数理解析研究所講究録
311巻 1977年 76-85

完全m組グラフのパータイト・クロー分解－II

広島経済大学　田沢 新成
広島大・理　山本 純恭

§1. はじめに

m個の項目（属性）についてそれぞれn個の水準値のいずれかをとることによって特性づけられる多値レコードの集合を考える．k個の項目についてそれぞれ指定された水準値をとるレコードを要求する質問をk項目の質問という．いま，$\binom{m}{2}n^2$個すなわちすべての2項目の質問の集合を考え，その部分集合に対してバケツを用意するファイル方式について考察する．そのとき，各項目をn点集合に，水準値をその点に対応させると，2項目の質問はm個のn点集合からなる完全m組グラフ$K_m(n,n,\cdots,n)$の線に対応する．われわれはレコードの特性ベクトルの分布が一様となるとき，$c\,(\leq m-1)$個の2項目の質問に対応するバケツの冗長率すなわち1つのレコードが少くともc個の質問のいずれか1つに該当する確率が最小となるのはその質問の集合（バケツ）のグラフ構造が次数cのパータイト・クローのとき，かつそのときに限ることを

示した[1],[2],[7]. ここに, パータイト・クロー(PC)とは2項目の質問の集合に対応する線の集合のグラフ構造がクローであるのみならず, 各端点がいずれも異った点集合に属しているものをいう. それぞれc個の2項目の質問に対応し, いずれも冗長率最小のバケツのみからなる多値均衡型ファイル方式HUBMFS$_2$を構成する問題は, 完全m組グラフ$K_m(n,n,\cdots,n)$の線の全体を互いに線を共有しない次数cのPCの和に分解する問題に対応する. われわれは[4]において, 分解可能であるための必要条件を与え, いくつかの十分条件を与えたが, 必要条件がいくらか甘く, 完全な解決には至っていなかった. ここでは, 必要条件をよりタイトにすることによって得たPC-分解可能であるための必要十分条件および分解アルゴリズムについて述べる.

§2. 主定理

完全m組グラフのPC-分解について, 次の定理が成り立つ.

定理2.1. 完全m組グラフ$K_m(n,n,\cdots,n)$が互いに線を共有しない$\binom{m}{2}n^2/c$個の次数cのパータイト・クローの和に分解されるための必要十分条件は

(i) $\binom{m}{2}n^2$がcの倍数であり, かつ

(ii) nが偶数のとき$m \geq c+1$, nが奇数のとき$m \geq c+1+\frac{c-1}{n^2}$

が成り立つことである.

特に，$n=1$ の場合は，定理2.1は完全グラフK_mのクロー分解定理に帰することを注意しておく[5],[6].

§3. 必要性の証明

$K_m(n,n,\cdots,n)$ がPC−分解可能とする．明らかに(i)が必要である．$K_m(n,n,\cdots,n)$ の m個の n点集合を $V_1,V_2,\cdots,V_m$ とし，V_iの点を根とするPCの個数をy_iとする．V_iと交わる$(m-1)n^2$本の線の集合X_iはそれらのPCに属するか属さないかで集合X_i'とX_i''に分割される．X_i''のどの2本の線も同じPCに属さないので，

$$y_i+\{(m-1)n^2-y_ic\}\leq\binom{m}{2}n^2/c$$

でなければならない．すなわち，y_iは不等式

$$y_i\geq\frac{n^2(m-1)(2c-m)}{2c(c-1)}\tag{3.1}$$

をみたす．他方，V_iとV_jを結ぶn^2本の線はV_iの点あるいはV_jの点を根とするPCに属し，かつどの2本の線も同じPCに属さないから，$y_i+y_j\geq n^2$を満たさなければならない．したがって

$$y_i\geq\left\lceil\frac{n^2}{2}\right\rceil\tag{3.2}$$

が高々1つのiを除いて成立する．ここで$\lceil x\rceil$はxより小さくない最小の整数を表わす．(3.1)と(3.2)を$\sum_i y_i$に適用して，

$$\binom{m}{2}n^2/c\geq\frac{n^2(m-1)(2c-m)}{2c(c-1)}+(m-1)\frac{n^2}{2}\quad(n\text{が偶数のとき})$$

$$\geq \frac{n^2(m-1)(2c-m)}{2c(c-1)} + (m-1)\frac{n^2+1}{2} \quad (n\text{が奇数のとき})$$

