数理解析研究所講究録
311巻 1977年 131-141

Resolution Vのbalanced fractional 3^m factorial designのinformation行列の固有多項式

海上保安大学校　来田正秀

§1、 序.

Resolution $2l+1$のbalanced fractional 2^m factorial (2^m-BFF) designのinformation行列の固有多項式は，山本・白倉・来田[8]によって求められた。2^m-BFF designの性質等については，白倉[5]，白倉・来田[6]，Srivastava & Chopra[7]等によって研究されている。

最近，Hoke[2]は，2nd ordered modelにおける3^m irregular fractionのinformation行列の固有多項式を求めている。またresolution Vの3^m-BFF designとbalanced array (B-array)の関係は，来田[4]によって求められた。

本稿では，multidimensional relationship (MDRS) algebraの直和分解を使って，resolution Vの3^m-BFF designの固有多項式を求める。

§2. Balanced array と balanced design.

m 個の factor $F_1, F_2, \cdots, F_m$ をもつ 3^m factorial design を考える。$(j_1, j_2, \cdots, j_m)$ を処理組合せとする。但し j_r は 0, 1, 2 のいずれかである $(r=1,2,\cdots,m)$。$y(j_1, j_2, \cdots, j_m)$, $\eta(j_1, j_2, \cdots, j_m)$ をそれぞれ観測値とその期待値とするとき，すべての parameter $\underline{\theta}$ $(3^m \times 1)$ は期待値の一次結合で定義出来る。

3 factor 以上の interaction は無視可能と仮定し，parameter $\underline{\theta}_\nu$ を次の様に並び変える：

(2.1) $\underline{\theta}_\nu = (\{\theta(\phi)\}, \{\theta(t^1)\}, \{\theta(t^2)\}, \{\theta(t_1^1 t_2^1)\}, \{\theta(t_1^2 t_2^2)\}, \{\theta(t_3^1 t_4^2)\})$

但し，$\nu = 1 + m + m + \binom{m}{2} + \binom{m}{2} + 2\binom{m}{2} = 1 + 2m^2$, $t_1 < t_2$, $t_3 \neq t_4$。

この時，処理組合せ $(j_1, j_2, \cdots, j_m)$ に対して

(2.2) $$\eta(j_1, j_2, \cdots, j_m) = \theta(\phi) + \sum_{\varepsilon=1}^{2} \sum_{t=1}^{m} d_{j_t}(\varepsilon)\, \theta(t^\varepsilon) + \sum_{\varepsilon=1}^{2} \sum_{t_1<t_2} d_{j_{t_1}}(\varepsilon)\, d_{j_{t_2}}(\varepsilon)\, \theta(t_1^\varepsilon t_2^\varepsilon) + \sum_{t_3 \neq t_4} d_{j_{t_3}}(1)\, d_{j_{t_4}}(2)\, \theta(t_3^1 t_4^2)$$

と書ける。但し $d_0(0) = d_1(0) = d_2(0) = 1$, $d_0(1) = -1$, $d_1(1) = 0$, $d_2(1) = 1$, $d_0(2) = 1$, $d_1(2) = -2$, $d_2(2) = 1$。

T を N 個の処理組合せをもつ fraction とする。この時，観測値 $\underline{y}(T)$ は

(2.3) $\underline{y}(T) = E_T \underline{\theta}_\nu + \underline{\varepsilon}_T$

と表わされる。ここで E_T は design 行列，$\underline{\varepsilon}_T$ は平均 $\underline{0}$，無相関で同一分散 σ^2 をもつ order N の error vector である。

θ_νを推定するための normal equation は

(2.4) $\quad M_T\hat{\theta}_\nu = E_T' y(T)$

で与えられる。但し $M_T(=E_T'E_T)$ は information 行列で，各々行，列は θ_νの要素に対応している。$|M_T|\neq 0$ ならば T は resolution V の fractional 3^m factorial design といわれ，また θ_νの BLUE は，$\hat{\theta}_\nu = V_T E_T' y(T)$ $(V_T = M_T^{-1})$ で与えられる。

