，正定数$C$があって，任意の$r>R$, $(\omega,\lambda)\in U$に対し，

$$
(2.3)\qquad |(\xi_c^\pm(r,\omega,\lambda), t_c^\pm(r,\omega,\lambda)) - (\pm\sqrt{\lambda}\,\omega/|\omega|, \pm|\omega|/2\sqrt{\lambda})| < C r^{-\varepsilon_1}
$$

が成り立つ．

iii) 任意の$r>R$, $(\omega,\lambda)\in U$に対し，行列

$$
(2.4)\qquad \begin{aligned} &J(r,\omega,\lambda;\xi_c^\pm(r,\omega,\lambda), t_c^\pm(r,\omega,\lambda)) \\ &\equiv \begin{pmatrix} \partial_\xi^2 f & \partial_\xi\partial_t f \\ \partial_t\partial_\xi f & \partial_t^2 f \end{pmatrix}(r,\omega,\lambda;\xi_c^\pm(r,\omega,\lambda), t_c^\pm(r,\omega,\lambda)) \end{aligned}
$$

は正則である．

<u>証明</u>. μを$\mu>1/\varepsilon_0$ととり，

$$
\begin{cases} g(\rho,\omega,\lambda;\xi,t) = \begin{cases} (\partial_\xi f)(\rho^{-\mu},\omega,\lambda;\xi,t) & : \ \rho>0, \\ \omega-2t\xi & : \ \rho\le 0, \end{cases} \\ h(\rho,\omega,\lambda;\xi,t) = \begin{cases} (\partial_t f)(\rho^{-\mu},\omega,\lambda;\xi,t) & : \ \rho>0, \\ \lambda-|\xi|^2 & : \ \rho\le 0 \end{cases} \end{cases}
$$

と関数(g,h) : $R^1\times R^N\times R^1\times R^N\times R^1\longrightarrow R^{N+1}$を定義すると，こ

れはC^1関数である。さらに，$(\omega,\lambda)\in S^{N-1}\times K$，$(\xi,t)\in R^N\times R^1$に対し，

$$\det\begin{pmatrix}\partial_\xi g & \partial_t g\\ \partial_\xi h & \partial_t h\end{pmatrix}\Bigg|_{(0,\omega,\lambda,\xi,t)}=2^{N+1}(-1)^N|\xi|^2t^{N-1},$$

及び，

$$\begin{cases} g(0,\omega,\lambda;\pm\sqrt{\lambda}\omega,\pm 1/2\sqrt{\lambda})=0,\\ h(0,\omega,\lambda;\pm\sqrt{\lambda}\omega,\pm 1/2\sqrt{\lambda})=0\end{cases}$$

ゆえ，陰関数定理，及び，$S^{N-1}\times K$ の compact 性を用いて，C^1関数 $(\tilde{\xi}_c^\pm,\tilde{t}_c^\pm):(-\rho_0,\rho_0)\times U\longrightarrow R^{N+1}$で，

$$\begin{cases} g(\rho,\omega,\lambda;\tilde{\xi}_c^\pm(\rho,\omega,\lambda),\tilde{t}_c^\pm(\rho,\omega,\lambda))=0,\\ h(\rho,\omega,\lambda;\tilde{\xi}_c^\pm(\rho,\omega,\lambda),\tilde{t}_c^\pm(\rho,\omega,\lambda))=0\end{cases}$$

及び，

$$|(\tilde{\xi}_c^\pm(\rho,\omega,\lambda),\tilde{t}_c^\pm(\rho,\omega,\lambda))-(\pm\sqrt{\lambda}\omega/|\omega|,\pm|\omega|/2\sqrt{\lambda})|<C\rho^{\mu\varepsilon_1}$$

を任意の $(\rho,\omega,\lambda)\in(-\rho_0,\rho_0)\times U$ に対してみたすものの一意的存在が示される。ここで，ρ_0は適当な正数，Uは$S^{N-1}\times K$の$(R^N-\{0\})\times R^1$に含まれる開近傍，$C>0$は$(\rho,\omega,\lambda)\in(-\rho_0,\rho_0)\times U$によらない定数である。これより，関数

$$(\xi_c^\pm(r,\omega,\lambda),t_c^\pm(r,\omega,\lambda))=(\tilde{\xi}_c^\pm(r^{-1/\mu},\omega,\lambda),\tilde{t}_c^\pm(r^{-1/\mu},\omega,\lambda))$$

を定義すると$(\xi_c^\pm,t_c^\pm)$は命題の条件をみたす唯一つのC^1関数である。これがC^∞であることは陰関数定理よりわかる。

（証明終）

<u>定義2.3.</u>　Kを$(0,\infty)$のcompact区間とし，$R=R_K$, $U=U_K$を命題2.2のものとする．このとき，$r>R$, $(\omega,\lambda)\in U$に対し，

$$Y^{\pm}(r\omega;\lambda)=\pm\sqrt{\lambda}\,r-rf(r,\omega,\lambda;\xi_c^{\pm}(r,\omega,\lambda),t_c^{\pm}(r,\omega,\lambda)) \tag{2.5}$$

と定義する．

この関数$Y^{\pm}$に対し，次の定理が成り立つ．

<u>定理2.4.</u>　仮定1.1が$K_0=4$としてみたされるとする．Kを$(0,\infty)$に含まれるcompact区間とする．この時，正数$R'=R_K'>R_K$があって次が成り立つ．

i)　$0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$なる任意の$\varepsilon_1$に対し，正定数$C$があって，任意の$\lambda\in K$, $|x|>R'$, $|\alpha|\leq 3$に対し，

$$|(\partial_x^{\alpha}Y^{\pm})(x;\lambda)|\leq C\,r^{1-|\alpha|-\varepsilon_1} \tag{2.6}$$

が成り立つ．

ii)　任意の$r>R'$, $\omega\in S^{N-1}$, $\lambda\in K$に対し，

$$\pm2\sqrt{\lambda}(\partial_rY^{\pm})(r\omega;\lambda)=V(r\omega)+|(\partial_xY^{\pm})(r\omega;\lambda)|^2. \tag{2.7}$$

<u>証明</u>．定義より，

$$\begin{aligned}Y^{\pm}(r\omega;\lambda)=\pm\sqrt{\lambda}\,r-r\langle\omega,\xi_c^{\pm}(r,\omega,\lambda)\rangle\\ -rt_c^{\pm}(r,\omega,\lambda)(\lambda-|\xi_c^{\pm}(r,\omega,\lambda)|^2)\\ +X(\xi_c^{\pm}(r,\omega,\lambda),rt_c^{\pm}(r,\omega,\lambda))\end{aligned}$$

