数理解析研究所講究録
309巻 1977年 1-8

単純な Heegaard 分解について

神戸大 教養部 柳川高明

V, W を solid torus，M を可符号3次元多様体とし，$M = V \cup W$，$V \cap W = \partial V = \partial W$ である Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ を考える。V, W 各々の標準的な merid-ian 系 $(v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n)$，$(w_1, w_2, \cdots\cdots, w_n)$（図1参照）についての条件 (s) を次のように定める。

(s) 各 i $(1 \leqq i \leqq n)$ にたいし，$v_i \cap w_j \neq \phi$ なる w_j $(1 \leqq j \leqq n)$ は高々3個であり，それら3個は互に異なっている。

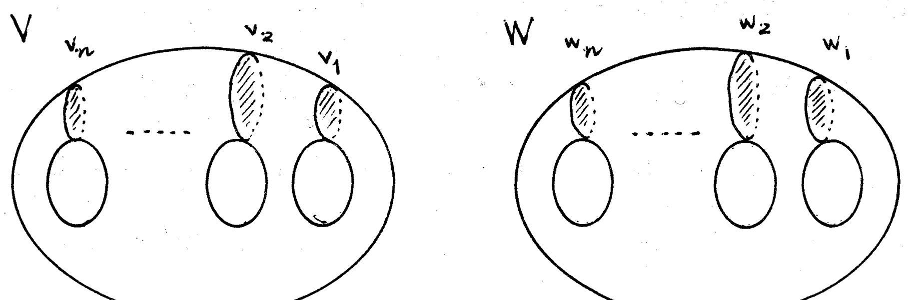


図 1

命題. 任意の可符号閉3次元多様体 M にたいして、単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ が存在する。

上の命題は、M の任意の Heegaard 分解を Wald-hausen の方法によって genus を増してやることにより容易に証明しうる,(WALDHAUSEN 参照)。

W の標準的な longitude 系 $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ を図2のように定める、各 x_j 上の1点と ∂W 上の定点 p とを結ぶ

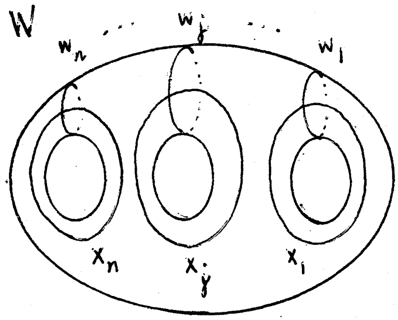


図 2

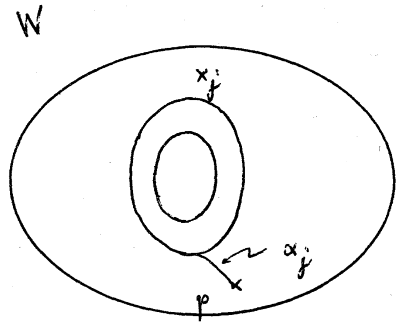


図 2′

弧 α_j に適当に方向を与えたものを、同じく x_j で表すことにすると、$\pi_1(W)$ は $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ を生成元とする free group (rank n) であり、閉曲線 ∂V_i の表す $\pi_1(W)$ の元 (v_i) はこれら $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ で表される。このとき、$|(v_i)|$ を (v_i) を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ で表した場合の x_* の個数とする。例えば $(v_i) = x_1 x_2^{-1} x_3$ のとき、