を得る．それ故，条件(ii)の必要性が導びかれる．

§4. 隣接行列とパータイト・クロー分解可能性

定理2.1の条件(i)と(ii)の十分性の証明に入る前に，2つの補助的な定理を与える．

$K_m(n,n,\cdots,n)$の各線に1つの方向が割りつけられるものとする．方向づけられた$K_m(n,n,\cdots,n)$にmn次の隣接行列$M=\|M_{ij}\|$が対応する．ここに，$M_{ij}=\|m_{ip,jq}\|$はn次の0−1行列で

$$m_{ip,jq} = \begin{cases} 1 & v_{jq}\text{が}v_{ip}\text{に隣接しているとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

によって定義される．v_{ip}は点集合V_iのp番目の点で，$ip=(i-1)n+p$である．明らかに，すべてのp,q,i,jに対して，

$$m_{ip,iq}=0, \quad m_{ip,jq}+m_{jq,ip}=1 \ (i\neq j) \qquad (4.1)$$

が成立する．すなわち，$M_{ii}=0$，$M_{ij}+M'_{ji}=G_{n,n}$ $(i\neq j)$である．ここで$G_{t,u}$はその要素がすべて1である$t\times u$行列である．

逆に，0−1行列Mが(4.1)を満たすならば，Mは$K_m(n,n,\cdots,n)$の各線に1つの方向を与える隣接行列である．

<u>定理4.1</u>．完全m組グラフ$K_m(n,n,\cdots,n)$が互いに線を共有しない次数cのパータイト・クローの和に分解されるための必要十分条件は，$K_m(n,n,\cdots,n)$の各線に適当な方向を与え，方向づけられた$K_m(n,n,\cdots,n)$のmn次の隣接行列$M=\|M_{ij}\|$が

(a) M の各行和は c の倍数，すなわち

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} m_{ip,jq} = a_{ip}c \text{，かつ}$$

(b) M の各部分行列 M_{ij} の行和は j に関係なく

$$\sum_{q=1}^{n} m_{ip,jq} \le \min(a_{ip}, n),$$

をみたすことである．

証明は[4]，[7]を参照．

定理4.1について，$\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{n} a_{ip} = \binom{m}{2}n^2/c$ をみたす非負整数 a_{ip} $(i=1,2,\cdots,m;\ p=1,2,\cdots,n)$ を適当に定めることにより，条件(a)と(b)をみたす mn 次の隣接行列Mが構成できるならば，$K_m(n,n,\cdots,n)$ は互いに線を共有しない次数 c の PC の和に分解できることを定理4.1は示している．次の定理は条件(a)と(b)をみたす隣接行列Mの構成および定理2.1の十分性の証明に有効である．

<u>定理4.2.</u>　$\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{n} a_{ip} = \binom{m}{2}n^2/c$ をみたす非負整数 a_{ip} $(i=1,2,\cdots,m;\ p=1,2,\cdots,n)$ に対して，もし

1) $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = c\sum_{p=1}^{n} a_{ip}$，$x_{ii}=0$ および $x_{ij}+x_{ji}=n^2$ $(i \neq j)$ をみたす m 次の非負整数行列 $X=\|x_{ij}\|$ を構成することができ，

2) 各々の i に対して，

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ip,j} = a_{ip}c, \quad \sum_{p=1}^{n} y_{ip,j} = x_{ij} \text{，かつ} \tag{4.2}$$

$$0 \le y_{ip,j} \le \min(a_{ip}, n) \tag{4.3}$$

をみたす $n \times m$ 非負整数行列 $Y_i=\|y_{ip,j}\|$ を構成することができ，かつ

3) $1 \le i < j \le m$ をみたす i と j のすべての組に対して，

$\sum_{q=1}^{n} m_{ip,jq} = y_{ip,j}$ と $\sum_{p=1}^{n} m_{ip,jq} = n - y_{jq,i}$ をみたす n 次の 0-1 行列 $M_{ij}^{*} = \| m_{ip,jq} \|$ を構成することができるならば，$K_m(n, n, \cdots, n)$ は次数 c のパータイト・クロー分解可能である．

証明

$$M_{ij} = \begin{cases} M_{ij}^{*} & i < j \text{ のとき} \\ 0, & i = j \text{ のとき} \\ G_{n,n} - M_{ji}^{*} & i > j \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義される mn 次の 0-1 行列 $M = \| M_{ij} \|$ を考える．そのとき，M は $K_m(n, n, \cdots, n)$ の隣接行列である．さらに，M の各部分行列 M_{ij} について，M_{ij} の第 p 行の行和は $y_{ip,j}$ であるから，M は定理 4.1 の条件 (a) と (b) を満足している．