である．一般に，関数$\tilde{g}(r,\omega)=g(r\omega)$に対し，

$$(\partial_xg)(r\omega)=\omega(\partial_r\tilde{g})(r,\omega)+r^{-1}\{(\partial_\omega\tilde{g})(r,\omega)-\langle(\partial_\omega\tilde{g})(r,\omega),\omega\rangle\omega\} \tag{2.8}$$

であることを使えば，

$$\begin{cases} (\partial_r Y^\pm)(r\omega;\lambda) = \pm\sqrt{\lambda} - \langle \omega, \xi_c^\pm(r,\omega,\lambda)\rangle \\ (\partial_\omega Y^\pm)(r\omega;\lambda) = -r\,\xi_c^\pm(r,\omega,\lambda) \end{cases}$$

より，

$$(\partial_x Y^\pm)(r\omega;\lambda) = \pm\sqrt{\lambda}\,\omega - \xi_c^\pm(r,\omega,\lambda)$$

が得られる。これらと，(2.2)，(1.4)より ii)は容易に示される. i)は (2.8) を用いて $\partial_x^\alpha Y^\pm$ を計算し，(2.2)を r, ω について適当な回数微分して得られる評価（このとき，系 1.3 を用いる）を使えば証明できる.　　　　（証明終）

さて，H_j に対する eigenoperator $\mathcal{F}_j^\pm(\lambda)$ を構成するが，そのために，

(2.9)　　　$H_3 = H_1 + V$

とおく．すると，

(2.10)　　　$H_2 = H_3 + V_S$

である.

<u>定義 2.5.</u>　$\lambda > 0$，$\omega \in S^{N-1}$，$r > R_\lambda (> 0)$ に対し，

(2.11)　　$$\begin{cases} \theta_1^\pm(r,\omega,\lambda) = \mp\sqrt{\lambda}\,r, \\ \theta_3^\pm(r,\omega,\lambda) = \mp\sqrt{\lambda}\,r + Y^\pm(r\omega;\lambda) \end{cases}$$

とおく．但し，正数 R_λ は λ が $(0,\infty)$ の compact 集合を動くとき，有界にとどまる.

さて，本節の主定理（定理 2.7）を述べるために池部晃生，斉藤義実両氏 [3] による一結果を述べよう.

定理2.6(極限吸収原理). 仮定1.1が$K_0=4$としてみたされるとする. Kを$(0,\infty)$に含まれるcompact集合とし, $K^{\pm}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\, z \gtrless 0,\ \mathrm{Re}\, z\in K\}$とおく. $j=1,2$, 又は, 3とし, $R_j(z)=(H_j-z)^{-1}$とする. また$\gamma>1/2$とする. このとき, 写像

$$K^{\pm}\times L^2_{\gamma}(R^N)\ni(z,x)\longmapsto R_j(z)x\in L^2_{-\gamma}(R^N)$$

は, 連続な写像

$$\overline{K^{\pm}}\times L^2_{\gamma}(R^N)\longrightarrow L^2_{-\gamma}(R^N)$$

に一意的に拡張され,

$$\sup_{z\in K^{\pm}}\|R_j(z)\|_{B(L^2_{\gamma}(R^N),\,L^2_{-\gamma}(R^N))}<\infty$$

をみたす. ここで$B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$はノルム空間$\mathcal{X}$からBanach空間$\mathcal{Y}$への有界作用素全体のなすBanach空間を表わす. また, $L^2_{\gamma}(R^N)\equiv L^2(R^N,(1+|x|)^{2\gamma}dx)$である.

以下, $R_j(\lambda\pm i0)x$ $(x\in L^2_{\gamma}(R^N))$によって, $\lim_{\varepsilon\to+0}R_j(\lambda\pm i\varepsilon)x\in L^2_{-\gamma}(R^N)$を表わすことにする. さて, 斉藤義実氏の未発表の結果を使えば, 以上のことより次の定理が証明できる.

定理2.7. 仮定1.1が$K_0=4$としてみたされるとする. $\gamma>1/2$とγをとる. このとき, $j=1,3$に対し, 次が成り立つ.

i) 任意の$\lambda>0$, $g\in L^2_{\gamma}(R^N)$に対し, 正数列$\{r_k\}$で$r_k\to\infty$ $(k\to\infty)$, 及び, $k\to\infty$の時, $\mathfrak{h}\equiv L^2(S^{N-1})$において,

(2.12) $\quad r_k^{(N-1)/2}\left[(\partial/\partial r-(\pm i\sqrt{\lambda}))(R_j(\lambda\pm i0)g)\right](r_k\,\cdot)\longrightarrow 0$

をみたすものが存在する．

ii) 任意の $\lambda>0$，$g\in L^2_\gamma(R^N)$ に対し，$\{r_k\}$ を (2.12) をみたす正数列とすると，$\mathfrak{h}=L^2(S^{N-1})$ において，極限

(2.13) $\quad \displaystyle\lim_{k\to\infty} r_k^{(N-1)/2} e^{i\theta_j^\pm(r_k,\cdot,\lambda)}(R_j(\lambda\pm i0)g)(r_k\cdot)$

が存在し，(2.12) をみたす $\{r_k\}$ のとり方によらない．

（斉藤氏は [11] で，$\gamma>3/2-\varepsilon_0\ (>1/2)$ として上記定理を証明した．(但し，$\theta_j^\pm$ のとり方は我々のものとは異なる．) 斉藤氏はこれが $\gamma>1/2$ でも成立することを [11]，[12] の結果を用いて証明した．）

さて，次の定義ができる．

<u>定義 2.8.</u> $\gamma>1/2$，$\lambda>0$，$g\in L^2_\gamma(R^N)$ とする．$\{r_k\}$ を (2.12) をみたす任意の正数列とするとき，$j=1,3$ に対し，

(2.14) $\quad \displaystyle \mathcal{F}_j^\pm(\lambda)g=\pi^{-1/2}\lambda^{1/4}\lim_{k\to\infty} r_k^{(N-1)/2} e^{i\theta_j^\pm(r_k,\cdot,\lambda)}(R_j(\lambda\pm i0)g)(r_k\cdot)$

と定義する．さらに，池部晃生氏 [2] に従って，

(2.15) $\quad \mathcal{F}_2^\pm(\lambda)g=\mathcal{F}_3^\pm(\lambda)(g-V_S R_2(\lambda\pm i0)g)$

と定義する．

このとき，次の命題が成り立つ（[12] の Proposition 3.6を参照）．

<u>命題 2.9.</u> 仮定 1.1 が $K_0=4$ としてみたされるとする．$\gamma>1/2$，$j=1,2$，又は，3 とする．このとき，線型作用素 $\mathcal{F}_j^\pm(\lambda)$ $: L^2_\gamma(R^N)\longrightarrow \mathfrak{h}=L^2(S^{N-1})$ は，次の関係を任意の $g,h\in L^2_\gamma(R^N)$