<u>定義 2.1.</u> V_T が m 個の factor の permutation に対して不変であるとき，T は balanced であるといわれる (3^m-BFF design)。

Balanced array の概念は，Chakravarti [1] によって最初に導入された。

定義 2.2. T の t_1, t_2, t_3, t_4 番目の列からなる subarray $T_{t_1t_2t_3t_4}$ において，$w_r(j_{t_1}, j_{t_2}, j_{t_3}, j_{t_4}) = i_r$ $(r=0,1,2)$ であるすべての vector が，いずれも $T_{t_1t_2t_3t_4}$ の行として丁度 $\lambda_{i_0i_1i_2}$ 回現われるとき，T は index set $\{\lambda_{i_0i_1i_2}\}$ をもつ B-array $[N, m, 3, 4]$ といわれる。但し $w_r(j_{t_1}, j_{t_2}, j_{t_3}, j_{t_4})$ は vector $(j_{t_1}, j_{t_2}, j_{t_3}, j_{t_4})$ における r の個数を表わす。

<u>定理 2.1.</u> $F_{t_1}, F_{t_2}, F_{t_3}, F_{t_4}$ に対応する M_T のすべての要素は次の要素の一次結合で書ける。

$\varepsilon(\theta(\phi), \theta(\phi)) = N$, $\varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^1))$, $\varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^2))$, $\varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^1t_l^1))$,

$\varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^2t_l^2))$, $\varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^1t_l^2))$, $\varepsilon(\theta(t_i^1), \theta(t_k^1t_l^1))$, $\varepsilon(\theta(t_i^1), \theta(t_k^2t_l^2))$,

$\varepsilon(\theta(t_i^2), \theta(t_k^2 t_\ell^2))$, $\varepsilon(\theta(t_i^1), \theta(t_k^1 t_\ell^2))$, $\varepsilon(\theta(t_i^1 t_j^1), \theta(t_k^1 t_\ell^1))$, $\varepsilon(\theta(t_i^1 t_j^1), \theta(t_k^2 t_\ell^2))$, $\varepsilon(\theta(t_i^2 t_j^2), \theta(t_k^2 t_\ell^2))$, $\varepsilon(\theta(t_i^1 t_j^1), \theta(t_k^1 t_\ell^2))$, $\varepsilon(\theta(t_i^2 t_j^2), \theta(t_k^1 t_\ell^2))$。
但し $\varepsilon(\theta(t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2}), \theta(t_3^{\varepsilon_3} t_4^{\varepsilon_4}))$ は M_T の $\theta(t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2})$ 行，$\theta(t_3^{\varepsilon_3} t_4^{\varepsilon_4})$ 列に対応する要素を表わす。

<u>定理2.2.</u>　T が resolution V の 3^m- BFF design であるための必要十分条件は，$|M_T| \neq 0$ の下で，T が index set $\{\lambda_{i_0 i_1 i_2}\}$ をもつ B-array $[N, m, 3, 4]$ であることである。(詳しくは来田 [4] を参照).

$\gamma_{p_0 p_1 p_2}$ を，M_T の $\theta(t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2})$ 行，$\theta(t_3^{\varepsilon_3} t_4^{\varepsilon_4})$ 列 $(t_i \neq t_j \ (i \neq j))$ に対応し，$w_r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = p_r \ (r = 0, 1, 2)$ である要素とするとき，$\gamma_{p_0 p_1 p_2}$ と B-array の index $\lambda_{i_0 i_1 i_2}$ の関係は次式で与えられる。

$$(2.5)\quad \gamma_{p_0 p_1 p_2} = \sum \frac{p_0!}{i_0^0!\, i_1^0!\, i_2^0!} \cdot \frac{p_1!}{i_0^1!\, i_1^1!\, i_2^1!} \frac{p_2!}{i_0^2!\, i_1^2!\, i_2^2!} \cdot (-1)^{i_0^1} \cdot \delta_{0 i_1^1} \cdot (-2)^{i_1^2} \cdot \lambda_{i_0^0 + i_0^1 + i_0^2 \;\; i_1^0 + i_1^1 + i_1^2 \;\; i_2^0 + i_2^1 + i_2^2} 。$$