§5. 十分性の証明

条件 (i) をみたす完全 m 組グラフと PC のもつパラメーター m，n，c に対して，

$$a_{ip} = \begin{cases} a+1 & \begin{array}{ll} i = 1, 2, \cdots, s \text{ のとき} & p = 1, 2, \cdots, d+1 \\ i = s+1, \cdots, m \text{ のとき} & p = 1, 2, \cdots, d \end{array} \\ a & \begin{array}{ll} i = 1, 2, \cdots, s \text{ のとき} & p = d+2, \cdots, n \\ i = s+1, \cdots, m \text{ のとき} & p = d+1, \cdots, n \end{array} \end{cases} \qquad (5.1)$$

とする．ここで，a，d，s は非負の整数で，

$$\binom{m}{2} n^2 / c = mna + md + s, \quad 0 \leq d < n, \quad 0 \leq s < m$$

をみたす．$\sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} a_{ip} = \binom{m}{2} n^2 / c$ であるから，残りの条件 (ii) の十分性は，定理 4.2 における行列 X，Y_i および M_{ij}^{*} が (5.1) で与えられた a_{ip} に対して構成できるということを示すことによって証明される．行列 X，Y_i，M_{ij}^{*} の構成は n が偶数，奇数で若

干の差違はあるが，ほぼ同様にできるので，ここではnが偶数の場合のみを記す．

§5.1. Xの作成

$$\begin{aligned} &X_{11}+X'_{11}=n^2(G_{s,s}-I_s),\quad X_{22}+X'_{22}=n^2(G_{m-s,m-s}-I_{m-s}) \\ &X_{12}+X'_{21}=n^2G_{s,m-s} \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$[X_{11}\ \ X_{12}]j_m=c(na+d+1)j_s,\quad [X_{21}\ \ X_{22}]j_m=c(na+d)j_{m-s} \tag{5.3}$$

をみたす4つの部分行列$X_{k,l}$ $(k,l=1,2)$からなるm次の非負整数行列

$$X=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

を構成することが十分である．ここで，j_tはその成分がすべて1である長さtのベクトル，I_tは次数tの単位行列を表わす．

$$X^*=\begin{bmatrix} X^*_{11} & X^*_{12} \\ X^*_{21} & X^*_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{n^2}{2}(G_{s,s}-I_s) & \frac{n^2}{2}G_{s,m-s} \\ \frac{n^2}{2}G_{m-s,s} & \frac{n^2}{2}(G_{m-s,m-s}-I_{m-s}) \end{bmatrix}$$

を考える．そのとき，X^*は(5.2)を満たし，それの行和は

$$[X^*_{11}\ \ X^*_{12}]j_m=(m-1)\frac{n^2}{2}j_s,\quad [X^*_{21}\ \ X^*_{22}]j_m=(m-1)\frac{n^2}{2}j_{m-s}$$

である．$x=c(na+d+1)-(m-1)n^2/2=(m-s)c/m$，$y=(m-1)n^2/2-c(na+d)=sc/m$とおく．そのとき，$0\leq x<m-s$，$0\leq y<s$であるから，各行和が$x$に等しく，各列和が$y$に等しい$s\times(m-s)$ 0−1行列Bが存在することがRyser定理[3]，[6]から

簡単にわかる．従って，次のように X^*_{kl} に B を重ねることによって X^*_{kl} を調整して X_{kl} を得る．そのとき X_{kl} は (5.2) はもちろん (5.3) を満足する．

$$X_{11} = X^*_{11} \qquad X_{12} = X^*_{12} + B$$
$$X_{21} = X^*_{21} - B' \qquad X_{22} = X^*_{22}$$

§5.2. Y_i の作成　$n \times m$ 非負整数行列

$$Y^*_i = \begin{bmatrix} Y^*_{1i} \\ Y^*_{2i} \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

を考える．ここで，

$$Y^*_{1i} = \begin{cases} \frac{n}{2}(G_{d+1,m} - H^{(i)}_{d+1}) & i = 1, 2, \cdots, s \text{ のとき} \\ \frac{n}{2}(G_{d,m} - H^{(i)}_{d}) & i = s+1, \cdots, m \text{ のとき} \end{cases} \qquad Y^*_{2i} = \begin{cases} (\frac{n}{2}-1)(G_{n-d-1,m} - H^{(i)}_{n-d-1}) & i = 1, 2, \cdots, s \text{ のとき} \\ (\frac{n}{2}-1)(G_{n-d,m} - H^{(i)}_{n-d}) & i = s+1, \cdots, m \text{ のとき} \end{cases}$$