に対してみたす．

(2.16) $\quad (\mathcal{F}_j^\pm(\lambda)g, \mathcal{F}_j^\pm(\lambda)h)_{\mathcal{G}} = (\{R_j(\lambda+i0)g - R_j(\lambda-i0)g\}, h)_{\mathcal{H}}/2\pi i.$

以上の結果より，H_jの固有関数展開ができる．しかし，本稿では以上の結果だけで十分なので省略する．（詳しくは，斉藤氏［12］を参照されたい．）

§3. Stationary wave operator の構成と完全性．

本節では，いわゆる stationary (time-independent) wave operator を構成し，その完全性を証明する．Time-dependent wave operator との関係は次節で扱う．

定義3.1. $u \in \mathcal{H} = L^2(R^N)$, $z \in \mathbb{C}^\pm = \{z \mid z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \gtrless 0\}$ に対し，

(3.1) $$S^\pm(z)u = \pm i \int_{-\infty}^{\infty} \chi_\pm(t) e^{-iX(t)} e^{it(z-H_1)} u \, dt$$

とおく．但し，$X(t)$, H_1 は §1 のもの．また，χ_+, χ_- はそれぞれ $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$ の特性関数を表わす．（$X(t)=0$ の時は，$S^\pm(z) = R_1(z)$ となることに注意．）

さて，明らかに $S^\pm(z) \in B(\mathcal{H})$ であるが，さらに，$u \in \mathcal{D}(H_1)$ のときは，$S^\pm(z)u \in \mathcal{D}(H_1) = \mathcal{D}(H_2)$ が容易に示される．従って次の定義ができる．

定義3.2. $u \in \mathcal{D}(H_1)$, $z \in \mathbb{C}^\pm$ に対し，

(3.2) $$\begin{cases} G^\pm(z)u = (H_2 - z) S^\pm(z)u, \\ Q^\pm(z)u = G^\pm(z)u - u. \end{cases}$$

補題3.3. 仮定1.1が$K_0=4$としてみたされるとする．このとき，$u\in\mathcal{D}\equiv\mathcal{F}^{-1}(C_0^\infty(R^N-\{0\}))\subset\mathcal{D}(H_1)$，$z\in\mathbb{C}^\pm$ならば，

$$\mp i(2\pi)^{N/2}(Q^\pm(z)u)(x)$$

$$(3.3)\quad =U(x)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{R^N}\chi_\pm(t)e^{i\langle x,\xi\rangle+it(z-|\xi|^2)-iX(\xi,t)}\hat{u}(\xi)\,d\xi\,dt$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{R^N}\chi_\pm(t)e^{i\langle x,\xi\rangle+it(z-|\xi|^2)-iX(\xi,t)}(\partial_tX)(\xi,t)\hat{u}(\xi)\,d\xi\,dt$$

が成り立つ．

証明. 部分積分とFourier変換により容易．　　（証明終）

$Q^\pm(\lambda\pm i\varepsilon)u$　$(\lambda>0,\varepsilon>0,u\in\mathcal{D})$ の$\varepsilon\to+0$の時の境界値を考えるために次の定理を準備する．

定理3.4. 仮定1.1が$K_0=[(N+7)/\varepsilon_0]$としてみたされるとする．$C^\infty$関数$v(\xi,t)\in C^\infty(R^N\times R^1)$が次をみたすとする．

$v1)$　$0<a_1<a_2<\infty$なるある正数a_1, a_2に対し，

$$\mathrm{supp}\,v(\cdot,t)\subset\{\xi\mid a_1<|\xi|<a_2\},\quad t\in R^1.$$

$v2)$ $1>h\geq 0$なるhと正数Cがあって，$|\alpha|+|\beta|\leq K_0-2$なる任意の多重指数$\alpha$，$\beta$，及び，$\xi\in R^N$，$t\in R^1$に対して，

$$(3.4)\qquad |(\partial_t^\alpha\partial_\xi^\beta v)(\xi,t)|\leq C(1+|t|)^{-|\alpha|-h}.$$

このとき，$z\in\mathbb{C}^\pm$，$x\in R^N$に対し，

$$(3.5)\qquad A^\pm(z,v;x)$$

$$=\int_{R^N}\int_{R^1}\chi_\pm(t)e^{i\langle x,\xi\rangle+it(z-|\xi|^2)-iX(\xi,t)}v(\xi,t)\,dt\,d\xi$$

とおく．また，Kを$(0,\infty)$内のcompact区間で，$[a_1^2, a_2^2] \subset K^i$なるものとする．但し，$K^i$はKの開核を表わす．このとき，次が成り立つ．

i) 任意の$\varepsilon>0$に対し，正定数Cがあって，任意の$\lambda, \lambda' \in R^1$，$x, x' \in R^N$に対し，

$$
(3.6) \qquad \begin{aligned} &|A^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon, v; x) - A^{\pm}(\lambda' \pm i\varepsilon, v; x')| \\ &\leq C\ (|x-x'| + |\lambda-\lambda'|) \end{aligned}
$$

が成り立つ．

ii) 任意の$\lambda \in R^1$，$x \in R^N$に対し，極限

$$
(3.7) \qquad A^{\pm}(\lambda \pm i0, v; x) \equiv \lim_{\varepsilon \to +0} A^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon, v; x)
$$

が存在する．

iii) 正定数 R, C があって次が成り立つ．

a) 任意の$\lambda \in R^1 - K$，$\varepsilon \geq 0$，$x \in R^N$に対し，

$$
(3.8) \qquad |A^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon, v; x)| \leq C(1+|x|)^{-(N-1)/2-2}(1+|\lambda|)^{-1}.
$$

b) 任意の$\lambda \in K$，$\varepsilon \geq 0$，$|x| \leq R$に対し，

$$
(3.9) \qquad |A^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon, v; x)| \leq C.
$$

c) 任意の$\lambda \in K$，$\varepsilon > 0$，$r > R$，$\omega \in S^{N-1}$に対し，

$$
(3.10) \qquad \begin{aligned} \Big| & A^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon, v; r\omega) \\ & - (2\pi)^{(N+1)/2} e^{\mp \pi i(N+1)/4} e^{\mp \varepsilon r t_{\pm}(r,\omega,\lambda)} r^{-(N-1)/2} \\ & \times e^{irf(r,\omega,\lambda;\, \xi_{\pm}(r,\omega,\lambda),\, t_{\pm}(r,\omega,\lambda))} v(\xi_{\pm}(r,\omega,\lambda), r t_{\pm}(r,\omega,\lambda)) \\ & \times |\det J(r,\omega,\lambda;\, \xi_{\pm}(r,\omega,\lambda),\, t_{\pm}(r,\omega,\lambda))|^{-1/2} \Big| \end{aligned}
$$

$$\leq C r^{-(N-1)/2-1-h}.$$

但し，f，J，$\xi^{\pm}$，$t^{\pm}$ は命題2.2のもの．

この定理は stationary phase method を用いて証明されるが，かなり長くなるので証明は割愛する．

補題3.3より，$Q^{\pm}(z)u$ は (3.5)を用いて，

$$\tag{3.11} \begin{aligned}&(Q^{\pm}(z)u)(x)\\ &= \pm i(2\pi)^{-N/2}\{J(x)A^{\pm}(z,\hat{u};x) - A^{\pm}(z,(\partial_t X)(\cdot,t)\hat{u}(\cdot);x)\}\end{aligned}$$