§3.　Parameter の set の間に定義される relation

2個の parameter $\theta(t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2})$, $\theta(t_3^{\varepsilon_3} t_4^{\varepsilon_4})$ の間に次の様な relation $R_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$ を導入する：

もし $a = w_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $b = w_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $c = w_1(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $d = w_2(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $\underline{\alpha} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22})$, (但し $\alpha_{11} = |\{\delta_{1\varepsilon_1} t_1, \delta_{1\varepsilon_2} t_2\} \cap \{\delta_{1\varepsilon_3} t_3, \delta_{1\varepsilon_4} t_4\}|$, $\alpha_{12} = |\{\delta_{1\varepsilon_1} t_1, \delta_{1\varepsilon_2} t_2\} \cap \{\delta_{2\varepsilon_3} t_3, \delta_{2\varepsilon_4} t_4\}|$, $\alpha_{21} = |\{\delta_{2\varepsilon_1} t_1, \delta_{2\varepsilon_2} t_2\} \cap \{\delta_{1\varepsilon_3} t_3, \delta_{1\varepsilon_4} t_4\}|$, $\alpha_{22} = |\{\delta_{2\varepsilon_1} t_1, \delta_{2\varepsilon_2} t_2\} \cap \{\delta_{2\varepsilon_3} t_3, \delta_{2\varepsilon_4} t_4\}|$) ならば

$$(3.1)\qquad \theta(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2}) \xrightarrow{R_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}} \theta(t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})$$

である。但し $|S|$ は，set S の cardinality を示す。

[註]．この relation は MDRS の公理を満足している。

Local relationship 行列 $A_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))} = [a(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2};t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})_\alpha]$ $(s_{ab}\times s_{cd})$ を次の様に定義する；

$$(3.2)\qquad a(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2};t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{もし } \theta(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2}) \xrightarrow{R_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}} \theta(t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4}) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

但し $s_{00}=1$，$s_{10}=s_{01}=m$，$s_{20}=s_{02}=\binom{m}{2}$，$s_{11}=2\binom{m}{2}$ である。

Ordered relationship 行列 $D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$ $(\nu\times\nu)$ を

$$D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

とする。

$A_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$，$D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$ は次の様な性質をもっている：

$$(3.3)\qquad \sum_{\underline{\alpha}} A_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))} = G_{s_{ab}\times s_{cd}}$$

$$(3.4)\qquad A_{\underline{\beta}}^{((a,b),(e,f))}\cdot A_{\underline{\gamma}}^{((e,f),(c,d))} = \sum_{\underline{\alpha}} q((a,b),(c,d),\underline{\alpha};(e,f),\underline{\beta},\underline{\gamma})\,A_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$$

$$(3.5)\qquad \sum_{a,b}\sum_{c,d}\sum_{\underline{\alpha}} D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))} = G_{\nu\times\nu}$$

$$(3.6)\qquad D_{\underline{\beta}}^{((a,b),(e,f))}\cdot D_{\underline{\gamma}}^{((g,h),(c,d))} = \delta_{eg}\delta_{fh}\sum_{\underline{\alpha}} q((a,b),(c,d),\underline{\alpha};(e,f),\underline{\beta},\underline{\gamma})\,D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$$

すなわち $\mathfrak{A}=[D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}]$ は linear closure である。

§4. ある local relationship algebra

$A_{\underline{\alpha}}^{((1,1),(1,1))}$ $(\underline{\alpha}=(1001),(0110),(1000),(0001),(0100),(0010),(0000))$ を

考える。$H_1 = A^{((1,1),(1,1))}_{(1001)} + A^{((1,1),(1,1))}_{(0110)}$, $H_2 = A^{((1,1),(1,1))}_{(1001)} + A^{((1,1),(1,1))}_{(1000)}$ とすると

