

Title	Balanced DesignとBalanced Arrayについて (デザインの構成と解析)
Author(s)	桑田, 正秀; 西井, 龍映
Citation	数理解析研究所講究録 (1977), 311: 121-130
Issue Date	1977-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/103892
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Balanced design と balanced array について

海上保安大学校 栗田正秀
広島大理 西井龍映

§ 1. 序

Resolution $2t+1$ の 2^m -FF (fractional factorial) design について, design T が balanced であるための必要十分条件は, information matrix M_T が正則で, T が index set $\{M_i\}$ を持つ balanced array (B-array) $[N, m, 3, 2t]$ であることは, 山本・白倉・栗田 [4] によって示された。Resolution V の 3^m -FF design について, design T が balanced であるための必要十分条件は, M_T が正則で, T が index set $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ を持つ B-array $[N, m, 3, 4]$ であることは, 栗田 [3] で示された。

ここでは, 一般の s^m -FF design について, 上と同様な結果が得られることを見る。

§ 2. Parameter の定義

Factor F_1, F_2, \dots, F_m は 各々 s 種の level $0, 1, \dots, s-1$ を持ち、

Z はその assembly を辞書式順序に並べたものとする。

$$Z = \begin{bmatrix} 0, 0, \dots, 0, 0 \\ 0, 0, \dots, 0, 1 \\ \vdots \\ 0, 0, \dots, 0, s-1 \\ 0, 0, \dots, 1, 0 \\ \vdots \\ s-1, s-1, \dots, s-1, s-1 \end{bmatrix} : s^m \times m$$

$\eta(Z)$ は Z の row vector j に対応する assembly j の観測値の期待値とし、順に並べた $s^m \times 1$ の vector であるとする。

定義 2.1 Parameter vector $\theta(Z)$ を次の様に定義する。

$$(2.1) \quad \theta(Z) = (D_{(m)} D_{(m)})^{-1} D_{(m)} \eta(Z)$$

ただし、 $D = \begin{bmatrix} d_{(0)} \\ d_{(1)} \\ \vdots \\ d_{(s-1)} \end{bmatrix} : s \times s$ 行列で、 D の row vector $d_{(i)}$ は

$d_{(i)} = (d_{0(i)}, d_{1(i)}, \dots, d_{s-1(i)})$ ($i = 0, 1, \dots, s-1$) と書け、

$d_{(0)} = (1, 1, \dots, 1)$ かつ $d_{(i)} d_{(j)} = k_i d_{(j)}$ ($k_i > 0, i, j = 0, 1, \dots, s-1$)

を満足する。 $D_{(m)}$ は D の m 回の Kronecker 積とする。

この定義より、 $\theta(0, 0, \dots, 0)$ は general mean を、

$\theta(0, \varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2}, \dots, \varepsilon_{t_n}, 0)$ ($\varepsilon_{t_r} \in \{1, 2, \dots, s-1\}, r = 1, 2, \dots, n$) は

Factor $F_{t_1}, F_{t_2}, \dots, F_{t_n}$ の interaction を意味する。

(2.1) は $\eta(Z) = D_{(m)} \theta(Z)$ と解くことができる。

このことから、assembly $j = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ による effect は、

$\eta(j) = \sum_{\xi \in Z} d_{\xi}^j \theta(\xi)$ で表現される。ただし、 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$

は Z の row vector を動かす、 $d_{\xi}^j = d_{j_1}(\xi_1) d_{j_2}(\xi_2) \dots d_{j_m}(\xi_m)$ である。

以後 $(t+1)$ Factor interaction 以上無視可能と仮定する。

N 個の assembly $j^{(1)}, j^{(2)}, \dots, j^{(N)}$ から成る design T を考える。

このとき, $T = \begin{bmatrix} j^{(1)} \\ j^{(2)} \\ \vdots \\ j^{(N)} \end{bmatrix}$ で表現する。 θ_{ν} は l Factor interaction

まごのすべての parameter を並べた column vector, $y(T)$ を assembly $j^{(k)}$ による観測値を並べたものとする。

$$(2.2) \quad y(T) = E_T \theta_{\nu} + e_T$$

と書ける。ただし $\nu = \sum_{k=0}^l \binom{m}{k} (s-1)^k$ (parameterの個数), E_T は $N \times \nu$ の design matrix, e_T は $N \times 1$ の error vector であり

$$\text{Exp}(e_T) = 0, \quad \text{Var}(e_T) = \sigma^2 I_N \text{ とする。}$$

(2.2) の normal equation は, $M_T \hat{\theta}_{\nu} = E_T' y(T)$ (ただし $M_T = E_T' E_T$) であり。 M_T が正則行列なら, $\hat{\theta}_{\nu} = V_T E_T' y(T)$ ($V_T = M_T^{-1}$) が θ_{ν} の BLUE (best linear unbiased estimator) になり, $\text{Var}(\hat{\theta}_{\nu}) = \sigma^2 V_T$ が成立する。