と書けるから，定理3.4より次をうる．

<u>命題3.5.</u> 仮定1.1が $K_0=[(N+7)/\varepsilon_0]$ としてみたされるとする．$u\in\mathcal{D}$ とする．このとき次が成り立つ．

i) 任意の正数 ε に対し，正定数 C があって，任意の λ，$\lambda'\in R^1$，x，$x'\in R^N$ に対し，

$$|(Q^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)u)(x) - (Q^{\pm}(\lambda'\pm i\varepsilon)u)(x')| \leq C(|\lambda-\lambda'|+|x-x'|).$$

ii) 任意の $\lambda\in R^1$，$x\in R^N$ に対し，極限

$$(Q^{\pm}(\lambda)u)(x) \equiv \lim_{\varepsilon\to+0}(Q^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)u)(x)$$

が存在する．

iii) ある正定数 C があって，任意の $\varepsilon\geq 0$，$\lambda\in R^1$，$x\in R^N$ に対して，

$$|(Q^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)u)(x)| \leq C(1+|x|)^{-(N-1)/2-1-\varepsilon_0}(1+|\lambda|)^{-1}.$$

<u>証明.</u> i)，ii) は定理3,4，(3.11) より明らか．iii) は定理3.4，(3.11)，及び，関係式

(3.12) $$V(r\omega)=(\partial_t X)(\xi^{\pm}_{c}(r,\omega,\lambda),\ r t^{\pm}_{c}(r,\omega,\lambda))$$
（十分大なる r に対して成り立つ）を使って導かれる．((3.12) は (2.2), (1.4) よりえられる．)　　（証明終）

これより，次の定理がいえた．

<u>定理3.6.</u> 仮定1.1が $K_0=[(N+7)/\varepsilon_0]$ としてみたされるとする．$1/2<\delta<1/2+\varepsilon_0$ とする．このとき，任意の $u\in\mathcal{D}$, $\lambda\in R^1$, $\varepsilon>0$ に対し，$Q^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)u\in L^2_{\delta}(R^N)$, 且，極限

(3.13) $$Q^{\pm}(\lambda)u\equiv\lim_{\varepsilon\to+0}Q^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)u$$
が $L^2_{\delta}(R^N)$ において存在する．さらに，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$Q^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)u\in L^2(R^1_{\lambda};L^2_{\delta}(R^N))$ で，極限

(3.14) $$\underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{l.i.m.}}\ Q^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)u$$
が $L^2(R^1_{\lambda};L^2_{\delta}(R^N))$ において存在する．

定理3.4を使えば，さらに次のことが証明できる．

<u>定理3.7.</u> 仮定1.1が $K_0=[(N+7)/\varepsilon_0]$ としてみたされるとする．このとき，任意の $\lambda>0$, $u\in\mathcal{D}$ に対し，$\mathfrak{h}=L^2(S^{N-1})$ において，

(3.15) $$\mathcal{F}^{\pm}_2(\lambda)G^{\pm}(\lambda)u=\mathcal{F}^{\pm}_1(\lambda)u=2^{-N/2}\lambda^{(N-2)/4}e^{\mp\pi i(N-1)/4}\hat{u}(\pm\sqrt{\lambda}\,\omega)$$
が成り立つ．但し，$\mathcal{F}^{\pm}_j(\lambda)$ は定義2.8で，$\gamma=\delta$ $(1/2<\delta<1/2+\varepsilon_0)$ としたもの．また，$G^{\pm}(\lambda)u=u+Q^{\pm}(\lambda)u$.

<u>証明.</u> 定理3.4, 2.6, 2.7と命題2.2の評価(2.3)を使えばできる．　　（証明終）

さて，stationary wave operator を構成するため少し準備をしよう．（以下の定義は加藤敏夫，黒田成俊両氏[5]，[6]に負う．）

以下 δ は $1/2<\delta<1/2+\varepsilon_0$ ととって固定する．$\mathcal{X}_1=\mathcal{D}$ とおき，$\mathcal{X}_1$ に $L^2_\delta(R^N)$ のノルムを入れておく．また $\mathcal{X}_2=L^2_\delta(R^N)$ とおく．任意の $\lambda>0$，$x, y\in\mathcal{X}_j$ に対し，定理2.6より，

(3.16) $$e_j(\lambda;x,y)=(\{R_j(\lambda+i0)x-R_j(\lambda-i0)x\},y)_{\mathcal{H}}/2\pi i$$

が定義できる．容易に示されるように，これは次の3条件をみたす．但し，Γ は $\bar{\Gamma}\subset(0,\infty)$ なる有界Borel集合．

1° 任意の $x,y\in\mathcal{X}_j$ に対し，$e_j(\cdot\,;x,y)\in L^1(\Gamma)$．さらに，任意の Γ のBorel集合 Δ に対し，

(3.17) $$\int_\Delta e_j(\lambda;x,y)\,d\lambda=(E_{j,ac}(\Delta)x,y)_{\mathcal{H}}.$$

2° 任意の $\lambda\in\Gamma$ に対し，$e_j(\lambda;\cdot,\cdot)$ は $\mathcal{X}_j\times\mathcal{X}_j$ 上の非負Hermite形式である．

3° 正定数Cがあって，任意の $\lambda\in\Gamma$，$x,y\in\mathcal{X}_j$ に対し，

(3.18) $$|e_j(\lambda;x,y)|\leq C\,\|x\|_{\mathcal{X}_j}\|y\|_{\mathcal{X}_j}.$$

さて，$\mathcal{N}_j(\lambda)=\{x\in\mathcal{X}_j\mid e_j(\lambda;x,x)=0\}$ とし，$\mathcal{X}_j(\lambda)=\mathcal{X}_j/\mathcal{N}_j(\lambda)$ とおくと，$\mathcal{X}_j(\lambda)$ は $e_j(\lambda;\cdot,\cdot)$ によって誘導される内積に関し，pre-Hilbert空間をなす．$\mathcal{X}_j(\lambda)$ の完備化を $\tilde{\mathcal{X}}_j(\lambda)$ で表わし，その内積，ノルムを $(\ ,\ )_{j,\lambda}$，$\|\ \|_{j,\lambda}$ で表わす．上述3°より，標準的埋め込み $J_j(\lambda):\mathcal{X}_j\to\tilde{\mathcal{X}}_j(\lambda)$ は有界作用素で，$J_j(\lambda)\mathcal{X}_j$