補題 4.1. $H_2 H_1 H_2 = G_{2\binom{m}{2}} + (m-2) H_2$ 。

補題 4.2. $\mathfrak{A}^* = [A^{((i,j),(1,1))}_{\alpha}]$

$= [I, G, H_1, H_2, H_1H_2, H_2H_1, H_1H_2H_1]$。

$\mathfrak{A}^*$ は James [3] によって示された parameter v, b, r, k, λ をもつ BIB design の relationship algebra の特別な場合になっている。すなわち，$B = H_1$, $T = H_2$, $N = vr = bk = 2\binom{m}{2}$, $r = m-1$, $k = 2$, $\lambda = 1$ 。

彼の方法を使って次の定理を得る。

定理 4.1. $\mathfrak{A}^*$ は 4 つの two-sided ideal $\mathfrak{A}^*_0$, $\mathfrak{A}^*_1$, $\mathfrak{A}^*_2$, $\mathfrak{A}^*_f$ の直和に分解され，各々の ideal $\mathfrak{A}^*_\beta$ $(\beta = 0, 1, 2)$, $\mathfrak{A}^*_f$ は，1×1, 2×2 の完全行列環と isomorphic になり，その basis は各々，e_0, e_1, e_2, f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} で与えられる。

[注] e_β $(\beta = 0, 1, 2)$, f_{ij} $(i, j = 1, 2)$ は $A^{((1,1),(1,1))}_{\alpha}$ の一次結合で表わされ，

(4.1) $e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha$, $e_\alpha f_{ij} = f_{ij} e_\alpha = 0$, $f_{ik} f_{\ell j} = \delta_{k\ell} f_{ij}$

を満たす。

定理 4.2. Local relationship 行列 $A^{((i,j),(1,1))}_{\alpha}$ は e_β $(\beta = 0, 1, 2)$, f_{ij} $(i, j = 1, 2)$ の一次結合で次の様に書ける。

$$\begin{cases} A^{((1,1),(1,1))}_{(1001)} = e_0 + e_1 + e_2 + f_{11} + f_{22}, \\ A^{((1,1),(1,1))}_{(0110)} = e_0 + e_1 - e_2 - f_{11} + f_{22}, \end{cases}$$

$$
(4.2)\quad \begin{cases}
A^{((1,1),(1,1))}_{(1000)} = (m-2)\,e_0 - e_1 - e_2 + \frac{m-2}{2} f_{11} + \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2}(f_{12}+f_{21}) + \frac{m-4}{2} f_{22}, \\
A^{((1,1),(1,1))}_{(0001)} = (m-2)\,e_0 - e_1 - e_2 + \frac{m-2}{2} f_{11} - \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2}(f_{12}+f_{21}) + \frac{m-4}{2} f_{22}, \\
A^{((1,1),(1,1))}_{(0100)} = (m-2)\,e_0 - e_1 + e_2 - \frac{m-2}{2} f_{11} + \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2}(f_{12}-f_{21}) + \frac{m-4}{2} f_{22}, \\
A^{((1,1),(1,1))}_{(0010)} = (m-2)\,e_0 - e_1 + e_2 - \frac{m-2}{2} f_{11} - \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2}(f_{12}-f_{21}) + \frac{m-4}{2} f_{22}, \\
A^{((1,1),(1,1))}_{(0000)} = 2\binom{m-2}{2} e_0 + 2e_1 \qquad\qquad -2(m-3) f_{22}.
\end{cases}
$$

§ 5. Multidimensional relationship algebra

$$
D_\beta^{((1,1),(1,1))\#} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & e_\beta \end{array}\right],\quad D_{f_{ij}}^{((1,1),(1,1))\#} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & f_{ij} \end{array}\right]
$$

とすると，$\Omega = [\,D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}\,]$ は linear closure で，$D_\beta^{((1,1),(1,1))\#}$，$D_{f_{ij}}^{((1,1),(1,1))\#}$ は $D_{\underline{\alpha}}^{((1,1),(1,1))}$ の一次結合で書けるので，$D_{\underline{\alpha}}^{((1,1),(1,1))}$ 以外の行列 $D_{\underline{\gamma}}^{((a,b),(c,d))}$ も，$D_\beta^{((1,1),(1,1))\#}$ $(\beta=0,1,2)$，$D_{f_{ij}}^{((1,1),(1,1))\#}$ $(i,j=1,2)$ と $D_{\underline{\delta}}^{((a,b),(1,1))}$，$D_{\underline{\delta}^*}^{((1,1),(c,d))}$ の積の和で書き表わすことが出来る。