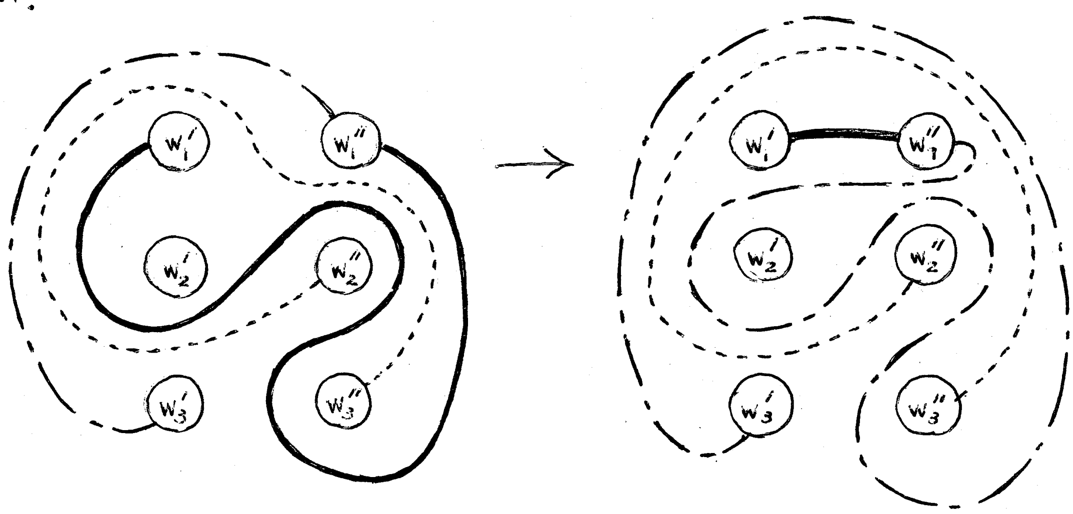
$|(v_i)| = 3$ である。このとき，次の命題は明らかである。

<u>命題</u> M の単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ では，各 i $(1 \leqq i \leqq n)$ について $|(v_i)| \leqq 3$ であるとしてよい。さらに，(v_i) は $\pi_1(W)$ の元として $(v_i) = x_j^{\lambda} x_k^{\mu} x_l^{\nu}$ $(j \neq k \neq l \neq j,\ \lambda, \mu, \nu$ は $1, 0, -1$) である。

<u>補題1</u> M の単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ が $|(v_i)| = 1$ なる v_i $(1 \leqq i \leqq n)$ をもっているならば，M の単純な Heegaard 分解 $\{V', W', M\}$ で V' の genus $<$ V の genus であるものを作ることができる。

証明 $|(v_1)| = 1$ としておく。$(v_1) = x_1$ と仮定してよい。W を $w_1, w_2, \cdots\cdots, w_n$ で切り開いてできる球 B の表面には，2n 個の円板 w_1', w_1'', w_2', w_2'', $\cdots\cdots$, w_n', w_n'' がある。このとき，∂v_1 は B の表面上で w_1' と w_1'' を w_2', w_2'' $\cdots\cdots$ w_n', w_n'' と交わらずに結ぶ弧となっているから，B から B への homeomorphism で w_1'' を動かせて，∂v_1 を標準的な位置（図3参照）に移すことができる。このとき，他の ∂v_i $(i \neq 1)$ と w_1', w_1'' w_2', w_2'', $\cdots\cdots$, w_n', w_n'' の交点（実は，∂v_i をなす有限個の弧の端点）の位置は最終的には変化しな

い。



— ∂v_1 の弧

------ 他の ∂v_i の弧（または，その一部）

図 3.

先に切り開いた所を貼り合せて W に戻すと，元の ∂v_1, $\partial v_2, \cdots\cdots, \partial v_n$ は W の表面上の閉曲線の系 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$,（$u_1$ が ∂v_1 の移されたもの）に移ったことになる。各 u_i と w_j との交点は $u_i \cap w_j = v_i \cap w_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$ であり，u_1 は X_1 と重なっていると考えてよいから，$N(v_1, V)$ を W に貼ることにより，新らしい Heegaard 分解 $\{V', W', M\}$ を $V' = cl.\{V - N(v_1, V)\}$, $W' = W \cup N(v_1, V)$ として得ることができ，V' の genus $<$ V の genus である。