$=\mathfrak{X}_j(\lambda)$ となる．$\tilde{\mathfrak{X}}_j=\prod_{\lambda\in\Gamma}\tilde{\mathfrak{X}}_j(\lambda)$（直積）とおく．$\Gamma$ から $\mathfrak{X}_j$ への単関数全体のなす線型空間を $\mathcal{S}_j$ で表わす．$g\in\tilde{\mathfrak{X}}_j$ が E_j－可測であるとは，単関数の列 $\{h_n\}\subset\mathcal{S}_j$ があって，殆んど至るところの $\lambda\in\Gamma$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty}\|g(\lambda)-J_j(\lambda)h_n(\lambda)\|_{j,\lambda}=0$$

が成り立つことをいう．今，

(3.19) $\quad \mathfrak{M}_j=\{g\in\tilde{\mathfrak{X}}_j \mid g$ は E_j－可測で，

$$\|g\|_{\mathfrak{M}_j}=\Big[\int_\Gamma\|g(\lambda)\|_{j,\lambda}^2\,d\lambda\Big]^{1/2}<\infty\}$$

とおくと，$\mathfrak{M}_j$ は $\|\ \|_{\mathfrak{M}_j}$ をノルムとする複素 Hilbert 空間となる．また，$J_j\mathcal{S}_j$ は $\mathfrak{M}_j$ の稠密な部分空間をなす．このとき，次の命題が成り立つ（[5]，[6] 参照）．

<u>命題3.8.</u> 仮定1.1が $K_0=4$ としてみたされるとする．このとき，ユニタリ作用素 $\pi_j:\mathcal{H}_{j,ac}(\Gamma)\longrightarrow\mathfrak{M}_j$ が存在して次をみたす．

a) 任意の R^1 の Borel 集合 Δ，及び，$u\in\mathcal{H}_{j,ac}(\Gamma)$ に対し，
$\pi_j E_{j,ac}(\Delta)u=\{\chi_\Delta(\lambda)(\pi_j u)(\lambda)\}_{\lambda\in\Gamma}$．

b) 任意の $x\in\mathfrak{X}_j$ に対し，$\pi_j E_{j,ac}(\Gamma)x=\{J_j(\lambda)x\}_{\lambda\in\Gamma}$．
但し，$\mathcal{H}_{j,ac}(\Gamma)\equiv E_{j,ac}(\Gamma)\mathcal{H}$．

さて，本節の主定理を証明しよう．

<u>定理3.9.</u> 仮定 1.1 が $K_0=[(N+7)/\varepsilon_0]$ としてみたされるとする．このとき，次の2条件をみたすユニタリ作用素 $\mathcal{F}^{\pm}$:

$\mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ が唯一つ存在する．

a) 任意の Γ の Borel 集合 Δ，及び，$u \in \mathfrak{M}_1$ に対し，

$$\hat{G}^{\pm}\{\chi_\Delta(\lambda)u(\lambda)\}_{\lambda\in\Gamma} = \{\chi_\Delta(\lambda)(\hat{G}^{\pm}u)(\lambda)\}_{\lambda\in\Gamma}. \tag{3.20}$$

b) 任意の $x \in \mathfrak{X}_1$ に対し，

$$\hat{G}^{\pm}\{J_1(\lambda)x\}_{\lambda\in\Gamma} = \{J_2(\lambda)G^{\pm}(\lambda)x\}_{\lambda\in\Gamma}. \tag{3.21}$$

（但し，$G^{\pm}(\lambda)$ は定理3.7で定義したもの．）

この $\hat{G}^{\pm}$ によって，

$$W_\Gamma^{\pm} = \begin{cases} \pi_2^{-1}\hat{G}^{\pm}\pi_1 & ; \mathcal{H}_{1,ac}(\Gamma) \text{ 上}, \\ 0 & ; \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{1,ac}(\Gamma) \text{ 上} \end{cases} \tag{3.22}$$

と定義すると，$W_\Gamma^{\pm}$ は始集合 $\mathcal{H}_{1,ac}(\Gamma)$，終集合 $\mathcal{H}_{2,ac}(\Gamma)$ なる $\mathcal{H}$ における部分等距離作用素となり，次の２条件をみたす．

i) 任意の Borel 集合 $\Delta \subset R^1$ に対し，

$$W_\Gamma^{\pm}E_1(\Delta) = E_2(\Delta)W_\Gamma^{\pm}. \tag{3.23}$$

ii) 任意の $x \in \mathfrak{X}_1$，$y \in \mathfrak{X}_2$，及び，Borel 集合 $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Gamma$ に対し，

$$(W_\Gamma^{\pm}E_{1,ac}(\Delta_1)x, E_{2,ac}(\Delta_2)y)_{\mathcal{H}} = \int_{\Delta_1\cap\Delta_2} e_2(\lambda; G^{\pm}(\lambda)x, y)\,d\lambda. \tag{3.24}$$

証明．$\hat{G}^{\pm}$の存在がいえれば，i), ii) は a), b)，及び，命題3.8より容易に示される．また a), b) をみたす $\hat{G}^{\pm}$ の一意性も容易であるので存在のみを証明する．

$\mathfrak{X}_j(\lambda)$ が $\hat{\mathfrak{X}}_j(\lambda)$ で稠密なこと，及び，命題2.9より，任意の λ