$D_\alpha^{((a,b),(e,f))\#} D_\beta^{((g,h),(c,d))\#} = \delta_{eg}\delta_{fh}\delta_{\alpha\beta} D_\alpha^{((a,b),(c,d))\#}$，$D_\alpha^{((a,b),(e,f))\#} D_{\{f_{ij}\}}^{((g,h),(c,d))\#} = D_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(e,f))\#} \cdot D_\alpha^{((g,h),(c,d))\#} = 0$，$D_{\{f_{ik}\}}^{((a,b),(e,f))\#} \cdot D_{\{f_{lj}\}}^{((g,h),(c,d))\#} = \delta_{eg}\delta_{fh}\delta_{kl} D_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#}$

となる様に $D_\alpha^{((a,b),(c,d))\#}$，$D_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#}$ を定めると，$\Omega = [\,D_\beta^{((a,b),(c,d))\#}, D_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#}\,]$ となり，各々の ordered relationship 行列 $D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$ は $D_\beta^{((a,b),(c,d))\#}$ と $D_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#}$ の一次結合で表わされる。

$$
\begin{cases}
D_{(0000)}^{((0,0),(0,0))} = D_0^{((0,0),(0,0))\#}, \quad D_{(0000)}^{((0,0),(c_1,d_1))} = \sqrt{m}\, D_0^{((0,0),(c_1,d_1))\#}, \\
D_{(0000)}^{((0,0),(c_2,d_2))} = \sqrt{\binom{m}{2}}\, D_0^{((0,0),(c_2,d_2))\#}, \quad D_{(0000)}^{((0,0),(1,1))} = \sqrt{2\binom{m}{2}}\, D_0^{((0,0),(1,1))\#},
\end{cases}
$$