<u>注意</u> $u_i \cap w_j = v_i \cap w_j$ に注目すると $\pi_1(W)$ の元として，u_i の表す元 $(u_i) = (v_i)$ であり，$\pi_1(W')$ の元としては，

V' の meridian 系 $(v_2, v_3, \cdots\cdots, v_n)$ は $(v_i) = x_j^{\lambda} x_k^{\mu} x_l^{\nu}$ ($j \neq k \neq l \neq j$, λ, μ, ν は $0, 1, -1$ で x_1 は 1 と考える) の形で表される。

<u>補題2</u> M の単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ が条件 (a), (b), (c) を満たしているならば、M の単純な Heegaard 分解 $\{V', W', M\}$ で条件 (d) を満たすものを作ることができる。

(a) $n = g(V) = 3$ (b) $|(v_1)| = |(v_2)| = 2$

(c) (v_1), (v_2) に共通な元は唯一つ(それを x_1 とする)、

(d) 閉曲線 v_1, v_2 は標準的な位置にある(図4参照)

証明は先の補題1と同様な手順でできる。例えば、$(v_1) = x_1 x_2$ $(v_2) = x_2 x_3^{-1}$ の場合、W を w_1, w_2 w_3 で切り開いて B を作り、まず v_1 を標準的な位置に動かす。その結果 v_2 は新しく v_2' に動いてしまうが $v_1 \cap v_2 = \phi$ であり条件 (c) が満されているから、標準的な位置に動かされてある v_1 を固定したまゝ v_2' を標準的な位置に動かすことができる。一般に $n > 3$ の場合であっても、条件 (c) をもう少し精密に述べれば、$v_1, v_2, \cdots, v_m$ $(m < n)$ が同時に標準的な位置にあるような単純な Heegaard 分解を作りうる。