$\in \Gamma$, $x \in \mathfrak{X}_j$ に対し, $\mathfrak{F}_j^{\pm}(\lambda)x = F_j^{\pm}(\lambda)J_j(\lambda)x$ をみたす等距離作用素 $F_j^{\pm}(\lambda): \tilde{\mathfrak{X}}_j(\lambda) \to h_j = L^2(S^{N-1})$ の存在がいえる. さらに, 定理3.7より, $F_1^{\pm}(\lambda)$ はユニタリとなり, 従って, 同じく定理3.7より $F_2^{\pm}(\lambda)$ もユニタリとなる. ゆえに, $\hat{G}^{\pm}(\lambda) \equiv F_2^{\pm}(\lambda)^* F_1^{\pm}(\lambda)$ は $\tilde{\mathfrak{X}}_1(\lambda) \to \tilde{\mathfrak{X}}_2(\lambda)$ なるユニタリ作用素となる. 今, 任意の $\varphi \in J_1 \mathcal{S}_1$ に対し, $\hat{G}^{\pm}\varphi = \{\hat{G}^{\pm}(\lambda)\varphi(\lambda)\}_{\lambda \in \Gamma}$ と定義する. すると $x \in \mathfrak{X}_1$ のとき, $\hat{G}^{\pm}J_1 x = \{\hat{G}^{\pm}(\lambda)J_1(\lambda)x\}_{\lambda \in \Gamma} = \{F_2^{\pm}(\lambda)^* \mathfrak{F}_1^{\pm}(\lambda)x\}_{\lambda \in \Gamma}$ $= \{F_2^{\pm}(\lambda)^* \mathfrak{F}_2^{\pm}(\lambda) G^{\pm}(\lambda)x\}_{\lambda \in \Gamma} = \{J_2(\lambda)G^{\pm}(\lambda)x\}_{\lambda \in \Gamma}$ であるから, $G^{\pm}(\lambda)x$ が $\lambda \in \Gamma$ につき強可測(定理3.6参照)なことと, $J_2(\lambda)$ が有界なことより, $\hat{G}^{\pm}\varphi \in \mathfrak{M}_2$ がいえる. さらに $\hat{G}^{\pm}(\lambda)$ はユニタリゆえ, $\hat{G}^{\pm}$ は $\mathfrak{M}_1$ から $\mathfrak{M}_2$ への等距離作用素に拡張される. $\hat{G}^{\pm}$ が onto であることをいおう. それには, $v \in \mathfrak{M}_2$ が任意の $\varphi \in J_1 \mathcal{S}_1$ に対し, $(\hat{G}^{\pm}\varphi, v)_{\mathfrak{M}_2} = 0$ をみたすなら, $v = 0$ であることをいえばよい. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathfrak{X}_1$ の稠密な可算集合とすると, 仮定より, 任意の k, Borel集合 $\Delta \subset \Gamma$ に対し, $(\hat{G}^{\pm}J_1 \chi_\Delta x_k, v)_{\mathfrak{M}_2} = 0$ が成り立つ. 書き換えれば,

$$\int_\Delta (\hat{G}^{\pm}(\lambda)J_1(\lambda)x_k, v(\lambda))_{2,\lambda}\, d\lambda = 0.$$

Δ は任意, 且, $\{x_k\}$ は可算ゆえ, Γ のある Borel 集合 A で, $\Gamma - A$ の測度が 0, 且, 任意の $\lambda \in A$ に対し, $(\hat{G}^{\pm}(\lambda)J_1(\lambda)x_k, v(\lambda))_{2,\lambda} = 0$ なるものがある. $\hat{G}^{\pm}(\lambda)$ はユニタリ, また, $\{J_1(\lambda)x_k\}_{k=1}^{\infty}$ は $\tilde{\mathfrak{X}}_1(\lambda)$ で稠密であるから, これより, 任意の λ

$\in A$に対し，$v(\lambda)=0$ がえられる．従って，$\mathfrak{M}_2$において，$v=0$．よって$\hat{G}^{\pm}$は$\mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$なるユニタリ作用素である．$\hat{G}^{\pm}$がa)をみたすことは定義より明らか．b)をみたすことはすでに上で示した．（証明終）

§4. Time dependent wave operatorとの関係，及び，Invariance principle（定理1.5，1.6の証明）．

本節では，前節の定理3.9で構成したstationary wave operator $W_{S}^{\pm}$と，time dependent wave operator $W_{D}^{\pm}$との関係を考察する．また，Invariance principleについても簡単に触れる．

<u>定義4.1.</u> 任意の$z \in \mathbb{C}^{\pm}$，$u \in \mathcal{H}=L^2(R^N)$，$v \in \mathcal{D}(H_1)$に対し，

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \tau^{\pm}(z)u = (S^{\pm}(z)-S^{\mp}(\bar{z}))u/2\pi i, \\ D^{\pm}(z)v = (G^{\pm}(z)-G^{\mp}(\bar{z}))v/2\pi i \\ \qquad\qquad = (Q^{\pm}(z)-Q^{\mp}(\bar{z}))v/2\pi i, \\ \delta_2(z)u = \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, z)(R_2(z)-R_2(\bar{z}))u/2\pi i. \end{cases}$$

次のことは容易にわかる．

<u>補題4.2.</u> 仮定1.1が$K_0=4$としてみたされるとする．$z \in \mathbb{C}^{\pm}$，$u \in \mathcal{D}(H_1)$に対し，

$$(4.2)\qquad \tau^{\pm}(z)u = \pm\delta_2(z)G^{\pm}(z)u + R_2(\bar{z})D^{\pm}(z)u.$$

<u>補題4.3.</u> 仮定1.1が$K_0=4$としてみたされるとする．こ

のとき，$\mathcal{H}_2=L^2_\delta(R^N)$ における非負自己共役有界作用素 $K_2(\lambda)$，$\lambda\in\Gamma$，が存在して次をみたす。

i) 任意の $y\in\mathcal{H}_2$ に対し，$K_2(\cdot)y:\Gamma\to\mathcal{H}_2$ は強連続。

ii) 任意の $z,y\in\mathcal{H}_2$，$\lambda\in\Gamma$ に対し，

$$e_2(\lambda;z,y)=(K_2(\lambda)z,y)_{\mathcal{H}_2}=(z,K_2(\lambda)y)_{\mathcal{H}_2}.$$

iii) $\sup_{\lambda\in\Gamma}\|K_2(\lambda)\|_{B(\mathcal{H}_2)}<\infty.$

さて，我々の key point となる命題を証明しよう。

<u>命題4.4.</u> 仮定1.1が $K_0=[(N+7)/\varepsilon_0]$ としてみたされるとする。α を $\operatorname{supp}\alpha\subset\Gamma$ なる R^1 上の有界可測関数とする。このとき，任意の $x\in\mathcal{H}_1=\mathcal{D}$，$y\in\mathcal{H}_2=L^2_\delta(R^N)$，$\varepsilon>0$ に対して，

$$(4.3)\qquad (\tau^\pm(\lambda\pm i\varepsilon)x,\alpha(H_{2,ac})y)_{\mathcal{H}}\in L^1(R^1_\lambda).$$

さらに，$\Psi\in L^\infty(R^1)$ とすると，次式中の極限が存在して，

$$(4.4)\qquad \left|\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\lambda)(\tau^\pm(\lambda\pm i\varepsilon)x,\alpha(H_{2,ac})y)_{\mathcal{H}}\,d\lambda \mp\int_\Gamma \Psi(\lambda)\overline{\alpha(\lambda)}\,e_2(\lambda;G^\pm(\lambda)x,y)\,d\lambda\right|^2$$

$$\leq C(x)\|\Psi\|^2_{L^\infty(R^1)}\int_0^\infty\left\|\int_\Gamma\alpha(\lambda)e^{\mp i\sigma\lambda}K_2(\lambda)y\,d\lambda\right\|^2_{\mathcal{H}_2}d\sigma$$