$$
(5.1)\quad
\begin{cases}
D_{\alpha_0}^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))} = D_0^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))\#} + D_f^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))\#}, \\
D_{(0000)}^{((a_1,b_1)(c_1,d_1))} = (m-1)D_0^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))\#} - D_f^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))\#}, \\
D_{\beta_0}^{((a_1,b_1),(c_2,d_2))} = \sqrt{2(m-1)}\, D_0^{((a_1,b_1),(c_2,d_2))\#} + \sqrt{m-2}\, D_{f_{12}f_{22}}^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))\#}, \\
D_{(0000)}^{((a_1,b_1)(c_2,d_2))} = \sqrt{\frac{m-1}{2}}(m-2)\, D_0^{((a_1,b_1),(c_2,d_2))\#} - \sqrt{m-2}\, D_{f_{12}f_{22}}^{((a_1,b_1),(c_1,d_2))\#}, \\
D_{\gamma_0}^{((a_1,b_1),(1,1))} = \sqrt{m-1}\, D_0^{((a_1,b_1)(1,1))\#} + \sqrt{\frac{m}{2}}\, D_{f_{11}f_{21}}^{((a_1,b_1)(1,1))\#} + \sqrt{\frac{m-2}{2}}\, D_{f_{12}f_{22}}^{((a_1,b_1),(1,1))\#}, \\
D_{\gamma_1}^{((a_1,b_1)(1,1))} = \sqrt{m-1}\, D_0^{((a_1,b_1)(1,1))\#} - \sqrt{\frac{m}{2}}\, D_{f_{11}f_{21}}^{((a_1,b_1)(1,1))\#} + \sqrt{\frac{m-2}{2}}\, D_{f_{12}f_{22}}^{((a_1,b_1)(1,1))\#}, \\
D_{(0000)}^{((a_1,b_1)(1,1))} = \sqrt{m-1}\,(m-2)\, D_0^{((a_1,b_1)(1,1))\#} - \sqrt{2(m-2)}\, D_{f_{12}f_{22}}^{((a_1,b_1)(1,1))\#}, \\
D_{\mu_0}^{((a_2,b_2)(c_2,d_2))} = D_0^{((a_2,b_2)(c_2,d_2))\#} + D_1^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#} + D_{f_{22}}^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#}, \\
D_{\mu_1}^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))} = 2(m-2)D_0^{((a_2,b_2)(c_2,d_2))\#} - 2D_1^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#} + (m-4)D_{f_{22}}^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#}, \\
D_{(0000)}^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))} = \binom{m-2}{2} D_0^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#} + D_1^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#} - (m-3)D_{f_{22}}^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#}, \\
D_{\xi_0}^{((a_2,b_2)(1,1))} = \sqrt{2}\left\{D_0^{((a_2,b_2)(1,1))\#} + D_1^{((a_2,b_2),(1,1))\#} + D_{f_{22}}^{((a_2,b_2)(1,1))\#}\right\}, \\
D_{\xi_1}^{((a_2,b_2)(1,1))} = \sqrt{2}\left\{(m-2)D_0^{((a_2,b_2),(1,1))\#} - D_1^{((a_2,b_2),(1,1))\#} + \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2} D_{f_{21}}^{((a_2,b_2),(1,1))\#} \right. \\
\qquad\qquad \left. + \frac{m-4}{2} D_{f_{22}}^{((a_2,b_2),(1,1))\#}\right\}, \\
D_{\xi_2}^{((a_2,b_2)(1,1))} = \sqrt{2}\left\{(m-2)D_0^{((a_2,b_2),(1,1))\#} - D_1^{((a_2,b_2),(1,1))\#} - \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2} D_{f_{21}}^{((a_2,b_2),(1,1))\#} \right. \\
\qquad\qquad \left. + \frac{m-4}{2} D_{f_{22}}^{((a_2,b_2)(1,1))\#}\right\}, \\
D_{(0000)}^{((a_2,b_2),(1,1))} = \sqrt{2}\left\{\binom{m-2}{2} D_0^{((a_2,b_2),(1,1))\#} + D_1^{((a_2,b_2)(1,1))\#} - (m-3)D_{f_{22}}^{((a_2,b_2),(1,1))\#}\right\}.
\end{cases}
$$

$\mathfrak{A}_0 = [D_0^{((a,b),(c,d))\#}]$, $\mathfrak{A}_1 = [D_1^{((a,b),(c,d))\#}]$, $\mathfrak{A}_2 = [D_2^{((1,1),(1,1))\#}]$, $\mathfrak{A}_f = [D_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#}]$ とすると，

__補題 5.1.__ $\mathfrak{A}_\alpha \mathfrak{A}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{A}_\alpha\mathfrak{A}_f = \mathfrak{A}_f\mathfrak{A}_\alpha = 0$。

__定理 5.1.__ $\mathfrak{A}$は4つの two-sided ideal $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_f$ の直和に分解され，各々の ideal $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_f$ は，

6×6，3×3，1×1 の完全行列環と isomorphic になり，各々の既約表現の重複度は，$\phi_0=1$，$\phi_1=\frac{m(m-3)}{2}$，$\phi_2=\binom{m-1}{2}$，$\phi_f=m-1$ で与えられる。

§6.　Information 行列の固有多項式

T を index set $\{\lambda_{i_0 i_1 i_2}\}$ をもつ B-array $[N,m,3,4]$ とする。M_T の $\theta(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2})$ 行，$\theta(t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})$ 列に対応する要素を $P_{\underline{\alpha}}^{((a,b)(c,d))}$ とする。但し $a=w_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，$b=w_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，$c=w_1(\varepsilon_3,\varepsilon_4)$，$d=w_2(\varepsilon_3,\varepsilon_4)$，$\theta(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2})\xrightarrow{R_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}}\theta(t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})$ である。$P_{\underline{\alpha}}^{((a,b)(c,d))}$ は $\gamma_{p_0p_1p_2}$ の一次結合で書ける．

［注］. $\gamma_{p_0p_1p_2}$ と $\lambda_{i_0i_1i_2}$ の関係は (2.5) 式で与えられている。

T に関する M_T は

(6.1) $$M_T=\sum_{\underline{\alpha}}\sum_{a_1b_1}\sum_{c_1d_1}P_{\underline{\alpha}}^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))}D_{\underline{\alpha}}^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))}$$