[注] parameter $\theta(\alpha), \theta(\beta)$ に対応する行列 M_T の成分を。

$$\varepsilon(\alpha, \beta) \text{ とすれば, } \varepsilon(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^N d_{\alpha}^{j^{(k)}} \cdot d_{\beta}^{j^{(k)}} \text{ である。}$$

$T_{t_1 t_2 \dots t_n}$ ($1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq N$) を T の t_1 列 t_2 列 \dots t_n 列から成る $N \times n$ の sub array とする。このとき $\mu_{t_1 t_2 \dots t_n}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}$ を、

この sub array に, row vector $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ ($\nu_r \in \{0, 1, \dots, s-1\}$)

が含まれる回数とする。さらに $\gamma_{t_1 t_2 \dots t_n}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n} = \varepsilon(\alpha, \beta)$ で定義

する。ただし, $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m)$ 也。

$$t = t_r \text{ のとき } \left\{ \begin{array}{l} \alpha_t = \varepsilon_r \\ \beta_t = 0 \end{array} \right. \text{ 又は } \left\{ \begin{array}{l} \alpha_t = 0 \\ \beta_t = \varepsilon_r \end{array} \right. \quad (r=1, 2, \dots, n) \text{ を}$$

$t \neq t_r (r=1, 2, \dots, n)$ のときは $\alpha_t = \beta_t = 0$ を満たしている。こ
こに、 $\varepsilon_r = \{0, 1, \dots, s-1\} (r=1, 2, \dots, n)$ である。

これらを辞書式順序に並べた vector を

$$\gamma_{t_1 t_2 \dots t_n} = \left\| \gamma_{t_1 t_2 \dots t_n}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \right\|, \quad \mu_{t_1 t_2 \dots t_n} = \left\| \mu_{t_1 t_2 \dots t_n}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} \right\|$$

とおけば、次の補題が成り立つ。

補題 2.1 すべての sub array $T_{t_1 t_2 \dots t_n}$ について

$$\gamma_{t_1 t_2 \dots t_n} = D_{(n)} \mu_{t_1 t_2 \dots t_n} \quad \text{が成立する。}$$

§3. Balanced array と information matrix

Balanced array は Chakravarti [2] により、最初に定義された。

定義 3.1 T が strength n で、index set $\{i_0 i_1 \dots i_{s-1} \mid i_0 + i_1 + \dots + i_{s-1} = n\}$ を持つ balanced array (B-array) $[N, m, s, n]$ であるとは、 T が $0, 1, \dots, s-1$ を成分に持つ $N \times m$ の行列で、 T のどの $N \times n$ sub array も、level が r である factor を i_r 個持つ ($r=0, 1, \dots, s-1$) すべての row vector が $i_0 i_1 \dots i_{s-1}$ 回含まれるようなものをいう。

定義 3.2 T が B-array $[N, m, s, n]$ で、その index set $\{i_0 i_1 \dots i_{s-1} \mid i_0 + i_1 + \dots + i_{s-1} = n\}$ が λ に等しいとき、 T は index λ を持つ Orthogonal array (O-array) $[N, m, s, n]$ であると定義する。

定義 3.3 M_T が *balanced* (又は *permutation invariant*) であるとは、 $\forall \tau \in \mathcal{S}_m$ に対し、 $\varepsilon(\alpha, \beta) = \varepsilon(\tau\alpha, \tau\beta)$ がすべての α, β に対し成立するときをいう。ただし、 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ のとき、 $\tau\alpha = (\alpha_{\tau(1)}, \alpha_{\tau(2)}, \dots, \alpha_{\tau(m)})$ 、 $\tau\beta$ も同様に約束する。

$l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ なる l に対し、 $l+1$ Factor interaction 以上のすべての parameter が無視可能なら、次の 2 定理が成立する。

定理 3.1 u Factor interaction ($u \leq l$) 以下のすべての parameter が、他の parameter と独立に推定できるための必要十分条件は、 T が O -array $[N, m, s, u, l]$ であることである。

[注] $u = l$ ならば、 M_T は対角行列である。

定理 3.2 M_T が *balanced* であるための必要十分条件は、 T が index set $\{i_0, i_1, \dots, i_{s-1} \mid i_0 + i_1 + \dots + i_{s-1} = 2l\}$ を持つ B -array $[N, m, s, 2l]$ であることである。

証明の概略: 補題 2.1, D の直交性. $\varepsilon(\alpha, \beta)$ は $\sum_{t_1, \dots, t_l}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l}$ の一次結合で書けることより。