が成り立つ。但し，$C(x)$ は x のみによる正定数。

<u>証明.</u> 今，

$$\left\{\ A^\pm_{1,\varepsilon}(\lambda)=e_2(\lambda\pm i\varepsilon;x,\alpha(H_{2,ac})y),\right.$$

$$(4.5)\quad \begin{cases} A^{\pm}_{2,\varepsilon}(\lambda) = e_2(\lambda \pm i\varepsilon\,;\, Q^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x,\ \alpha(H_{2,ac})y), \\ A^{\pm}_{3,\varepsilon}(\lambda) = (D^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x,\ R_2(\lambda \pm i\varepsilon)\alpha(H_{2,ac})y)_{\mathcal{H}} \end{cases}$$

とおく．但し，$z \in \mathbb{C}^{\pm}$，$u, v \in \mathcal{H}$ に対し，

$$e_2(z\,;\, u, v) \equiv (\delta_2(z)u, v)_{\mathcal{H}}.$$

すると，補題 4.2 より，

$$(4.6)\quad \begin{aligned} &(\tau^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x, \alpha(H_{2,ac})y)_{\mathcal{H}} \\ &\quad = \pm A^{\pm}_{1,\varepsilon}(\lambda) \pm A^{\pm}_{2,\varepsilon}(\lambda) + A^{\pm}_{3,\varepsilon}(\lambda) \end{aligned}$$

がえられる．

まず，$A^{\pm}_{1,\varepsilon}$ を考えよう．これは，

$$(4.7)\quad A^{\pm}_{1,\varepsilon}(\lambda) = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda-\mu)^2+\varepsilon^2}\,\overline{\alpha(\mu)}\,e_2(\mu\,;\, x, y)\,d\mu$$

と書けるから，Poisson 積分の性質より，$L^1(R^1)$ において極限 $\lim_{\varepsilon \to +0} A^{\pm}_{1,\varepsilon}$ が存在して，

$$(4.8)\quad \overline{\alpha(\lambda)}\,e_2(\lambda\,;\, x, y)$$

に等しい．

次に，$A^{\pm}_{2,\varepsilon}$ を考える．これは，

$$(4.9)\quad A^{\pm}_{2,\varepsilon}(\lambda) = (Q^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x,\ \delta_2(\lambda)\alpha(H_{2,ac})y)_{\mathcal{H}}$$

と書ける．但し，$\delta_2(\lambda)$ は $\delta_2(\lambda \pm i\varepsilon)$ の境界値を表わす．定理 3.6 より，$L^2(R^1_\lambda\,;\, L^2_\delta(R^N))$ において，$\operatorname*{l.i.m.}_{\varepsilon \to +0} Q^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x$ が存在する．また定理 2.6 と Lavine 氏 [9] の結果を用いれば，$L^2(R^1_\lambda\,;\, L^2_{-\delta}(R^N))$ において，極限 $\operatorname*{l.i.m.}_{\varepsilon \to +0} \delta_2(\lambda \pm i\varepsilon)\alpha(H_{2,ac})y$ の存在がいえる．従って，$L^1(R^1)$ において，$\lim_{\varepsilon \to +0} A^{\pm}_{2,\varepsilon}$ が存在す

る．ゆえに，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\lambda)A^{\pm}_{2,\varepsilon}(\lambda)d\lambda=\left(\int_{\Gamma}+\int_{R^1-\Gamma}\right)\Psi(\lambda)\lim_{\varepsilon\to+0}A^{\pm}_{2,\varepsilon}(\lambda)d\lambda$$

が得られるが，これの右辺第2項は0に等しいことが，

$$\lim_{m\to\infty}\delta_2(\lambda\pm i\varepsilon_m)\alpha(H_{2,ac})y=0,\quad \text{a.e. }\lambda\in\Gamma$$

よりいえる．但し，$\{\varepsilon_m\}$ は $\varepsilon_m\to+0\ (m\to\infty)$ なる適当な正数列．また，同様の正数列 $\{\varepsilon_m\}$ をとると，a.e. $\lambda\in\Gamma$ に対し，

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}e_2(\lambda\pm i\varepsilon_m;Q^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon_m)x,\alpha(H_{2,ac})y)\\&\qquad=\overline{\alpha(\lambda)}\,e_2(\lambda;Q^{\pm}(\lambda)x,y)\end{aligned}$$

が成り立つことがいえる．これらより，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\lambda)A^{\pm}_{2,\varepsilon}(\lambda)d\lambda=\int_{\Gamma}\Psi(\lambda)\overline{\alpha(\lambda)}\,e_2(\lambda;Q^{\pm}(\lambda)x,y)d\lambda \tag{4.10}$$

が得られる．

最後に，$A^{\pm}_{3,\varepsilon}$ を考えよう．これは，

$$A^{\pm}_{3,\varepsilon}(\lambda)=\int_{\Gamma}\frac{1}{\mu-(\lambda\mp i\varepsilon)}\overline{\alpha(\mu)}\,e_2(\mu;D^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)x,y)d\mu \tag{4.11}$$

と書ける．補題4.3を使えば，これは，

$$(D^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)x,\ h^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon))_{\mathscr{H}_2}$$

に等しいことがいえる．但し，

$$h^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)=\int_{\Gamma}\frac{1}{\mu-(\lambda\pm i\varepsilon)}\alpha(\mu)K_2(\mu)y\,d\mu$$

は $\mathscr{H}_2=L^2_\delta(R^N)$ における積分である．補題4.3，及び，α が有界なことを用いれば，$\operatorname*{l.i.m.}_{\varepsilon\to+0}h^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)$ が $L^2(R^1_\lambda;L^2_\delta(R^N))$ において存在することが示される．他方，定理3.6より，

$\operatorname*{l.i.m.}_{\varepsilon\to+0}D^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)x$ が $L^2(R^1_\lambda;L^2_\delta(R^N))$ において存在すること

がわかるから，まとめて，$L^1(R^1)$ において $\lim_{\varepsilon\to+0} A^{\pm}_{3,\varepsilon}$ が存在することがわかる．さらに，Hilbert 空間値関数に対する Fourier 変換を用いて，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| \underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{l.i.m.}}\, h^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon) \|^2_{\mathcal{H}_2}\, d\lambda$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \left\| \int_{\Gamma} \alpha(\lambda)\, e^{\mp i s\lambda} K_2(\lambda) y\, d\lambda \right\|^2_{\mathcal{H}_2} ds$$