である．$H^{(i)}_t$ は $t \times m$ 行列で，第 i 列の要素がすべて 1，他の要素はすべて 0 である．Y^*_i の行和は $Y^*_{1i} j_m = (m-1)\frac{n}{2} j_m$, $Y^*_{2i} j_m = (m-1)(\frac{n}{2}-1) j_m$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 列和は $Y^{*\prime}_i j_n = \{\frac{n^2}{2} - (n-d-1)\} j_n$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$, $Y^{*\prime}_i j_n = \{\frac{n^2}{2} - (n-d)\} j_n$ $(i = s+1, \cdots, m)$ である．

$u = (a+1)c - (m-1)\frac{n}{2}$, $v = ac - (m-1)(\frac{n}{2}-1)$ とおく．

$$y_{ip} = \begin{cases} u & \begin{array}{ll} i = 1, 2, \cdots, s \text{ のとき} & p = 1, 2, \cdots, d+1 \\ i = s+1, \cdots, m \text{ のとき} & p = 1, 2, \cdots, d \end{array} \\ v & \begin{array}{ll} i = 1, 2, \cdots, s \text{ のとき} & p = d+2, \cdots, n \\ i = s+1, \cdots, m \text{ のとき} & p = d+1, \cdots, n \end{array} \end{cases}$$

とおき，行列 X に対し，$j = 1, 2, \cdots, m$ に対して，

$$s_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \left\{ \frac{n^2}{2} - (n-d-1) \right\} & i=1,2,\cdots,s\ (i \neq j) \text{ のとき} \\ x_{ij} - \left\{ \frac{n^2}{2} - (n-d) \right\} & i=s+1,\cdots,m\ (i \neq j) \text{ のとき} \\ x_{ij} & i=1,2,\cdots,m\ (i=j) \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく．そのとき，$m \geq c+1$，$0 \leq d \leq n-1$ であるから，$1 \leq r_{ip} \leq m-1$，$0 \leq s_{ip} \leq n$ である．そして，各 $i=1,2,\cdots,m$ に対して行和 r_{ip}，列和 s_{ij} をもつ $n \times m$ 0-1 行列 Z_i が存在する（Ryser 定理 [3], [6]）．従って，次のように Z_i を Y_i^* に重ねることによって，Y_i^* を調整して Y_i を得る．

$$Y_i = Y_i^* + Z_i \qquad i=1,2,\cdots,m.$$

Y_i は (4.2) を満たす．$m \geq c+1$ であるから $a \geq \frac{n}{2}$ より，Y_i は (4.3) を満たす．

<u>§5.3. M_{ij}^* の作成</u>　$n \geq 4$ の場合，$i \neq j$ のとき，$y_{ip,j}$ は $\frac{n}{2}$，$\frac{n}{2} \pm 1$ のいずれかを値にもち，$i=j$ のとき $y_{ip,j}=0$ である．それ故，n 次の 0-1 行列 M_{ij}^* を作ることができる（Ryser 定理 [3], [6]）．$n=2$ の場合，$d=0$ のとき，$1 \leq i, j \leq s$ に対し $y_{i2,j}=1$ $\left(j-i \equiv 1,2,\cdots,\left\lceil \frac{s-1}{2} \right\rceil \bmod s\right)$ なるように Y_i が作れる．$d=1$ のとき，$s+1 \leq i, j \leq m$ に対し，$y_{i2,j}=1$ $\left(j-i \equiv 1,2,\cdots,\left\lceil \frac{m-s-1}{2} \right\rceil \bmod m-s\right)$ なるように Y_i が作れる．行和，列和ベクトルがともに (2,0) でないので M_{ij}^* が作れる．

参考文献

[1] 潮和彦，田沢新成，池田秀人，山本純恭(1976)．完全m組グラフのパータイト・クロー分解，日本数学会年会応用数学分科会講演予稿集，46-53.

[2] 潮和彦，田沢新成，池田秀人，浜田昇，山本純恭(1975)．多値レコードに対する均衡型ファイル方式(HUBMFS$_2$)について，情報処理学会昭和50年度第16回大会講演論文集，69-70.

[3] Ryser, H.J. (1957). Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, Canad. J. Math. 9, 371-377.

[4] 田沢新成，潮和彦，池田秀人，山本純恭(1976)．完全m組グラフのパータイト・クロー分解について，数理解析研究所講究録 285，112-121.

[5] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N. (1975). Design of a new balanced file organization scheme with the least redundancy, Information and Control 28, 156-175.

[6] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N. (1975). On claw-decomposition of complete graphs and complete bigraphs, Hiroshima Math. J. 5, 33-42.

[7] Yamamoto, S., Tazawa, S., Ushio, K. and Ikeda, H. (1977). Design of a balanced multiple-valued file organization scheme with the least redundancy, To appear in Proceedings of the Third International Conference on Very large data bases.