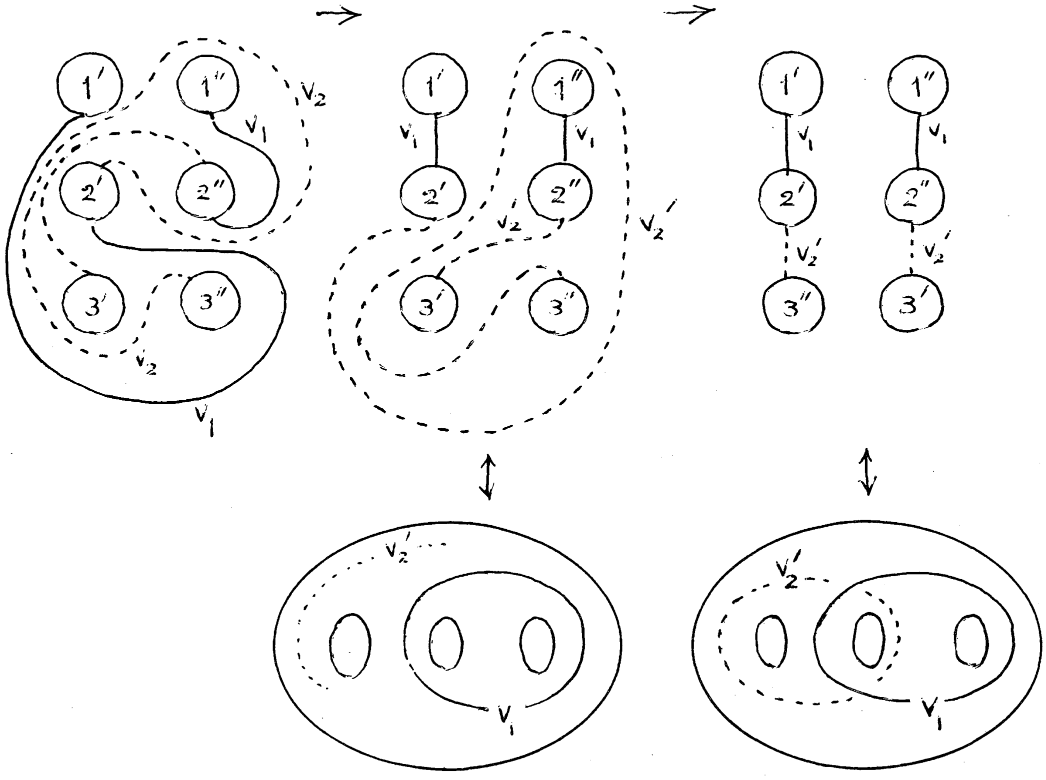


図4

補題3　$\pi_1(M)=1$ の多様体 M が genus 2 の単純な Heegaard 分解をもてば $M=S^3$ である。

$\pi_1(M)=(x_1, x_2 \mid (v_1)=1, (v_2)=1)$ であり，(v_1), (v_2) は x_1x_2, $x_1x_2^{-1}$, x_1, x_2 のどれかであり，$\pi_1(M)=1$ となるには，$|(v_i)|=1$ となる v_i が存在することが判るから補題1により，genus 1 の Heegaard 分解をもつ多様体になり，$M=S^3$ であることが結論される。

<u>定理</u>　$\pi_1(M)=1$ の多様体 M が genus 3 の単純な Heegaard 分解をもてば，$M=S^3$ である。

証明は次の各場合 (イ)，(ロ) の (i)〜( ) にわけて考える。

(イ) $|(v_i)|=1$ である v_i が存在する場合．この場合は補題1により，genus 2 の場合に帰着し，補題3により $M=S^3$ である。

(ロ) $|(v_i)|>1$ $(i=1,2,3)$ の場合，この場合，

$$\pi_1(M)=(x_1,x_2,x_3 \mid (v_1)=1,\ (v_2)=1,\ (v_3)=1)$$

であり，$(v_1),(v_2),(v_3)$ は次の 14 個の語の中のどれかである。x_1x_2, $x_1x_2^{-1}$, x_1x_3, $x_1x_3^{-1}$, x_2x_3, $x_2x_3^{-1}$, $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_3^{-1}$, $x_1x_2^{-1}x_3$, $x_1x_2^{-1}x_3^{-1}$, $x_1x_3x_2$, $x_1x_3x_2^{-1}$, $x_1x_3^{-1}x_2$, $x_1x_3^{-1}x_2^{-1}$ (以上 14 個)

(i) $|(v_i)|=3$ $(i=1,2,3)$ の場合，$\pi_1(M)=1$ とはなりえない。

(ii) $|(v_i)|=3$, $(i=1,2)$, $|(v_3)|=2$ の場合，も同じく $\pi_1(M)=1$ とはなりえない。

(iii) $|(v_1)|=3$, $|(v_i)|=2$ $(i=2,3)$ の場合，$\pi_1(M)=1$ となる場合は v_2, v_3 にたいして補題2を適用することができ，$V'=cl(V-N(v_2V)\cup N(v_3V))$, $W'=W\cup N(v_2V)\cup N(v_3V)$ として genus 1 の Heegaard 分解

$\{V', W', M\}$ がえられる，その結果 $M=S^3$ である。

(iv) $|(v_i)|=2$ $(i=1,2,3)$ の場合 $\pi_1(M)=1$ とはなりえない。　　以上

一般に，genus が高い場合でも単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ が $|(v_i)| \leqq 2$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n,\ n=g(V))$ を満たしている場合は，$\pi_1(M)=1$ ならば $M=S^3$ であることが次のようにして判る。すなはち，$|(v_i)|=1$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ならば $x_j \rightarrow (12)$ $(j=1,2,\cdots\cdots,n)$ によって $\pi_1(M) \rightarrow S_2$ が onto-map となり $\pi_1(M) \neq 1$ であるから，少なくとも一つ $|(v_i)|=1$ となる v_i が存在し，補題1を用いて逐次 Heegaard 分解の genus を下げて行くことができる。

WALDHAUSEN, F. : Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre, Topology 7 (1968), 195 − 203