がいえる．以上より，

$$(4.12)\qquad \left| \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\lambda) A^{\pm}_{3,\varepsilon}(\lambda)\, d\lambda \right|^2$$

$$\leq C(x) \|\Psi\|^2_{L^{\infty}(R^1)} \int_0^{\infty} \left\| \int_{\Gamma} \alpha(\lambda)\, e^{\mp i s\lambda} K_2(\lambda) y\, d\lambda \right\|^2_{\mathcal{H}_2} ds$$

が得られる．但し，

$$C(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \| \underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{l.i.m.}}\, D^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon) x \|^2_{\mathcal{H}_2}\, d\lambda .$$

以上 (4.8), (4.10), (4.12) と (4.6), (4.5) より，(4.3), (4.4) がいえる．

（証明終）

さて定理 1.5 を証明しよう．命題 4.4 において，$\Psi(\lambda) = e^{it\lambda}$，$\alpha(\lambda) = e^{-it\lambda}\chi_{\Delta}(\lambda)$ とおく．但し，Δ は Γ の任意の Borel 集合．すると，(4.4) より，

$$\Bigg| \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (\tau^{\pm}(\lambda\pm i\varepsilon)x,\, e^{-itH_2} E_{2,ac}(\Delta) y)_{\mathcal{H}}\, d\lambda$$

$$(4.13)\qquad \mp \int_{\Delta} e_2(\lambda; G^{\pm}(\lambda)x, y)\, d\lambda \Bigg|^2$$

$$\leq C(x) \int_0^{\infty} \left\| \int_{\Gamma} \chi_{\Delta}(\lambda)\, e^{-it\lambda \mp i s\lambda} K_2(\lambda) y\, d\lambda \right\|^2_{\mathcal{H}_2} ds$$

がえられる．定理3.9より，左辺| |内第2項は，$\mp(W_\Gamma^\pm x,$ $E_{2,ac}(\Delta)y)_{\mathcal{H}}$ に等しい．また第1項は，Fourier変換を使って，$\pm(W_D(t)x, E_{2,ac}(\Delta)y)_{\mathcal{H}}$ に等しいことがいえる．但し，$W_D(t)=e^{itH_2}e^{-itH_1-iX(t)}$．他方，(4.13)の右辺は，$t\to\pm\infty$ の時0に収束するから次を得る：任意の $x\in\mathcal{H}_1$, $y\in\mathcal{H}_2$, Γ のBorel集合Δに対し，

$$\lim_{t\to\pm\infty}((W_D(t)-W_\Gamma^\pm)x, E_{2,ac}(\Delta)y)_{\mathcal{H}}=0.$$

これと，$e^{-isH_2}x$ $(x\in\mathcal{H}_1, s\in R^1)$ が$\mathcal{H}$の基本集合をなすこと，及び，$\mathcal{H}$において $\lim_{t\to\pm\infty} e^{i(X(t+s)-X(t))}u=u$ $(s\in R^1,$ $u\in\mathcal{H})$ であることを使えば，任意の $u\in\mathcal{H}$ に対し極限 $\lim_{t\to\pm\infty} W_D(t)E_{1,ac}(\Gamma)u$ が$\mathcal{H}$において存在して，$W_\Gamma^\pm u$ に等しいことがいえる．Γは $\overline{\Gamma}\subset(0,\infty)$ なる任意の有界Borel集合であったから，極限(1.8)の存在，及び，$\mathcal{R}(W_D^\pm)=\mathcal{H}_{2,ac}$ がいえた．($\mathcal{R}(T)$は作用素Tの値域を表わす.)

次に，Invariance principle について簡単に触れておこう．まず，次のことを証明なしで認めよう．(詳細は[8]参照.)

命題4.5. 仮定1.1が$K_0=7$としてみたされるとする．このとき，$\mathcal{H}_{1,ac}(\Gamma)$から$\mathcal{H}$への等距離作用素 $Q_\varphi^{a\infty}(t)$, $t\in R^1$，が存在して，

$$(4.14)\qquad \lim_{t\to\pm\infty}(Q_\varphi^{a\infty}(t)u-Q_\varphi(t)u)=0,\quad u\in\mathcal{H}_{1,ac}(\Gamma)$$

をみたす．

さて，命題4.4において，$\Psi(\lambda)=e^{-it\varphi(\lambda)}\eta(\lambda)$，$\alpha(\lambda)=e^{-it\varphi(\lambda)}$
$\times\chi_\Delta(\lambda)$，$\Delta\subset\Gamma$，とおくと，(4.4)より，

$$\lim_{t\to\pm\infty}(W_\varphi(t)x-W_\pm x,\ E_{2,ac}(\Delta)y)_{\mathcal{H}}=0$$

が得られる．但し，$x\in\mathcal{H}_1$，$y\in\mathcal{H}_2$，及び，

$$W_\varphi(t)=e^{it\varphi(H_2)}Q_\varphi(t).$$

これと(4.14)を合わせて，定理1.6を得る．

参 考 文 献

[1] L. Hörmander, The existence of wave operators in scattering theory, Math. Z., 146(1976), 69 - 91.

[2] T. Ikebe, Spectral representation for Schrödinger operators with long-range potentials, II, perturbation by short-range potentials, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 11(1976), 551 - 558.

[3] T. Ikebe and Y. Saitō, Limiting absorption method and absolutely continuity for Schrödinger operators, J. Math. Kyoto Univ., 12(1972), 513 - 542.

[4] H. Isozaki, On the long-range stationary wave operator, (to appear).

[5] T. Kato and S. T. Kuroda, The abstract theory of scattering, Rocky Mount. J. Math., 1(1971), 127 - 171.

[6] ——— , Theory of simple scattering and eigenfunction expansions, Functional Analysis and Related Fields, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, and New York, 1970, 99 - 131.

[7] H. Kitada, Scattering theory for Schrödinger operators with long-range potentials, I, abstract theory, (to appear).

[8] ——— , Scattering theory for Schrödinger operators with long-range potentials, II, spectral and scattering theory, (to appear).

[9] R. Lavine, Absolute continuity of positive spectrum for Schrödinger operators with long-range potentials, J. Functional Analysis, 12(1973), 30 - 54.

[10] G. Pinchuk, Abstract time-independent wave operator theory for long-range potentials, (preprint, 1975).

[11] Y. Saitō, On the asymptotic behavior of the solutions of the Schrödinger equation $(-\Delta + Q(y) - k^2) = F$, (to appear).

[12] ——— , Eigenfunction expansions for the Schrödinger operators with long-range potentials $Q(y) = O(|y|^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, (to appear).