と書くことが出来る。また

(6.2) $$B_\beta^{((a,b),(c,d))\#}=\begin{cases}D_\beta^{((a,b)(a,b))\#} & \text{もし } (a,b)=(c,d)\\ D_\beta^{((a,b),(c,d))\#}+D_\beta^{((c,d),(a,b))\#} & \text{もし } (a,b)\neq(c,d)\end{cases}$$
$$B_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#}=\begin{cases}D_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(a,b))\#} & \text{もし } (a,b)=(c,d)\\ D_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#}+D_{\{f_{ji}\}}^{((c,d),(a,b))\#} & \text{もし } (a,b)\neq(c,d)\end{cases}$$

とすると，M_T は

$$M_T=\sum_\beta\sum_{ab}\sum_{cd}\kappa_\beta^{ab,cd}B_\beta^{((a,b),(c,d))\#}+\sum_{\{f_{ij}\}}\sum_{ab}\sum_{cd}\kappa_{\{f_{ij}\}}^{ab,cd}B_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#}$$

と書ける。但し $\kappa_\beta^{ab,cd}$，$\kappa_{\{f_{ij}\}}^{ab,cd}$ は $P_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$（すなわち $\lambda_{i_0i_1i_2}$）の

一次結合で書き表わされる。

Ω_0, Ω_1, Ω_2, Ω_f に関する M_T の既約表現は，Γ_0 (6×6), Γ_1 (3×3), Γ_2 (1×1), Γ_f (6×6) である。すなわち

$$(6.3)\quad \begin{cases} M_T \xrightarrow[(\beta)]{} \Gamma_\beta = \| \gamma_\beta^{ab.cd} \| \\ M_T \xrightarrow[(f)]{} \Gamma_f = \| \gamma_{\{f_i;j\}}^{ab.cd} \|. \end{cases}$$

$I_\nu \in \Omega$ なので

$$(6.4)\quad \begin{cases} M_T - xI_\nu \xrightarrow[(\beta)]{} \Gamma_\beta - xI \\ M_T - xI_\nu \xrightarrow[(f)]{} \Gamma_f - xI_6 \end{cases}$$

である。よって

定理 6.1. Resolution V の 3^m－BFF design T の information 行列 M_T の固有多項式 $\psi(x)$ は次式で与えられる：

$$(6.5)\quad \psi(x) = |M_T - xI_\nu| = |\Gamma_0 - xI_6|^{\phi_0} \cdot |\Gamma_1 - xI_3|^{\phi_1} \cdot |\Gamma_2 - x|^{\phi_2} \cdot |\Gamma_f - xI_6|^{\phi_f}.$$

REFERENCES

[1] Chakravarti, I. M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. Sankhyā 17 143-164.

[2] Hoke, A. T. (1975). The characteristic polynomial of the information matrix for second-order models. Ann. Statist. 3 780-786.

[3] James, A. T. (1957). The relationship algebra of an experimental designs. Ann. Math. Statist. 28 993-1002.

[4] Kuwada, M. (1977). Balanced arrays of strength 4 and balanced fractional 3^m factorial designs. Submitted to J. Statist. Planning Inf.

[5] Shirakura, T. (1977). Contributions to balanced fractional 2^m factorial designs derived from balanced arrays of strength 2ℓ. Hiroshima Math. J. 217-285.

[6] Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Note on balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell+1$. Ann. Inst. Statist. Math. 27 377-386.

[7] Srivastava, J. N. and Chopra, D. V. (1971). On the characteristic roots of the information matrix of 2^m balanced factorial designs of resolution V, with applications. Ann. Math. Statist. 42 722-734.

[8] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1976). Characteristic polynomials of the information matrices of balanced fractional 2^m factorial designs of higher $(2\ell+1)$ resolution. "Essays in Probability and Statistics" in honor of Professor J. Ogawa's 60-th birthday(Ed., S. Ikeda et al.).