§ 4. Multidimensional relationship

MDPBAS (multidimensional partially balanced association scheme) の定義は, Bose & Srivastava [1] で与えられた。これの拡張である MDRS (multidimensional relationship) は, 最初に 栗田 [3] で与えられた。ここでは

その定義を明らかにする。

定義 4. 1 n_i 個の元から成る集合 $S_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}\}$ ($i=1, 2, \dots, L$) があり、relation R が $\bigcup_{i=1}^L S_i$ の元の間で定義されていて、次の条件を満たすとき、 R を MDR S という。

(i) すべての $S_i \times S_j$ ($i, j=1, 2, \dots, L$) に對して、local relationship set $\pi^{i,j}$ ($|\pi^{i,j}| = m_{i,j}$) が存在して、 S_i のどの元 x_{ij} に対しても、 S_j は $m_{i,j}$ 個の disjoint なクラスに分割され、各クラスは x_{ij} と α ($\alpha \in \pi^{i,j}$) の relation にあるもの全体で、その濃度は $n_{\alpha}^{i,j}$ であり、 x_{ij} のとり方によらず一定である。

(x_{ij}, x_{jg}) が α ($\alpha \in \pi^{i,j}$) の relation にあることを $R(x_{ij}, x_{jg}) = R_{\alpha}^{i,j}$ とは $x_{ij} \xrightarrow{\alpha} x_{jg}$ で表現する。

(ii) S_i, S_j, S_k を任意に選ぶ ($i, j, k=1, 2, \dots, L$) $\pi^{i,k}$ の任意の元 γ に対し、 $S_i \times S_k$ の元 (x_{ij}, x_{kl}) で γ の關係にあるものを取る。 $\forall \alpha \in \pi^{i,j}, \forall \beta \in \pi^{j,k}$ を与えると、

集合 $\left\{ x_{jg} \in S_j \mid \begin{array}{c} x_{ij} \xrightarrow{\gamma} x_{kl} \\ \alpha \searrow \nearrow \beta \\ x_{jg} \end{array} \right\}$ の濃度は、 $x_{ij} \xrightarrow{\gamma} x_{kl}$ で

ある限り、 x_{ij}, x_{kl} の取り方によらず、 $i, k, \gamma, j, \alpha, \beta$ のみに依存する定数 $f(i, k, \gamma; j, \alpha, \beta)$ である。

[注] この relation は必ずしも対称ではない。

この MDR S から、local relationship matrix $\{A_{\alpha}^{i,j} \mid \alpha \in \pi^{i,j}\}$ と relationship matrix $\{D_{\alpha}^{i,j} \mid \alpha \in \pi^{i,j}, i, j=1, 2, \dots, L\}$ を次のよ

に定義する。

定義 4. 2 任意の (i, j) ($i, j = 1, 2, \dots, L$) を考える。 $\forall \alpha \in \pi^{i, j}$ に対して、 $A_\alpha^{i, j}$ は $n_i \times n_j$ 行列で、その (f, g) element $a_{f, g}^{i, j}(\alpha)$ は、

$$a_{f, g}^{i, j}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_{if} \xrightarrow{\alpha} x_{jg} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \begin{matrix} (f=1, 2, \dots, n_i) \\ (g=1, 2, \dots, n_j) \end{matrix}$$

である。

定義 4. 3 上の $(i, j), \alpha$ に対し、 $D_\alpha^{i, j}$ は $P \times P$ の行列で ($P = n_1 + n_2 + \dots + n_L$)、 L^2 個の sub matrix から成る。 S_i に対応する row block, S_j に対応する column block の $n_i \times n_j$ sub matrix は $A_\alpha^{i, j}$ であり、他の sub matrix の element はすべて 0 である。

MDRS と $\{A_\alpha^{i, j}\}, \{D_\alpha^{i, j}\}$ の定義により、次の補題を得る。

補題 4. 1

$$A_\alpha^{i, j} A_\beta^{j, k} = \sum_{\delta \in \pi^{i, k}} g(i, k, \delta; j, \alpha, \beta) A_\delta^{i, k}$$

$$D_\alpha^{i, j} D_\beta^{j, k} = \left(\sum_{\delta \in \pi^{i, k}} g(i, k, \delta; j, \alpha, \beta) D_\delta^{i, k} \right) \delta_{j, j'}$$

がすべての $\alpha \in \pi^{i, j}, \beta \in \pi^{j, k}, i, j, k = 1, 2, \dots, L$ に対し成り立つ。

補題 4. 2 \mathcal{A} を $\{D_\alpha^{i, j} \mid \alpha \in \pi^{i, j}, i, j = 1, 2, \dots, L\}$ の元の \mathbb{R} 上の一次結合全体とすれば、 \mathcal{A} は $P \times P$ 行列 $\{D_\alpha^{i, j}\}$ を base とする行列多元環に成る。この algebra \mathcal{A} を MDRS の relationship algebra と呼ぶ。

§ 5. Balanced fractional s^m factorial design

$S_{p_0, p_1, \dots, p_{s-1}}$ を parameter の index の集合で, $\{d \in Z \mid w_r(d) = p_r, r = 0, 1, \dots, s-1\}$ と定義する。ただし $w_r(d)$ は vector d の元で, r であるものの個数とする。(t+1) Factor interaction 以上無視可能としてゐるから, unknown parameter の index の集合族 \mathcal{S} は, $\{S_P \mid P = (p_0, p_1, \dots, p_{s-1}), p_0 + p_1 + \dots + p_{s-1} \leq t\}$ である。 $S = \bigcup_{S_P \in \mathcal{S}} S_P$ は unknown parameter の index 全体である。

$M(S)$ を $s \times s$ 行列全体とするとき, $S \times S$ から $M(S)$ への map W^* を次のように定義する。

定義 5. 1 $S \times S \ni \forall (d, \beta) \rightarrow W^*(d, \beta)$ の (i, j) element (i, j = 1, 2, \dots, s) は, 集合 $\{t \in \{1, 2, \dots, m\} \mid d_t = i-1, \beta_t = j-1\}$ の濃度とする。ただし, $d = (d_1, d_2, \dots, d_m), \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ である。

[注] この map W^* は (d, β) の Factor の permutation に関する maximal invariant function である。

\mathcal{S} の中に, 次のように relation を定義する。 \mathcal{S} の任意の元 S_P, S_Q に対し, local relationship set $\pi^{P, Q}$ を $\{W^*(d, \beta) \in M(S) \mid (d, \beta) \in S_P \times S_Q\}$ とし, $S_P \times S_Q \ni \forall (d, \beta)$ が $W \in \pi^{P, Q}$ の relation にあるとは, $W = W^*(d, \beta)$ の時, W が $\pi^{P, Q}$ の時 \neq 限り \neq である。

定理 5. 1 \mathcal{S} に定義された relation は MDRS である。

[注] $\pi^{P, Q} \ni \forall W$ に対し, $W' \in \pi^{Q, P}$ が成立する。

定理 5.2 この MDRS から生成される relationship algebra \mathcal{A} は I_ν ($\nu = \sum_{k=0}^k \binom{m}{k} (s-1)^k$) を含む。

定義 5.2 \mathcal{A} の vector subspace \mathcal{O} を $\{B_{W}^{P, \mathcal{E}} \mid W \in \pi^{P, \mathcal{E}}, S_P, S_B \in \mathcal{S}\}$ の元の一次結合全体とする。ただし、

$$B_{W}^{P, \mathcal{E}} = \begin{cases} D_{W}^{P, P} & \text{if } P = \mathcal{E} \text{かつ } W = W' \in \pi^{P, P} \\ D_{W}^{P, \mathcal{E}} + D_{W'}^{P, P} & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。ただし、 $W \in \pi^{P, \mathcal{E}}$ である。

[注] 定義 3.3 は $M_T \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ と言い換えてよい。

定義 5.3 s^m -FF design T が balanced design とは M_T が正則で、 $V_T = M_T^{-1}$ が permutation invariant であるときをいう。

l が $l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ を満たすとき、次の主定理を得る。

定理 5.3 Resolution 2k+1 の s^m -FF design T が balanced design であるための必要十分条件は、 T が M_T を正則にする B-array $[N; m, s, 2k]$ であることである。

[証明] (\Rightarrow) 仮定より $V_T \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ であり、 $\mathcal{A} \ni I_\nu$ (定理 5.2) から $M_T = V_T^{-1} \in \mathcal{A}$ がわかる。定義 5.2 の注、定理 3.2 より、 T は B-array $[N; m, s, 2k]$ である。

(\Leftarrow) 仮定より $M_T \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ であり、 $\mathcal{A} \ni I_\nu$ から $V_T \in \mathcal{A}$ である。故に V_T は permutation invariant であるから、 T は balanced design である。

REFERENCES

- [1] Bose, R. C. and Srivastava, J. N. (1964). Multidimensional partially balanced designs and their analysis, with applications to partially balanced factorial fractions. *Sankhyā* (A) 26 145-168.
- [2] Chakravarti, I. M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. *Sankhyā* 17 143-164.
- [3] Kuwada, M. (1977). Balanced arrays of strength 4 and balanced fractional 3^m factorial designs. Submitted to *J. Statist. Planning Inf.*
- [4] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Balanced arrays of strength $2k$ and balanced fractional 2^m factorial designs. *Ann. Inst. Statist. Math.* 27 143-157.